

Модель волновой нейронной сети для планирования путей клеточных роботов в стационарных и динамических мультиагентных средах*

Д.В. Лебедев

В работе рассматривается задача о планировании путей для клеточных роботов от некоторых начальных до целевых позиций. Роботы находятся в общей среде, которая может содержать как стационарные, так и динамические препятствия (позиции последних являются неизвестными до начала планирования). При движении роботы должны обходить препятствия и не должны сталкиваться друг с другом. В решении используется идея централизованного планирования, когда независимые перемещения каждого из роботов рассматриваются в совокупности. Для планирования путей предложена оригинальная модель нейронной сети волнового типа. Сеть имеет дискретную динамику, является локально связанной, и, отсюда, эффективной с точки зрения вычислительных затрат. Приведено описание модели, рассмотрены особенности динамики сети. Продемонстрированы результаты моделирования для случая двух роботов, перемещающихся в различных динамических средах.

1. Введение

В реальных ситуациях часто существует необходимость скоординировать перемещения группы объектов. Такая задача может возникнуть в случае, когда требуется развести траектории самолётов в небе,

*Работа выполнена при поддержке немецкого исследовательского общества (DFG), грант GRK256-2.

или скоординировать движение группы мобильных роботов, выполняющих совместно некоторую общую задачу, например, исследование местности в зоне чрезвычайной ситуации. Часто среда, где перемещаются такого рода автономные агенты, может изменяться с течением времени. Такие изменения могут быть связаны, например, с незапланированным появлением в среде посторонних объектов. Информация о состоянии этих объектов может быть получена либо от сенсорных систем роботов, либо от систем визуального наблюдения, осуществляющих контроль за действиями и средой перемещения последних. В подобных ситуациях управляющая система, координирующая движение роботов, должна уметь адаптироваться к переменам в среде, то есть изменять соответствующим образом их маршруты.

Существует несколько способов планирования путей объектов в мультиагентной среде, а именно, методы централизованного и разделённого планирования, а также метод ослабленной централизации. Основным различием этих подходов является число объектов, участвующих в планировании путей. В случае централизованного планирования, перемещения объектов рассматриваются совокупно, и планирование осуществляется в конфигурационном пространстве, являющемся произведением конфигурационных пространств индивидуальных объектов (см. [1–3]). При использовании метода разделённого планирования пути для каждого объекта планируются в той или иной степени независимо (например, поочередно для каждого, как в [4]), и после планирования части пути для одного из роботов рассматриваются возможные перемещения для всех остальных (см. [4–6]). Таким образом, разделённое планирование предполагает наложение строгих ограничений на перемещения роботов до момента рассмотрения их текущих взаимных расположений. Некоторые результаты сравнения этих двух методик приведены в [2] и [3].

Каждый из методов централизованного и децентрализованного планирования характеризуется рядом достоинств и недостатков. Централизованное планирование имеет преимущество в том, что реализует *завершённое планирование*, то есть гарантирует, что решение (искомые пути) всегда будет получено, если оно существует. Разделённое планирование является незавершённым и может приводить к ситуациям, когда существующее решение может быть не найдено.

Единственным практическим недостатком централизованного подхода, несмотря на его завершённость, является экспоненциальная сложность относительно размерности конфигурационного пространства. Это означает, что имея m роботов с k степенями свободы у каждого, планирование путей потребует экспоненциального времени порядка $m \cdot k$.

Определённым компромиссом между централизованным и разделённым планированием является метод ослабленной централизации (см. [7–9]). Его идея состоит в том, что на перемещения роботов накладываются лишь незначительные ограничения, в рамках которых рассматривается движение объектов по предварительно сформированной карте путей.

Несмотря на то, что методы ослабленной централизации являются в общем случае завершёнными (поскольку базируются на идее конструирования общего для всех агентов конфигурационного пространства), следует отметить, что указанные алгоритмы требуют доработки данных в режиме off-line, и, следовательно, не могут быть использованы для планирования путей в реальном времени.

Кроме того, все указанные выше методы могут быть применены только в случае полной информации о среде. Таким образом, они предполагают фиксированную стационарную среду и отсутствие изменений в ней.

В данной работе предлагается динамика нейронной сети, способной планировать безопасные пути как в стационарных, так и в изменяющихся мультиагентных средах. Модель сети включает в себя три парадигмы: а) конфигурационное пространство [10], б) построение поля потенциалов и с) распространение волновых фронтов.

Таким образом, в модели реализуется централизованное планирование. Над конфигурационным пространством с помощью нейронной сети формируется числовое, динамически обновляющееся поле потенциалов. Распространение волновых фронтов, основанное на перманентном возбуждении нейрона, ассоциированного с целевой конфигурацией, используется в качестве механизма для генерации поля потенциалов. Указаны способ описания в конфигурационном пространстве роботов запрещённых конфигураций, предохраняющих объекты от взаимных коллизий и от столкновений с препятствиями в рабочем

поле, а также правило перехода в следующую конфигурацию в поле потенциалов.

Кроме этого, аналитически показано, что модель генерирует оптимальные в смысле совокупной длины пути роботов в стационарной среде, и оптимальные (или близкие к оптимальным в том же смысле) в динамической.

Результаты компьютерного моделирования для случая двух роботов в различных динамических ситуациях подтверждают эффективность применения предложенной нейросетевой модели к задачам генерации маршрутов в стационарных и динамических мультиагентных средах.

2. Общие определения и формализация задачи

Введём предварительно несколько определений.

Рабочее пространство — подмножество 2-мерного физического пространства, заданное как $W \subset \mathbb{R}^2$.

Область препятствий — набор O_w запрещённых регионов в рабочем пространстве.

Конфигурация робота — набор независимых параметров, полностью определяющий положение и ориентацию любой части робота относительно некоторой зафиксированной системы координат.

Конфигурационное пространство — множество C всевозможных конфигураций робота. Заметим, что для точечного (по размеру) объекта его конфигурационное пространство совпадает с физическим.

Область C -препятствий — набор O_c запрещённых конфигураций в C , при которых робот коллидирует с объектами в рабочем пространстве.

Свободное конфигурационное пространство — множество C_f , состоящее из регионов C , не содержащих запрещённых конфигураций, то есть эквивалентное $C \setminus O_c$.

Безопасным назовём такой путь, который не приводит к коллизиям.

В общем случае задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть имеется k клеточных роботов. Пусть каждый робот R_i имеет d_i число степеней свободы. Для i -го робота в рабочем пространстве W заданы начальная S_i и целевая T_i позиции. Предположим, в момент времени t_k в W находится число N_k препятствий (то есть запрещённых позиций). Пусть в этот момент времени положение всех препятствий в рабочем поле формирует область $O_w(t_k) = \{O_{w_i}(t_k)\} = \{(A_i^k, B_i^k)\}$, где позиции препятствий определяются набором векторов (A_i^k, B_i^k) , $1 \leq i \leq N_k$. Пусть $\tau_i(t_k) = (p_i(t_k), q_i(t_k))$ определяет позицию i -го робота в W в момент времени t_k . Для i -го робота необходимо найти безопасный путь от начальной до целевой позиции, то есть путь τ_i , удовлетворяющий условиям: $\tau_i(t_s) = S_i$, $\tau(t_g) = T_i$, $\tau_i(t_k) \cap O_w(t_k) = \emptyset$, $t_s \leq t_k \leq t_g$, где t_s — время начала движения, а t_g — время достижения i -ым роботом цели.

3. Концепция предлагаемого алгоритма

Построение поля потенциалов над конфигурационным пространством робота является одной из самых популярных методик решения задач, связанных с планированием путей. При таком подходе робот рассматривается как точка в конфигурационном пространстве, движущаяся под воздействием потенциального поля от некоторой начальной до некоторой целевой конфигурации. В классическом варианте потенциальное поле представляется в виде суммы *потенциала притяжения*, который «ведёт» робота к целевой конфигурации, и *потенциала отталкивания*, который заставляет его держаться на некотором заранее предустановленном расстоянии от препятствий, и отдаляться от них, в случае приближения на менее чем предустановленное расстояние.

Одной из процедур построения поля потенциалов является его *аналитическое* описание в виде функции (см. [11–13]), оценка градиента которой используется затем для нахождения маршрута. Такое описание, в частности, имеет ряд физических интерпретаций (см., например, [14–16]). Заметим, что аналитическое описание является

эффективным, как правило, лишь для стационарных сред с известным расположением препятствий, и существенно затруднено (а также труднореализуемо на практике) для сред с незапланированными изменениями. Кроме того, возможно попадание в локальный экстремум функции потенциала, что приводит к ситуации, когда существующее решение может быть не найдено.

