

# Динамический поиск объектов. От геометрии к графике

Е.В. Шикин, С.Б. Березин

## 1. Вступление

Несмотря на то, что проблему поиска можно рассматривать как частное проявление конфликта, постановки поисковых задач удивительно многообразны. Правда лишь немногие из них допускают подходящую для содержательного анализа формализацию. В этой работе мы остановимся на обсуждении некоторых вопросов, относящихся к поисковым задачам, в которых осуществляется динамический поиск объектов и где точечные объекты, принимающие участие в поисковом процессе, разделяются на две группы – группу ищущих и группу уклоняющихся. Задачей первой из них является обнаружение, в то время как задача второй – как можно дольше избегать обнаружения. Естественно считать, что каждая из этих групп обладает определенными ресурсами, позволяющими в той или иной степени успешно справляться с основной задачей. Сюда входят уровень информированности о противной стороне (местоположении и динамических возможностях) и условия обнаружения. Мы будем рассматривать детерминированную задачу поиска, когда в каждый момент времени ясно, произошло обнаружение уклоняющихся или не произошло.

Итак, предположим, что в некоторой плоской области (двумерный случай выбран в силу его большей наглядности) перемещаются две группы точечных объектов, интересы которых противоположны – ищущие и уклоняющиеся. Первые стремятся обнаружить, вторые – избежать обнаружения. При этом объект считается обнаруженным, если его отклонение хотя бы от одного из ищущих не превосходит заданного числа – радиуса видимости ищущего. В свою очередь, на

возможности по видимости уклоняющихся объектов никаких ограничений не предполагается. Будем считать также, что каждой из групп известны все скалярные скорости перемещения объектов, которые постоянны (такое перемещение объектов называют простым). Ищущие имеют преимущество в скорости, уклоняющиеся – в уровне информированности (радиус видимости ищущих ограничен, уклоняющемуся же всегда известно местоположение каждого из ищущих).

Сравнительно недавно начал разрабатываться подход к решению подобного рода задач, основанный на геометрических соображениях и на придании наглядности степени информированности ищущих в процессе поиска. Опишем коротко основную идею этого подхода.

С точки зрения ищущих поисковая область в каждый момент времени разделяется на две части, в одной из которых уклоняющийся заведомо отсутствует. Успешное разрешение задачи поиска и состоит в том, чтобы эта часть поисковой области, постепенно увеличиваясь, совпала со всей поисковой областью. Посмотрим, что может дать здесь геометрический подход.

Если ищущий объект покоится, круг с радиусом видимости, центр которого совпадает с ищущим, естественно считать свободным от уклоняющегося. Тем самым, в этом случае степень осведомленности ищущего о части поисковой области, свободной от уклоняющихся, описывается кругом. Она увеличивается при перемещении ищущего: вдоль его траектории (позади) образуется шлейф – множество, в которое на данный момент времени уклоняющийся никак не успевает попасть вследствие ограничения на его скорость. Этот шлейф (его называют остаточной областью) как бы бежит за ищущим, примыкая к его траектории и наглядно описывая степень информированности ищущего на данный момент. Оказывается, перемещение ищущего можно организовать столь разумно, чтобы область, свободная от уклоняющихся, увеличивалась в размерах и, если все сложится удачно, в конце концов, совпала бы со всей поисковой областью. Это означало бы успешное завершение поиска (обнаружение).

Природа множеств, свободных от уклоняющихся объектов, довольно разнообразна. Если траектория перемещения уже выбрана ищущим, то вдоль нее (спереди) также появляется изменяющееся во времени множество, свободное от уклоняющихся – упреждающая область. Следящая область, возникающая в результате объединения

остаточной и упреждающей областей, показывает степень осведомленности ищущего в процессе поиска. Эти изменяющиеся во времени множества и представляют собой основной инструментарий для решения рассматриваемых поисковых задач.

Основной вопрос состоит в том, как в зависимости от формы и размеров поисковой области, условий на скорости объектов, участвующих в поисковом процессе, и радиусов видимости, определить – возможно ли успешное разрешение задачи поиска, и если возможно, то как именно.