Альтернативным подходом является построение *числового* поля потенциалов (или клеточных потенциалов) над дискретным представлением C (см. [17], [18]). В этом случае с каждой дискретной позицией в C связано числовое значение потенциала. Поле потенциалов отражает глобально структуру C , где также могут быть применены градиентные методы для нахождения пути.

Построение клеточных потенциалов имеет, однако, ряд преимуществ, среди которых относительная простота реализации и скорость исполнения. Их дискретная природа позволяет достаточно легко интегрировать в процесс планирования путей информацию о состоянии среды, поступающую от сенсорных систем. Кроме этого, клеточные потенциалы могут быть сгенерированы распределённо, в виде параллельных процессов (для примера см. [19]).

Для планирования путей в стационарной среде в работе [20] был предложен алгоритм преобразования дистанции (примеры использования алгоритма см. также в [21], [22]). Суть этого алгоритма заключается в присвоении каждой дискретной ячейке C числового значения, эквивалентного дистанции от данной ячейки до цели, сложенной с некоторым параметром штрафа, определяющим вероятность принадлежности этой ячейки к C_f (чем больше вероятность того, что ячейка не лежит в C_f , тем больше значение штрафа). Движение должно осуществляться затем в сторону максимального антиградиента в поле дискретных потенциалов.

В работе [17] была предложена модель нейронной сети волнового распространения для генерации клеточных потенциалов (фактически эта модель также вычисляет преобразование дистанции). Отметим, что алгоритм, описанный в [17] и алгоритм преобразования дистанции являются «однопроходными», то есть завершают свою работу после того, как каждой ячейке C было присвоено числовое значение. Следовательно, эти алгоритмы не способны адаптироваться и учиты-

вать изменения в среде. Так, в работе [21] полный путь планируется заново каждый раз, когда робот «натывается» на препятствие. Такая процедура перепланирования может оказаться вычислительно неэффективной, особенно для сред с высокой плотностью препятствий.

Алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, реализует (с незначительными упрощениями) динамическую версию алгоритма преобразования дистанции. Дискретные потенциалы при этом не являются стационарными и способны адаптироваться к изменениям в среде. Для генерации потенциалов используется механизм волнового распространения. Глобальный минимум в поле потенциалов всегда соответствует целевой конфигурации, которая «притягивает» робота.

Генерация динамических потенциалов выполняется волновой нейронной сетью. Динамика сети основана на правилах, описываемых функциями типа пороговых. Эти правила обеспечивают корректную генерацию клеточных потенциалов, гарантируя при этом перемещение в безопасную конфигурацию на каждом дискретном шаге.

Для учёта динамических изменений в среде в поле сети на каждом шаге генерируется новая волна активности, источником которой является нейрон, соответствующий целевой конфигурации. Волны нейронной активности, таким образом, стартуют от цели и вследствие локальных взаимодействий нейронов проходят через всё конфигурационное пространство, неся при этом «свежую» информацию о состоянии среды.

4. Модель волновой нейронной сети

4.1. Архитектура сети

Волновая нейронная сеть представляет собой локально-связанную, высоко параллельную нейронную архитектуру клеточного типа, способную вычислять клеточные потенциалы над дискретным представлением конфигурационного пространства.

В зависимости от размерности конфигурационного пространства S сеть может состоять из слоя или набора слоёв локально-связанных нейронов, положение которых совпадает с дискретным представлением S . Все нейроны совместно образуют *поле сети*. На рис. 1а показана модель нейрона сети.

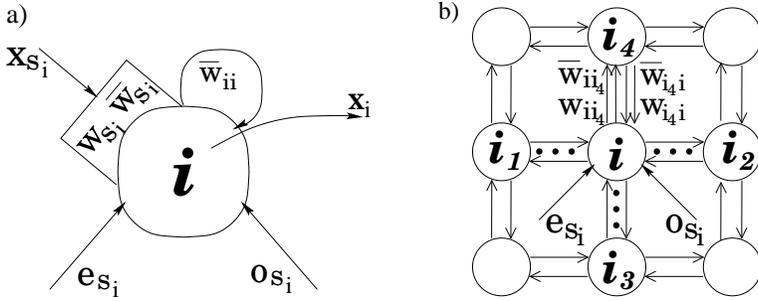


Рис. 1. а) Модель нейрона; б) Окрестность нейрона и нумерация его соседей на плоскости.

Каждый i -й нейрон сети связан с $n = 2d$ соседями, образующими совместно окрестность (рецепторное поле) i -го нейрона, обозначенное s_i . Поле сети, отсюда, состоит из набора перекрывающихся соседств. Пример плоского соседства проиллюстрирован на рис. 1б).

Сеть является динамической системой, которая может быть полностью описана набором векторов состояний нейронов $\Phi_i = [x_i, \widehat{W}_{s_i}] \subset \mathbb{R}^{2n+2}$. Первый элемент x_i вектора Φ_i есть уровень активации нейрона, являющийся вещественной скалярной величиной, представляющей выход нейрона. Второй элемент, вектор $\widehat{W}_{s_i} = [w_{i_1 i}, \dots, w_{i_n i}, \bar{w}_{ii}, \bar{w}_{i_1 i}, \dots, \bar{w}_{i_n i}]$, включает в себя два набора весовых коэффициентов, определяющих силу синаптических связей между нейроном i и его соседями из окрестности s_i . Отметим, что в процессе эволюции сети веса w_{ji} и \bar{w}_{ji} следуют различным правилам адаптации.

Уровни активности нейронов из окрестности s_i i -го нейрона формируют совместно вектор $X_{s_i} = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$. Нейрон i будем считать неактивным, если $x_i = 0$, и активным, если $x_i > 0$.

Кроме того, i -ый нейрон в поле сети может находиться под влиянием тормозящих и возбуждающих внешних входов, обозначенных соответственно векторами $o_{s_i} = [o_i, o_{i_1}, \dots, o_{i_n}]$ и $e_{s_i} = [e_i, e_{i_1}, \dots, e_{i_n}]$.

Внешние входы нейронов являются бинарными. Таким образом, если внешний вход «активен», то его значение является единичным. Тормозящие внешние входы являются единичными для нейронов,

ассоциированных с препятствиями, а возбуждающий внешний вход принимает единичное значение лишь для нейрона, соответствующего целевой конфигурации в поле сети.

4.2. Динамика сети

Эволюция во времени i -го нейрона сети описывается уравнением активации (1):

$$x_i(t+1) = e_i + (1 - e_i) \cdot r(S_i \cdot K_i + (1 - S_i) \left(\sum_{j \in s_i} w_{ji}(t) \cdot (x_j(t) + 2) \right)). \quad (1)$$

Адаптация весов связей w_{ji} и \bar{w}_{ji} , ассоциированных с нейроном i , определяется наборами правил:

$$w_{ji}(t+1) = U(P_k(X_{s_i}(t))), \quad j \in s_i, \quad (2)$$

$$\bar{w}_{ji}(t+1) = x_j(t), \quad j \in \{s_i \cup \{i\}\}. \quad (3)$$

Здесь функции $r(\tau)$ и $U(\tau)$ определены как:

$$U(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{для } \tau > 0 \\ 0, & \text{для } \tau \leq 0 \end{cases}, \quad r(\tau) = \begin{cases} [\tau], & \text{если } \tau > 0 \\ 0, & \text{если } \tau \leq 0 \end{cases},$$

где $[\tau]$ есть целая часть τ .

Несложно заметить, что уравнения (1) определяют различную схему эволюции для трёх групп нейронов: 1) для нейрона-цели (нейрона, соответствующего целевой конфигурации); 2) для его соседей; и, наконец, 3) для всех оставшихся нейронов. Рассмотрим эволюцию нейронов в каждой из этих трёх групп более подробно.

Группа 1: нейрон-цель

Из (1) следует, что значение уровня активности целевого нейрона эквивалентно значению на внешнем возбуждающем входе e_i , связанным с этим нейроном.

Группа 2: соседи нейрона-цели

Для этой группы нейронов положительным (и равным единице) является значение функционала S_i , определённого как $S_i = \sum_{j \in s_i} e_j$.

Отсюда, уровень активности нейронов из данной группы примет значение, эквивалентное значению функционала

$$K_i = \sum_{j \in s_i} e_j \cdot (B_i \cdot (x_i(t) + 1) + (1 - B_i) \cdot (e_j + 1)). \quad (4)$$

В действительности, функционал (4) реализует две схемы эволюции: 1) для случая, когда целевая конфигурация стационарна (цель не перемещается), и 2) для случая, когда целевая конфигурация подвижна. Индикатором для первого случая является положительное значение функционала $B_i = F(x_j - e_j)$, где $F(\tau)$ определена как $F(\tau) = 1 - U(\tau)$. Действительно, свидетельством того, что целевая конфигурация не изменилась, является совпадение значения текущего уровня активности нейрона j и значения на его внешнем возбуждающем входе. В этом случае функционал B_i принимает единичное значение. Если имеет место вторая схема эволюции, то есть целевая конфигурация переместилась, то функционал B_i примет нулевое значение, и нейрон i примет значение $e_j + 1$, равное двум.

Группа 3: прочие нейроны

Если i -ый нейрон не является нейроном-целью и не содержит последнего в своей окрестности, то его уровень активности примет увеличенное на два значения уровня активности нейрона-соседа j , вес w_{ji} от которого является положительным. Значения весов w_{ji} , где $j \in s_i$, определяются функцией P_k :

$$P_k = \begin{cases} \Omega_1, & k = 1 \\ \Omega_k + I(\sum_{l=1}^{k-1} \Omega_l), & 1 < k \leq n \end{cases}. \quad (5)$$

Функция P_k «опрашивает» k -го соседа i -го нейрона (согласно произвольно установленному и зафиксированному приоритету) и «выбирает» первого (и единственного) из них, удовлетворяющего положительному значению выражения (6):

$$\Omega_k = F(o_k) \cdot U(x_k(t)) \cdot E(x_k(t), \bar{w}_{ki}(t)) \cdot F(g(x_i(t), w_{ii}(t))) \cdot (U(x_i(t)) \cdot D(x_i(t), x_k(t)) + F(x_i(t))). \quad (6)$$

Значения всех других весов (согласно (5)) станут нулевыми. Здесь функция $I(\tau)$ определена как

$$I(\tau) = \begin{cases} -c, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0 \end{cases} \quad [17], \text{ где } c \gg 1.$$

Выражение (6) является положительным, если выполнен ряд входящих в него условий, которые отвечают за корректное построение поля потенциалов. Рассмотрим эти условия более подробно.

Условие 1. *Нейрон k изменил свой уровень активности на предыдущем шаге эволюции сети, то есть $x_k(t) \neq x_k(t - 1)$.*

Выполнение этого условия соответствует положительному значению функции $E(x_k(t), \bar{w}_{ki}(t))$, где функция $E(\cdot)$ определена как:

$$E(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 1, & \tau_1 \neq \tau_2 \\ 0, & \tau_1 = \tau_2 \end{cases}.$$

Условие 2. *Нейрон k является активным, то есть $x_k(t) > 0$, откуда $U(x_k) = 1$.*

Условие 3. *Нейрон i является активным, и $x_k(t) \leq x_i(t)$.*

Действительно, данное условие справедливо, если выполнено: $U(x_i(t)) \cdot D(x_i(t), x_k(t)) > 0$, где $D(\cdot)$ определена как:

$$D(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 1, & \tau_1 - \tau_2 \geq 0 \\ 0, & \tau_1 - \tau_2 < 0 \end{cases}.$$

Условие 4. *Нейрон k в момент времени t не ассоциирован с препятствием, то есть $o_k(t) = 0$, откуда $F(o_k(t)) = 1$.*

Условие 5. *Нейрон i активен, и не выполнены одновременно условия $F(x_i(t)) > 0$ и $U(w_{ii}(t)) > 0$.*

Действительно, если отмеченные условия выполнены, то положительным будет значение функции $g(x_i(t), w_{ii}(t)) = F(x_i(t)) \cdot U(w_{ii}(t))$, которое обратит в нуль функцию $F(g(\cdot))$, а, следовательно, и выражение (6).

Нетрудно заметить, что если $x_i(t) = 0$ и $\bar{w}_{ii}(t) = x_i(t - 1) > 0$, то $\forall j \in s_i \ w_{ji}(t + 1) = 0$, и, отсюда, $x_i(t + 1) = 0$. Таким образом,

невыполнение условия 5 делает нейрон i (вне зависимости от состояния нейронов-соседей) невосприимчивым к внешнему воздействию, и нейрон i остаётся в однопактном состоянии рефрактерности.

4.3. Исследование динамики

Утверждение 1. Пусть в момент времени t нейроны i и j : $j \in s_i$ удовлетворяют положительному значению функции P_k (5). Тогда в момент времени $t + 1$ вес w_{ji} будет указывать направление возрастания функции потенциала.

Доказательство. Действительно, в момент времени t из условия 3 (см. стр. 103) справедливо: $x_j(t) \leq x_i(t)$. Тогда в момент времени $t + 1$ из уравнения активации нейронов (1) имеем: $x_j(t + 1) \leq x_j(t) + 1 < x_j(t) + 2 = x_i(t + 1)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из утверждения 1 следует, что перемещение в направлении антиградиента в поле потенциалов эквивалентно перемещению в направлении целевой конфигурации, значение потенциала в которой соответствует глобальному минимуму поля потенциалов.

4.3.1. Стационарная среда

В случае планирования путей в стационарной среде справедлив ряд следующих утверждений.

Утверждение 2. Если неактивный нейрон i «зажигается» в момент времени $t_k > 1$, то его активность в этот момент времени становится равной $2t_k - 1$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся принципом обобщённой математической индукции.

(а) Для $t_k = 2$ активность нейрона i равна 3 — верно (легко проверяется из уравнения активации нейронов (1)).

(б) Предположим, что формула справедлива для $t_k = k$, и покажем, что справедлива для $t_k = k + 1$. Действительно, неактивный нейрон изменит своё состояние, если в его окрестности найдётся сосед,

удовлетворяющий условиям 1–4 (см. стр. 103). Пусть такой нейрон-сосед существует. Очевидно, что он стал активным на k -ом шаге. Отсюда его активность, из предположения индукции, равна $2k - 1$. Согласно уравнению активации (1), активность нейрона i в момент времени $k + 1$ будет равняться $(2k - 1) + 2 = 2k + 1$. Из предположения индукции, активность нейрона i в момент времени $k + 1$ есть $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$, что и доказывает справедливость утверждения.

Утверждение 3. Пусть в момент времени t_k уровень активности нейрона i равен $x_k > 0$. Тогда в момент времени $t_k + k$ его уровень активности примет значение $x_k + k$.

Доказательство. На рис. 2 проиллюстрирована эволюция во времени цепочки из четырёх нейронов согласно уравнению активации нейронов (1). Здесь нейрон N_g является нейроном-целью, и, следовательно, источником распространения волновых фронтов (для этого нейрона внешний возбуждающий вход имеет единичное значение). Предполагается, что нейроны цепочки не ассоциированы с препятствиями.

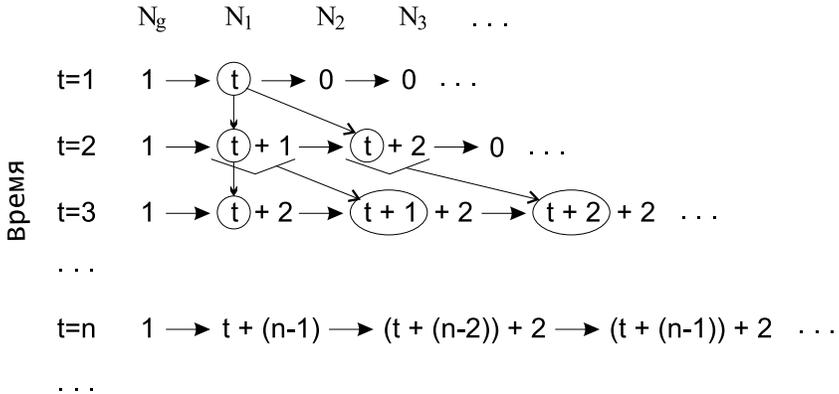


Рис. 2. Эволюция во времени цепочки из четырёх нейронов.