Разработка геометрического подхода позволила успешно решить целый ряд поисковых задач (краткий обзор результатов см. в обзоре [1]). Но вместе с тем она обозначила трудности, возникающие в случае, когда поисковая область имеет произвольную форму, а количество ищущих достаточно велико. Аналитический подбор необходимых ресурсов для ищущей группы под заданную область поиска резко усложняется. Дело в том, что такой подбор опирается на анализ выбираемого класса траекторий перемещения ищущих объектов и поэтому требует скорее интерактивного подхода, при котором просматривается несколько приемлемых вариантов. Это наблюдение естественно приводит к мысли о целесообразности использования графических возможностей современных вычислительных устройств, причем в режиме, близком к режиму реального времени. Делается это так. Поисковая область визуализируется на дисплее. Затем из геометрических соображений выбираются те или иные траектории. По ним строятся изменяющиеся во времени информационные множества, свободные от уклоняющихся объектов, и изучается их динамика. Полученные сведения позволяют находить по заданным траекториям содержательные достаточные условия на ресурсы ищущих, обеспечивающие обнаружение, исследовать возможность обнаружения уклоняющихся по предлагаемым траекториям и заданным ресурсам и др.

Разумеется, при визуализации поисковой задачи и поискового процесса возникает ряд подлежащих разрешению вопросов, связанных с описанием информационных множеств, реализацией теоретико-множественных операций и накоплением ошибок.

## 2. Основные определения

Предположим, что поиск осуществляют  $N$  объектов, перемещающихся в области поиска  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  по траекториям  $a_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $t \geq 0$ , с постоянными скалярными скоростями  $\alpha_i$ , а уклоняющийся объект перемещается в области поиска по траектории  $b(t)$  со скоростью, не превышающей по модулю постоянной  $\beta$ . Будем считать, что все скорости ищущих объектов больше  $\beta$ , а критерием обнаружения уклоняющегося объекта является его сближение хотя бы с одним из ищущих объектов на расстояние, меньшее или равное заданному (своему для каждого ищущего объекта),

$$\exists i : \|b(t) - a_i(t)\| \leq l_i.$$

Если уклоняющихся объектов несколько, то возможны разные условия успешного завершения поиска – обнаружение хотя бы одного из уклоняющихся объектов, обнаружение части уклоняющихся или обнаружение всех. В случае нескольких уклоняющихся через  $\beta$  будем обозначать максимум скоростей всех уклоняющихся.

Введем определения основных информационных множеств, возникающих в задаче поиска.

Из критерия обнаружения следует, что с каждым ищущим объектом можно связать множество, относительно которого точно известно, что уклоняющегося объекта в точках этого множества нет. Это замкнутый круг  $\overline{B(a_i(t), l_i)}$  радиуса  $l_i$  с центром в точке  $a_i(t)$ . Назовем его *кругом обнаружения*  $i$ -го объекта в момент времени  $t$  (здесь  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| < r\}$ , а запись  $\overline{M}$  означает замыкание множества  $M$ ).

**Определение 1.** Множество  $U(t)$  всех точек, в каждой из которых в момент времени  $t$  может находиться не будучи обнаруженным хотя бы один из уклоняющихся объектов, назовем *областью неопределенности*.

Обычно ищущие объекты стремятся к уменьшению области неопределенности или, что то же самое, к увеличению множества  $\Omega \setminus U(t)$ , в котором уклоняющихся объектов нет по определению. Если в некоторый момент времени  $t_0$  область неопределенности окажется полностью исчерпанной, то есть станет пустым множеством,  $U(t_0) = \emptyset$ , то

все уклоняющиеся объекты будут обнаружены до момента времени  $t_0$  включительно, и задача поиска будет гарантировано решена.

Рассмотрим объединение кругов обнаружения ищущих объектов в момент времени  $t$

$$\bigcup_{i=1}^N \overline{B(a_i(t), l_i)}. \quad (*)$$

Если в этот момент времени некоторый уклоняющийся объект находится в объединении (\*), то он обнаружен. В противном случае точно известно, что уклоняющихся объектов в объединении кругов обнаружения (\*) нет. При перемещении ищущих объектов в новые точки области поиска  $\Omega$  они получают подобную информацию о новых частях области поиска  $\Omega$ . В момент времени  $t' > t_0$  это объединение

$$\bigcup_{i=1}^N \overline{B(a_i(t'), l_i)}.$$

При выполнении соотношения

$$t' - t_0 < \frac{\min l_i}{\beta}$$

в некоторых кругах, концентричных кругам объединения (\*), уклоняющихся объектов по-прежнему не будет (уклоняющийся объект не сразу может попасть в центр круга обнаружения).

Вследствие превосходства скоростей ищущих объектов над скоростями уклоняющихся, вдоль пройденных ищущими объектами траекторий возникает шлейф из точек, в которых уклоняющихся объектов нет. Будем называть такие информационные множества *остаточными*.