Не ограничивая общности, рассмотрим эволюцию нейрона N_2 . Нетрудно заметить, что его уровень активности в момент времени $t = n$ принимает значение $x_{N_2}(t) = (2t_f - 1) + (n - 2)$, где $2 \leq t_f \leq n$

— время, когда нейрон N_2 «зажётся». Выберем произвольный момент времени $k < n$. Тогда $x_{N_2}(n) - x_{N_2}(k) = (2t_f - 1) + (n - 2) - (2t_f - 1) - (k - 2) = n - k$. Отсюда $x_{N_2}(n) = x_{N_2}(k) + (n - k)$, утверждение справедливо.

Утверждение 4. Если неактивный нейрон i стал активным на k -ом шаге эволюции сети, а неактивный нейрон j на m -ом, где $m > k$, то $\forall t > m$ справедливо $x_j(t) > x_i(t)$.

Доказательство. Действительно, воспользовавшись утверждениями 2 и 3, имеем: $x_j(m + n) - x_i(k + n) = (2m - 1) + (n - m) - (2k - 1) - (n - k) = m - k > 0$, утверждение верно.

Утверждение 5. В стационарном S длина пути к цели является оптимальной в метрике L_1 .

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим двухмерный случай, когда в момент времени t точечный (по размеру) робот находится в позиции (p_t, q_t) (см. рис. 3). Пусть целевая позиция находится в левом верхнем квадранте относительно робота.

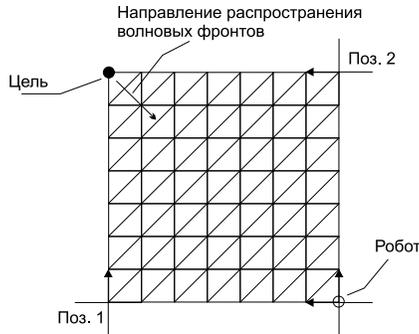


Рис. 3. Возможные направления перемещений робота в стационарной среде.

В зависимости от нумерации нейронов в окрестности i -го нейрона робот будет перемещаться в сторону одного из соседей, указанных

стрелкой. Два оставшихся соседа исключаются из рассмотрения, поскольку оба «зажглись» позже, чем нейрон, соответствующий текущей позиции робота, и, из утверждения 4, имеют уровень активности больший, чем у последнего. Следовательно, перемещение в соответствующие позиции (в направлении градиента в поле потенциалов) означало бы «уход» от цели.

Поскольку нумерация соседства является фиксированной, робот, следуя аналогичным рассуждениям, переместится либо в позицию 1, либо в позицию 2. Далее, аналогично, робот будет иметь лишь одну возможность двигаться в сторону цели: либо вверх из позиции 1, либо влево из позиции 2.

Таким образом, становится очевидным, что на каждом шаге робот всегда перемещается в сторону цели, то есть выбирает оптимальный путь. Пусть для достижения цели робот делает l шагов. Длина L пути, пройденного роботом, эквивалентна:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{i=1}^l (|x_{i-1} - x_i| + |y_{i-1} - y_i|) = \\
 &= \sum_{i=1}^l |x_{i-1} - x_i| + \sum_{i=1}^l |y_{i-1} - y_i| = |x_s - x_g| + |y_s - y_g|, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где (x_i, y_i) определяет позицию робота на i -ом шаге, а (x_s, y_s) и (x_g, y_g) есть координаты старта и цели, соответственно. Из формулы (7) вытекает, что путь робота является оптимальным в метрике L_1 .

4.3.2. Динамическая среда

Обход динамических препятствий

Рассмотрим на примере двухмерного рабочего поля обход динамических препятствий, внезапно возникающих на пути движения робота. Пусть в момент времени $t = t_k$ некоторая позиция на пути робота, ассоциированная с нейроном j , становится помеченной как запрещённая для траверса (динамическое препятствие). В зависимости от того, чётным или нечётным является число шагов m между

роботом и появившимся препятствием, возможны два варианта обхода последнего. Рассмотрим более подробно случай, когда m чётно. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 4.

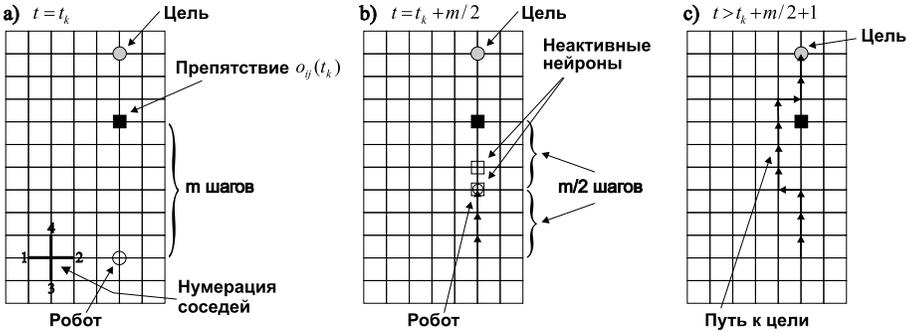


Рис. 4. Обход динамических препятствий: m — чётно.

На рис. 4а показаны положение робота, «всплывшего» препятствия и целевой позиции в момент времени $t = t_k$. Очевидно, что в момент времени $t = t_k + 1$ будет существовать нейрон $i : j \in s_i$, активность которого в этот момент времени станет нулевой (из условия 4, см. стр. 103). На следующем шаге эволюции сети (при $t = t_k + 2$) нейрон i также останется в неактивном состоянии, поскольку для него не будет выполнено условие 5 (см. стр. 103). На этом же такте неактивным станет один из соседей нейрона i (из условия 2, см. стр. 103). Таким образом, через два такта после «всплывания» препятствия возникнет связка из двух неактивных нейронов (отмеченных на рис. 4б квадратами), которая будет перемещаться от позиции препятствия в направлении распространения волновых фронтов. Пройдя $m/2$ шагов, робот и один из нейронов связки «встретятся» (см. рис. 4б). Таким образом, в момент времени $t = t_k + m/2$ активность нейрона, соответствующего текущей позиции робота, окажется нулевой. Отсюда, на следующем шаге эволюции робот останется в этой же позиции, так как для соответствующего нейрона невыполненным окажется условие 5 (см. стр. 103). В следующий момент времени (при $t = t_k + m/2 + 2$) робот продолжит навигацию. Направление следующего шага зависит от нумерации нейронов в локальной окрестности

нейрона, ассоциированного с текущей позицией. На рис. 4с показан итоговый путь робота, обходящий препятствие. Фиксированный порядок опроса нейронов-соседей отмечен на рис. 4а.

Случай, когда m — нечётно (рис. 5а), во многом аналогичен предыдущему случаю. Разница заключается лишь в том, что проделав $(m - 1)/2$ шагов (рис. 5б), робот останется в текущей позиции не один, а два такта времени — один такт (при $t = t_k + (m - 1)/2 + 1$), поскольку не найдётся соседа, удовлетворяющего условию 2 (активность нейрона, соответствующего текущей позиции робота, станет нулевой), а второй (при $t = t_k + (m - 1)/2 + 2$) — поскольку невыполненным окажется условие 5 (см. стр. 103). На следующем шаге эволюции сети робот продолжит навигацию. Итоговый путь показан на рис. 5с.

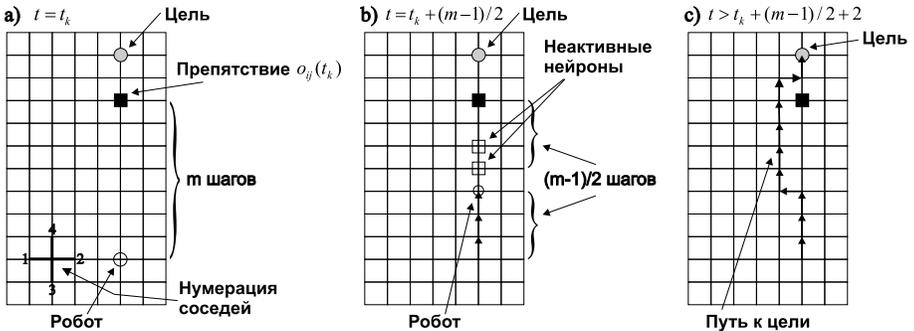


Рис. 5. Обход динамических препятствий: m — нечётно.

Глобальная адаптивность к изменениям в среде

Одним из основных свойств поля потенциалов, генерируемого волновой нейронной сетью, является его способность эффективно и быстро адаптироваться к переменам в среде. Это свойство отличает предлагаемую модель от других известных моделей, например, от классической модели решётки сопротивлений, которая требует достаточно большого числа итераций для «ухода» из локального максимума и сходимости к решению. Во время этих итераций наблюдаются осциллирующие перемещения робота в окрестности локального максимума, что приводит к генерации неестественно «извилистых» и, как следствие, более длинных путей (также возможны ситуации, когда существующий путь вообще не будет найден).

Поле потенциалов, генерируемое волновой нейронной сетью согласно уравнениям (1)–(2), способно эффективно адаптироваться к глобальным изменениям в среде. Глобальная адаптация схематично проиллюстрирована на рис. 6.

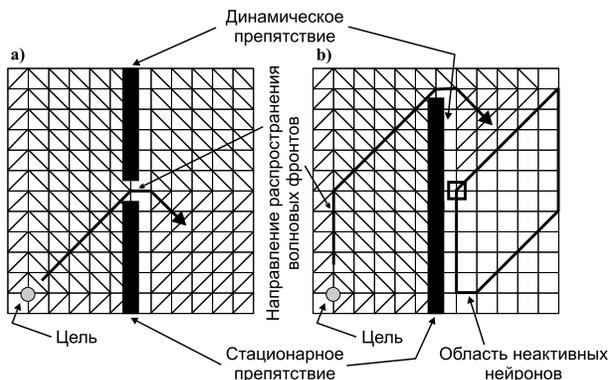


Рис. 6. Схематичное изображение глобальной адаптивности нейронной сети к изменениям в среде.

На рис. 6а указаны начальное положение динамического препятствия, стационарное препятствие, целевая конфигурация и направление, в котором волновые фронты распространяются вокруг целевой конфигурации, «покрывая» конфигурационное пространство. Случай, когда динамическое препятствие в произвольный момент времени сместилось на позицию вниз, проиллюстрирован на рис. 6б. В этой ситуации волновые фронты динамически огибают препятствие. Контуром выделена область неактивных нейронов. Эта постоянно изменяющаяся во времени область возникает в результате того, что один или целая группа нейронов становятся неактивными вследствие положения препятствий, при котором прерывается последовательный ход распространения волн нейронной активности (в данной схеме это единственный нейрон, обведённый квадратом на рис. 6б). Оставаясь дополнительным такт в состоянии рефрактерности, такие нейроны являются источником затухающей волны, которая распространяется вокруг них и «гасит» другие нейроны (процесс продолжается в виде цепной реакции: с каждым шагом «гасится» большее число ней-

ронов). Неактивные («затухшие») нейроны станут активными после того, как их достигнет «свежий» волновой фронт.

Динамика сети, таким образом, за счёт использования механизма гашения («запускаемого» невыполнением условия 5, см. стр. 103) обеспечивает эффективную и быструю адаптацию поля потенциалов к глобальным изменениям в среде и предотвращает (в общем случае) появление локальных экстремумов, наличие которых, вследствие осцилляций в области последних, означает «извилистость» пути («блуждания» робота). Отметим также, что в таких случаях не приходится говорить об оптимальности пути.

На рис. 7 показаны результаты симуляции динамического распространения волновых фронтов в случае двухмерного конфигурационного пространства с помощью нейронной сети, состоящей из 3721 (61×61) нейронов.

На рисунках 7с, 7d, и 7е вдоль оси z отложены значения уровней активности нейронов сети. На рис. 7с поле потенциалов, образованное уровнями активности нейронов, в точности соответствует начальному расположению препятствий (то есть отображает структуру конфигурационного пространства C , показанного на рис. 7а). Очевидно, что глобальный минимум поля потенциалов соответствует целевой конфигурации, а перемещение из произвольной конфигурации вдоль антиградиента в поле потенциалов будет соответствовать кратчайшему (в метрике L_1) пути до неё.

На рис. 7d показано поле потенциалов через несколько тактов после того, как динамическое препятствие, смещаясь вниз на одну позицию на каждом шаге эволюции сети, оказалось в позиции, указанной на рис. 7б. Рис. 7d, таким образом, демонстрирует стадию «перестройки» поля потенциалов. Поскольку конечное положение динамического препятствия породило волну затухания (механизм затухания описан выше), группа нейронов стала неактивной (эта группа изменяется во времени, один из промежуточных моментов эволюции показан на рис. 7d). В то же время, на рис. 7d можно увидеть, что «в пути» уже новая волна активности, несущая «свежую» информацию о состоянии среды. Вследствие прихода этой волны активными станут нейроны, пребывающие в неактивном состоянии. Рис. 7е соответствует ситуации, когда поле потенциалов полностью адаптировалось к глобальной перемене в среде.

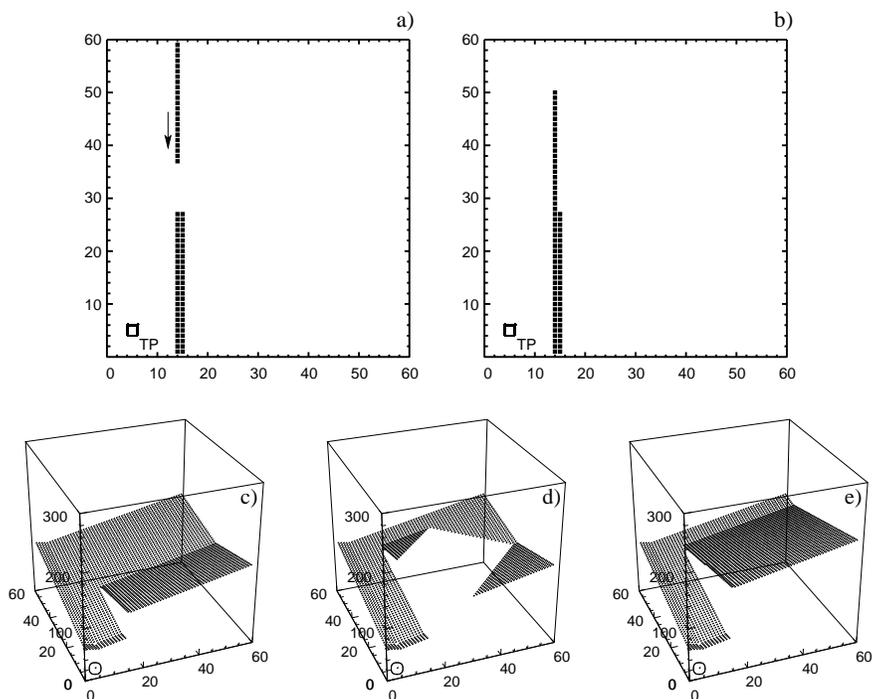


Рис. 7. Глобальная адаптивность поля потенциалов к изменениям в среде.

5. Схема решения

5.1. Движение роботов и описание препятствий в совокупном S

Пусть в рабочем пространстве W перемещаются два клеточных робота, для которых заданы начальные и целевые позиции. Пусть векторы $(p_1(t), q_1(t))$ и $(p_2(t), q_2(t))$ определяют позиции первого и второго робота в момент времени t , соответственно. Если робот имеет размер больше одной клетки, то соответствующий вектор определяет положение центра прямоугольника, охватывающего робота.

Определим совокупное конфигурационное пространство S как:

$$C = C_1 \times C_2 \subset \mathbb{R}^4, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 есть индивидуальные конфигурационные пространства каждого из роботов. Рассмотрим в пространстве C движение вектора $(p_1(t), q_1(t), p_2(t), q_2(t))$. Очевидно, что любая точка в C однозначно определяет положение каждого из роботов в рабочем поле. Поскольку требуется планировать безопасные пути, опишем в пространстве C два типа стационарных препятствий. Пусть стационарные препятствия (число которых конечно) в рабочем пространстве W заданы набором векторов, определяющим область $O_w = \{O_{w_i}\} = \{(A_i, B_i)\}$. Для безопасности путей необходимо выполнение следующих ограничений:

$$p_1(t) \neq A_i, \quad q_1(t) \neq B_i, \quad p_2(t) \neq A_i, \quad q_2(t) \neq B_i \quad \forall t, i.$$

Отображая указанные ограничения в совокупное конфигурационное пространство, получаем набор запрещённых конфигураций в C :

$$\begin{cases} |p_1 - A_i| < 1/2(R_1^w + 1) + \delta \\ |q_1 - B_i| < 1/2(R_1^h + 1) + \delta \end{cases} \quad \forall p_2, q_2, i, \quad (9)$$

$$\begin{cases} |p_2 - A_i| < 1/2(R_2^w + 1) + \delta \\ |q_2 - B_i| < 1/2(R_2^h + 1) + \delta \end{cases} \quad \forall p_1, q_1, i,$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$ обозначает расстояние от путей роботов до препятствий. Этот набор препятствий описывает две плоскости размерности два, покрытые четырёхмерными кубами. Здесь R_1^w и R_1^h , R_2^w и R_2^h есть, соответственно, ширина и высота прямоугольников, описывающих каждого из роботов. Таким образом, из C исключаются конфигурации, принимая которые роботы будут находиться в позициях столкновения с препятствиями в рабочем поле.