Рассмотрим в момент времени  $t_0$  участки траекторий ищущих объектов с номерами  $i_1, \dots, i_m$  за временной промежуток  $[t_0 - \Delta, t_0]$ ,  $0 \leq \Delta \leq t_0$ , и предположим, что в этом временном промежутке ни один из уклоняющихся объектов обнаружен не был.

**Определение 2.** *Общей остаточной областью  $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0]$  на момент времени  $t_0$  будем называть множество всех точек, заведомо свободных от уклоняющихся объектов независимо от траекторий ищущих объектов вне промежутка  $[t_0 - \Delta, t_0]$ .*

Информация о точках так называемых *упреждающих* множеств носит предсказательный характер и зависит от будущих траекторий ищущих: обнаружение уклоняющегося объекта в упреждающем множестве гарантируется при условии, что ищущие объекты будут двигаться по траекториям, для которых эти упреждающие множества были построены. Упреждающие множества (также как и остаточные) возникают благодаря превосходству ищущих объектов в скорости: уклоняющийся объект не успевает покинуть окрестности будущих траекторий ищущих.

Зафиксируем в момент времени  $t_0$  участки траекторий ищущих объектов с номерами  $i_1, \dots, i_m$ , которые будут пройдены в будущем за промежуток времени  $[t_0, t_0 + \delta]$ ,  $\delta \geq 0$ .

**Определение 3.** *Общей упреждающей областью*  $P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]$  на момент времени  $t_0$  будем называть множество всех точек, нахождение в которых любого из уклоняющихся объектов гарантирует его обнаружение хотя бы одним из ищущих объектов с номерами  $i_1, \dots, i_m$  в некоторый момент времени из промежутка  $[t_0, t_0 + \delta]$  независимо от траекторий ищущих объектов вне его.

**Определение 4.** *Общей следящей областью*  $V_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0 + \delta]$  назовем объединение  $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0] \cup P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]$ .

Некоторое представление о форме упреждающей и остаточной областей дает следующее тривиальное утверждение.

**Лемма 1.** *Для упреждающей и остаточной областей верны следующие соотношения*

$$\bigcup_{i \in i_1, \dots, i_m} \bigcup_{t \in [t_0 - \Delta, t_0]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t_0 - t))} \subset Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0], \quad (1)$$

$$\bigcup_{i \in i_1, \dots, i_m} \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t - t_0))} \subset P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]. \quad (2)$$

В целом ряде случаев эти включения оказываются строгими, то есть остаточная или упреждающая области могут содержать больше точек, чем объединения в левых частях соотношений (1) и (2). Это происходит за счет взаимодействия ищущих объектов с границей области поиска и друг с другом.

Например, если в некоторый момент времени центр круга обнаружения из объединения (\*) расположен вблизи границы области

поиска, то с течением времени этот круг обнаружения будет стягиваться неравномерно с разных сторон, так как со стороны границы уклоняющийся объект двигаться не может (см. рис. 1 и 2).

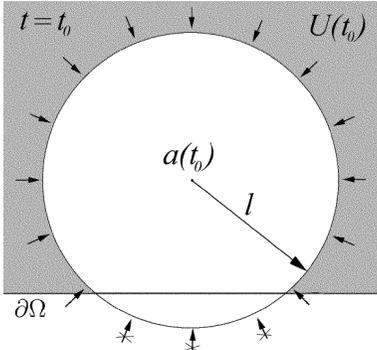


Рис. 1.

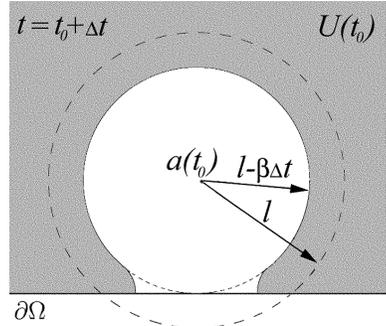


Рис. 2.