Для предотвращения взаимных столкновений роботов опишем ещё один набор препятствий в C :

$$\begin{cases} |p_1 - p_2| < 1/2(R_1^w + R_2^w) \\ |q_1 - q_2| < 1/2(R_1^h + R_2^h) \end{cases}. \quad (10)$$

Эти ограничения описывают в C четырёхмерный брус, включающий в себя конфигурации, при которых роботы взаимно коллидируют.

Таким образом, наборы ограничений (9) и (10) полностью описывают область O_c стационарных препятствий в C .

5.2. Планирование путей и правило перемещений в C

Планирование путей осуществляется в конфигурационном пространстве C , определённом согласно (8). С каждой дискретной позицией в C ассоциирован нейрон поля волновой нейронной сети. Генерация дискретных потенциалов, представляющих собой выходы нейронов и формирующих в совокупности поле потенциалов, выполняется согласно уравнениям (1)–(3).

Изначально все нейроны сети неактивны. Нейрон, соответствующий целевой конфигурации в C (нейрон-цель), получает единичное значение на внешнем возбуждающем входе и является, отсюда, источником распространения нейронной активности в поле сети. Нейроны, соответствующие стационарным препятствиям в C (нейроны-препятствия, они ассоциированы с позициями в C , определёнными согласно (9)–(10)), получают единичное значение на внешних тормозящих входах. Аналогично, если нейрон i в момент времени t_k ассоциирован с динамическим препятствием, то его тормозящему внешнему входу o_i в этот момент времени также присваивается единичное значение (если препятствие затем «уходит», то o_i вновь становится нулевым).

В процессе эволюции сети уровень активности нейрона-цели соответствует глобальному минимуму поля потенциалов. В то же время, уровни активности других нейронов таковы, что чем ближе нейрон j к нейрону-цели (в смысле метрики L_1), тем меньше значение его уровня активности. Из замечания (на стр. 104) можно сделать вывод, что шаг в сторону антиградиента в поле потенциалов из произвольной конфигурации означает перемещение в направлении целевой конфигурации.

Формально правило перехода в конфигурацию p_j , ассоциированную с нейроном j , из текущей конфигурации p_i , ассоциированной с нейроном i , можно записать как:

$$p_i \rightarrow p_j : \{w_{ji} > 0 \quad || \quad e_j > 0\}. \quad (11)$$

Движение в C , таким образом, всегда направлено либо в сторону антиградиента поля потенциалов ($w_{ji} > 0$, см. замечание на стр. 104), либо завершается приходом в цель ($e_j > 0$). Отсюда, переход из конфигурации $p_i = (p_1^i, q_1^i, p_2^i, q_2^i)$ в конфигурацию $p_j = (p_1^j, q_1^j, p_2^j, q_2^j)$ эквивалентен перемещению в рабочем поле первого робота из позиции (p_1^i, q_1^i) в позицию (p_1^j, q_1^j) , а второго из позиции (p_2^i, q_2^i) в позицию (p_2^j, q_2^j) .

Утверждение 6. *Перемещения роботов на каждом дискретном шаге являются безопасными.*

Доказательство. Действительно, если бы переход осуществлялся из текущей конфигурации p_i , ассоциированной с нейроном i , в конфигурацию p_j , связанную с нейроном j , для которого $o_j = 1$ (нейрон j совпадает с препятствием), то из условия 4 (см. стр. 103) значение веса w_{ji} стало бы нулевым, и переход в соответствующую конфигурацию по правилу (11) был бы невозможен.

6. Результаты моделирования

В качестве примера был смоделирован ряд ситуаций для случая, когда в рабочем пространстве перемещаются два робота. Для моделирования было выбрано рабочее поле размером 21×21 , и соответственно, нейронная сеть, состоящая из 194481 нейронов (21^4). Границы рабочего поля рассматривались как препятствия. На рисунках неподвижные препятствия (запрещённые позиции) в рабочем поле показаны чёрными квадратами, а препятствия, находящиеся в движении в момент показа сцены — серыми. Направление движения препятствий указано стрелкой. Форма роботов — прямоугольник, либо квадрат (робот всегда занимает целое число клеток). Пути роботов показаны цепочкой из стрелок (дискретные перемещения). Стартовые и целевые позиции для роботов обозначены как SP1, SP2 и TP1, TP2, соответственно.

При моделировании был выбран следующий порядок опроса нейронов-соседей i -го нейрона, имеющего в поле сети метку $(p1, q1, p2, q2)$:

1. $(p1 - 1, q1, p2, q2)$;
2. $(p1 + 1, q1, p2, q2)$;
3. $(p1, q1, p2 - 1, q2)$;
4. $(p1, q1, p2 + 1, q2)$;
5. $(p1, q1 - 1, p2, q2)$;
6. $(p1, q1 + 1, p2, q2)$;
7. $(p1, q1, p2, q2 - 1)$;
8. $(p1, q1, p2, q2 + 1)$.

6.1. Планирование путей в стационарной среде

На рис. 8 продемонстрирована ситуация планирования путей в случае неподвижных препятствий. Рис. 8а иллюстрирует ситуацию, когда параметр δ (см. формулу (9)), определяющий близость путей к препятствиям, имеет нулевое значение. На рис. 8б показана ситуация, когда $\delta = 1$.

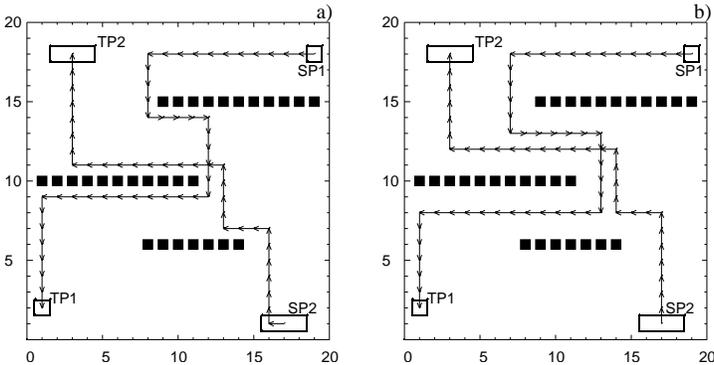


Рис. 8. Планирование путей в стационарной среде (комментарии в тексте).

Утверждение 7. Совокупная длина путей для обоих роботов является оптимальной в метрике L_1 .

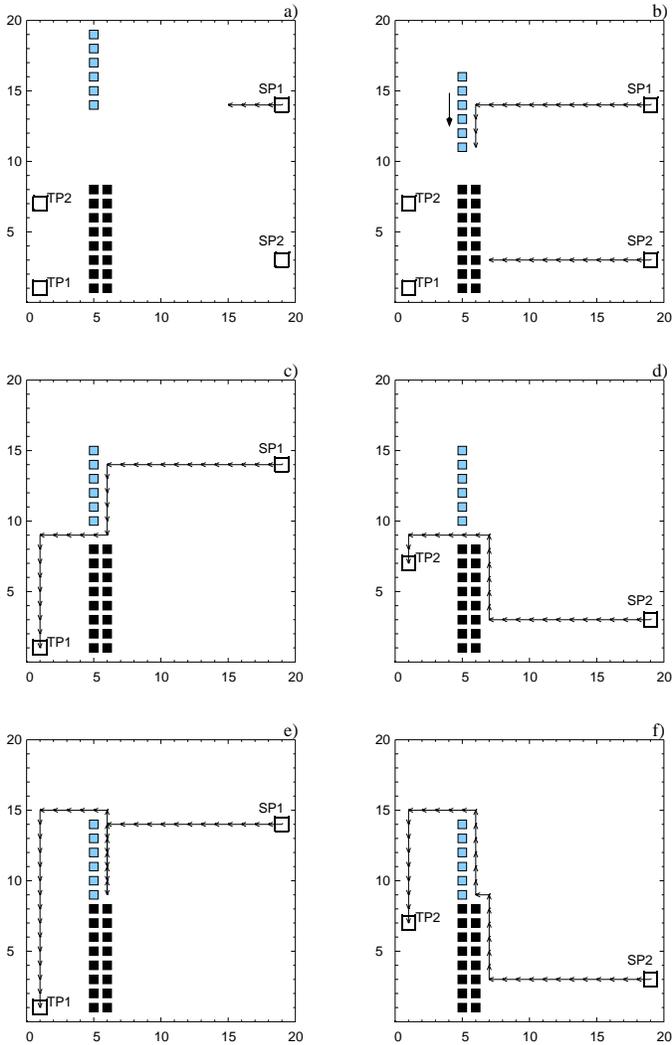


Рис. 9. Сцена 1 (пояснения в тексте).

Доказательство вытекает из обобщения выражения (7) на четырёх-мерное пространство (см. утверждение 5 на стр. 106).

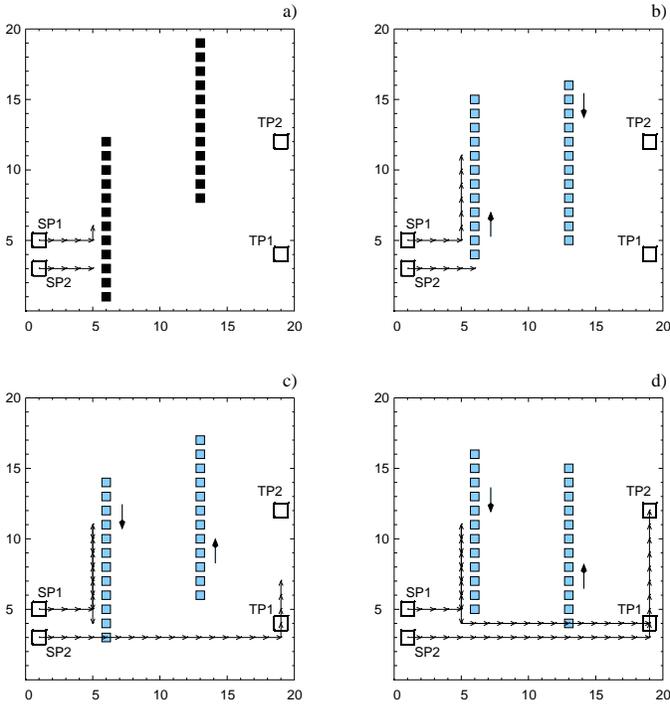


Рис. 10. Сцена 2 (пояснения в тексте).

6.2. Планирование путей в динамической среде

Не ограничивая общности, все динамические сцены были смоделированы для случая роботов, имеющих размер одной клетки и $\delta = 0$ (роботы могут вплотную приближаться к препятствиям, см. формулу (9)).

Динамическая сцена 1

Рис. 9 иллюстрирует две динамические ситуации (рисунки 9а, 9б, 9с, 9д и 9а, 9б, 9е, 9ф, соответственно), демонстрирующие планирование путей в случае незапланированных глобальных изменений в среде. На рис. 9а показано начальное расположение стационарных и динамических препятствий. На рис. 9б проиллюстрирован промежуточный этап планирования, когда после нескольких пере-

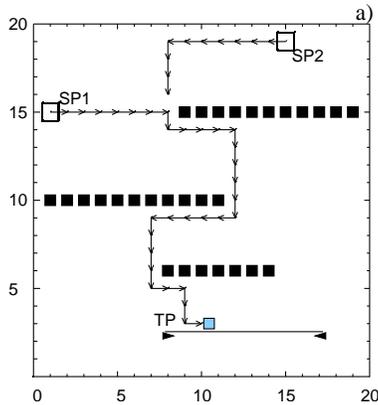


Рис. 11. Сцена 3: преследование подвижной цели (пояснения в тексте).

мещений роботов подвижное препятствие начало перемещаться вниз на одну позицию на каждом дискретном шаге времени. На рис. 9с и 9d показаны, соответственно, итоговые пути для каждого из роботов в случае, когда препятствие остановилось, оставив для роботов возможность осуществить траверс через образовавшийся проход. На рис. 9е и 9f изображены итоговые пути роботов для случая, когда препятствие закрыло проход до того, как роботы успели пройти через него. В этом случае поле потенциалов адаптировалось к изменению в среде, и роботы преследовали к целевым позициям вдоль динамически спланированных путей. Нетрудно заметить, что в обоих случаях пути роботов оптимальны.

Динамическая сцена 2

Данный пример демонстрирует более сложную сцену. Начальное положение препятствий показано на рис. 10а.

После того, как роботы сделали несколько шагов, препятствия начали перемещаться вверх-вниз, как показано стрелками (см. рис. 10b). Поле потенциалов в этом случае динамически адаптировалось к изменениям в среде. На рис. 10с показана промежуточная сцена процесса планирования. Итоговые пути роботов изображены на рис. 10d. Пути роботов, с учётом незапланированных изменений в

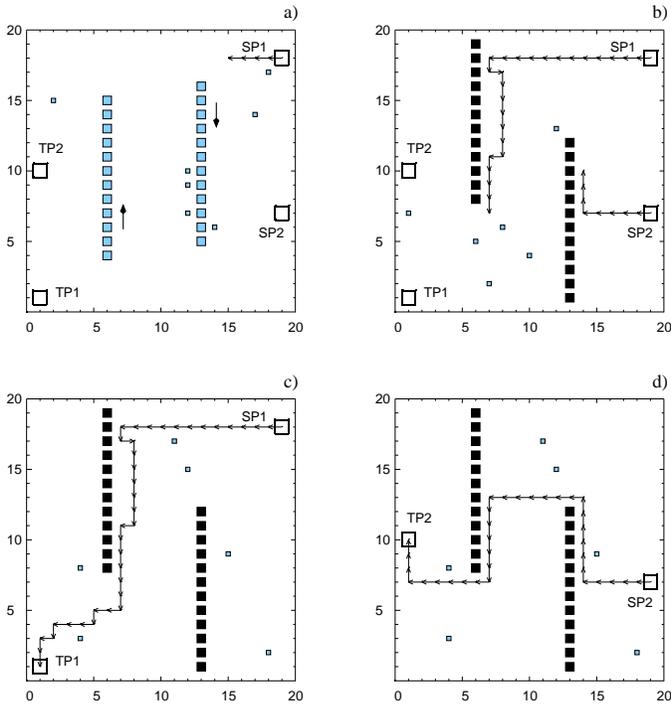


Рис. 12. Сцена 4: планирование путей с помощью волновой нейронной сети (пояснения в тексте).

среде, можно считать оптимальными, поскольку каждый шаг роботов был направлен в сторону целевых позиций.

Динамическая сцена 3

Данный пример иллюстрирует ситуацию, когда задачей роботов является захват подвижной цели.

Общая для обоих роботов цель стартует в позиции, помеченной TP, и движется вдоль указанной линии согласно направлению стрелок. На каждом шаге эволюции сеть, с учётом порядка опроса нейронов-соседей, «решает», какой из роботов находится ближе к цели. На рис. 11 показан успешный захват подвижной цели первым роботом. Очевидно, что робот шёл к цели кратчайшим путём.

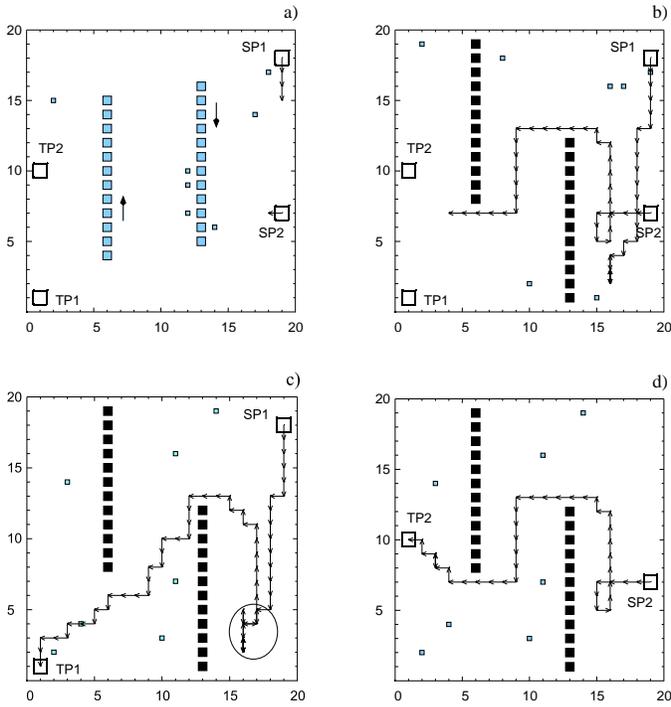


Рис. 13. Сцена 4: планирование путей с использованием нейронной сети типа Хопфилда (пояснения в тексте).

Динамическая сцена 4

Этот пример демонстрирует способность поля потенциалов стабилизироваться после того, как «исчезают» (прекращаются) динамические изменения в среде. Для сравнения приведены результаты планирования путей с помощью волновой нейронной сети (рис. 12) и с помощью топологически организующейся сети типа Хопфилда, описанной в [23] (рис. 12).

На рисунках светлыми квадратами, разбросанными в поле роботов, показаны семь случайных препятствий, появляющихся на каждом дискретном такте времени в рабочем поле роботов, и исчезающих, соответственно, на следующем такте. До начала движения роботов динамические препятствия двигались вверх-вниз, как показано

стрелками на рис. 12а. Достигнув в очередной раз одного из своих конечных положений, препятствия «замерли» (рис. 12b). В этом случае поле потенциалов быстро и эффективно стабилизировалось к новому положению препятствий, и итоговые пути для первого и второго роботов показаны на рисунках 12с и 12d, соответственно. Легко заметить, что путь первого робота является почти оптимальным («лишний» поворот был сделан для обхода случайного препятствия, «всплывшего» во время навигации вблизи робота), а для второго — оптимальным.

Результаты для сети Хопфилда показаны на рис. 13.

Легко заметить, что длины путей достаточно далеки от оптимальных (за счёт многочисленных блужданий). Кроме того, пути имеют зигзагообразную форму. Сети Хопфилда потребовалось существенно больше итераций для адаптации к ситуации. Во время эволюции сети в поле потенциалов возник локальный максимум, что привело к осциллирующему «блужданию» первого робота (соответствующая область «блужданий» обведена на рис. 13с овалом).

7. Заключение

В настоящей работе предложена оригинальная модель волновой нейронной сети для планирования путей в стационарных и динамических средах. На примере планирования перемещений двух клеточных роботов продемонстрирована возможность применения сети к планированию путей в мультиагентной среде.

Волновая нейронная сеть осуществляет динамическое распространение волновых фронтов для генерации числового поля потенциалов над дискретным представлением конфигурационного пространства. Источником распространения волновых фронтов является перманентное возбуждение нейрона, соответствующего целевой конфигурации. Значение уровня активности нейрона-цели всегда соответствует глобальному минимуму поля потенциалов. Динамика сети включает в себя ряд условий (см. стр. 103), выполнение которых обеспечивает перемещение на каждом дискретном шаге времени вдоль безопасного и оптимального пути.

В работе исследована динамика сети, проанализирован механизм обхода препятствий, лежащих на пути робота. Рассмотрена способность поля потенциалов адаптироваться к глобальным изменениям в среде. Последнее достигается за счёт способности нейронов оставаться в неактивном состоянии (в состоянии рефрактерности) в случае, когда расположение препятствий прерывает последовательный ход распространения волн нейронной активности. Таким образом, часть нейронов «гасится» волной затухания. Такие нейроны станут затем активными лишь после того, как их достигнет «свежий» волновой фронт, несущий информацию о текущем состоянии среды.

Ниже перечислены основные достоинства предложенной модели:

- для процесса планирования *не требуется* предварительной информации о состоянии среды;
- сеть является локально связанной и высоко параллельной (все нейроны одновременно изменяют свои состояния);
- не требуется процесс обучения нейронной сети;
- длины итоговых путей оптимальны в метрике L_1 в стационарной среде, и оптимальны (или близки к оптимальным) в динамической;
- вычислительные затраты зависят линейным образом от количества нейронов в поле сети;

Приведенный подход можно рассматривать как универсальный для планирования путей мобильных роботов и робототехнических манипуляторов с различным числом степеней свободы.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность и поблагодарить профессора ЯрГУ им. П.Г. Демидова В.В. Майорова за «соучастие», обсуждение и поддержку материала, изложенного в данной работе.

Список литературы

- [1] Latombe J.C. Robot Motion Planning. Kluwer Academic Publishers, 1991.

- [2] Sanchez Gildardo, Latombe Jean-Claude. Using a PRM Planner to Compare Centralized and Decoupled Planning for Multi-Robot Systems // Proceedings of the Int. Conf. on Robotics and Automation. 2002.
- [3] Su Mu-Sheng, Hsu Jane Yung-jen, Lin Fang-Chang. A Comparative Study of Path Planning for Multiple Robots // Proceedings of the Second Asian Conference on Robotics and Its Applications. 1994.
- [4] Lumelsky V., Harinarayan K. Decentralized Motion Planning for Multiple Mobile Robots: The Cocktail Party Model // Autonomous Robots Journal. No. 4. 1997. P. 121–135.
- [5] Колушев Ф.А., Богданов А.А., Вересов И.Г. и др. Мультиагентное планирование движения транспортных роботов в среде с препятствиями // Информационные технологии и интеллектуальные методы. Вып. Т. 2. 1997.
- [6] Leroy S., Laumond J.P., Simeon T. Multiple path coordination for mobile robots: a geometric algorithm // Proceedings of the Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence. 1999.
- [7] Aronov Boris, de Berg Mark, van der Stappen A. Frank et al. Motion Planning for Multiple Robots // Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry. 1998. P. 374–382.
- [8] LaValle Steven M., Hutchinson Seth A. Optimal Motion Planning for Multiple Robots Having Independent Goals // IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 14 (6). 1998. P. 912–925.
- [9] Svestka Petr, Overmars Mark H. Coordinated Path Planning for Multiple Robots // Journal of Robotics and Autonomous Systems. Vol. 23. 1998. P. 125–152.
- [10] Lozano-Perez T. Spatial planning: a configuration space approach // IEEE Transactions on Computers. 1983. P. C-32: 108–120.
- [11] Connolly Christopher I., Grupen Roderic A. On the Applications of Harmonic Functions to Robotics // Journal of Robotic Systems. Vol. 10 (7). 1993. P. 931–946.

- [12] Guldner Juergen, Utkin Vadim I., Hashimoto Hideki et al. Obstacle Avoidance in R^n Based on Artificial Harmonic Potential Fields // Proceedings of the Int. Conf. on Robotics and Automation. 1995. P. 3051–3056.
- [13] Chuang Jen-Hui, Ahuja Narendra. Path planning using the newtonian potential // Proceedings of the Int. Conf. on Robotics and Automation. 1991. P. 558–563.
- [14] Li Z.X., Bui T.D. Robot Path Planning Using Fluid Model // Journal of Intelligent and Robotic Systems. Vol. 21. 1998. P. 29–50.
- [15] Wang Yunfeng, Chirikjian Gregory S. A New Potential Field Method for Robot Path Planning // Proceedings of the Int. Conf. on Robotics and Automation. 2000.
- [16] Louste C., Liegeois A. Near Optimal Robust Path Planning for Mobile Robots: the Viscous Fluid Method with Friction // Journal of Intelligent and Robotic Systems. Vol. 27. 2000. P. 99–112.
- [17] Kassim Ashraf A., Kumar B.V.K. Vijaya. Path Planning for Autonomous Robots Using Neural Networks // Journal of Intelligent Systems. Vol. 7 (1–2). 1997. P. 33–56.
- [18] Лебедев Д., Штайль Й. Нейросетевая модель для планирования путей автономного робота с учётом динамических изменений в среде // Материалы XIII-ой научно-технической конференции «Экстремальная робототехника». 2002.
- [19] Каляев И.А., Гайдук А.Р. Однородные нейроподобные структуры в системах выбора действий интеллектуальных роботов. М.: Янус-К, 2000.
- [20] Jarvis R.A., Byrne J.C. Robot Navigation: Touching, Seeing and Knowing // Proceedings of the 1st Australian Conference on Artificial Intelligence. 1986.
- [21] Zelinsky A. A Mobile Robot Navigation Exploration Algorithm // IEEE Transactions of Robotics and Automation. Vol. 8 (6). 1992. P. 707–717.

- [22] Chin Yew Tuck, Wang Han, Tay Leng Phuan et al. Vision Guided AGV Using Distance Transform // Proceedings of the 32nd Int. Symposium on Robotics. 2001.
- [23] Glasius R., Komoda A., Gielen S. A biologically inspired neural net for trajectory formation and obstacle avoidance // Biological Cybernetics. Vol. 74 (6). 1996. P. 511–520.