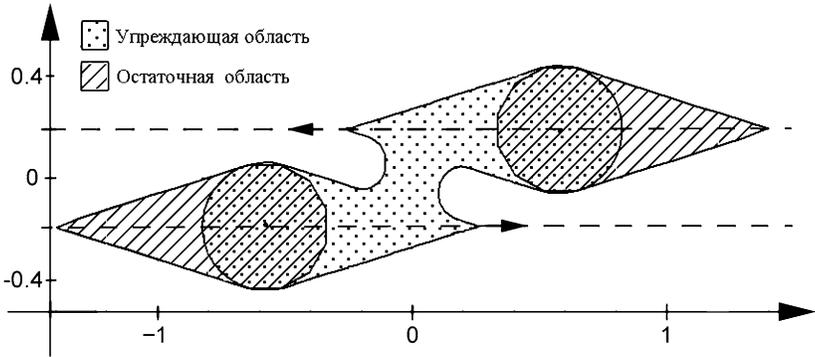


Рис. 3. Взаимодействие упреждающих областей ищущих объектов.

На рис. 1 изображен круг обнаружения ищущего объекта, расстояние от которого до границы  $\partial\Omega$  меньше радиуса обнаружения. Темным цветом обозначена область неопределенности, стрелки отмечают возможные направления движения уклоняющегося объекта. Перечеркнутые стрелки обозначают направления, по которым уклоняющийся объект двигаться не может. На рис. 2 показано уменьшение круга обнаружения за время  $\Delta t$ . Вблизи границы области поиска

стягивание области, свободной от уклоняющихся объектов, происходит медленнее.

**Замечание.** На рис. 2 отражено только возможное движение уклоняющихся объектов и влияние границы области поиска. Действия ищущих объектов и происходящие при этом изменения информационных множеств не учтены.

Аналогичная ситуация возможна при расположении  $i$ -го и  $j$ -го ищущих объектов на расстоянии, меньшем  $l_i + l_j$ . И в этом случае стягивание области, свободной от уклоняющихся объектов, может происходить с разной скоростью на разных участках ее границы.

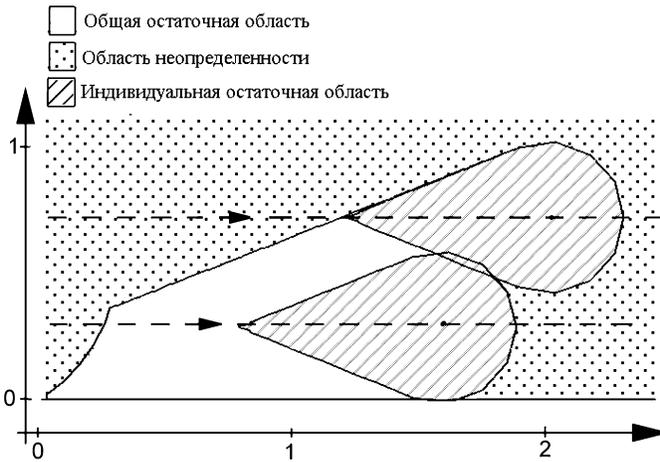


Рис. 4. Взаимодействие остаточных областей и границы.

Построение информационных множеств для одного ищущего объекта производится достаточно просто и может быть выполнено аналитически. При увеличении количества ищущих объектов сложность задачи построения остаточных и упреждающих множеств резко возрастает вследствие необходимости учета влияния границы поиска и взаимодействия ищущих объектов между собой. В этих случаях граница информационного множества может иметь достаточно сложную структуру (см. рис. 3 и 4).

Другие примеры взаимодействия нескольких ищущих объектов и возникающих при этом информационных множеств приведены в следующем разделе.

### 3. Поиск с участием нескольких ищущих объектов

#### 3.1. Уменьшение времени поиска в прямоугольнике

##### Один ищущий объект

В работе [2] была предложена стратегия поиска в прямоугольнике одним ищущим объектом. Приведем некоторые результаты из этой работы, полезные для дальнейшего.

Пусть поиск в прямоугольнике ширины  $D$  и высоты  $H$  ( $D \leq H$ ),

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y \leq H\},$$

проводит один ищущий объект, скорость которого равна  $\alpha$ , а радиус круга обнаружения –  $l$ . Скорость уклоняющегося объекта равна  $\beta < \alpha$ .

При выполнении достаточного условия

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[ \left(\frac{D}{l}\right)^2 - 4 \right] < 1$$

поисковая задача в прямоугольнике  $R$  разрешима. Траектория, приводящая к обнаружению ищущего объекта, представляет собой ломаную  $Z_0 Z_1 \dots Z_N$ , где

$$\begin{aligned} Z_{2k} &= \left( d, 2k(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right), k = 0, 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor, \\ Z_{2k+1} &= \left( D - d, (2k + 1)(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right), k = 0, 1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor, \\ \theta &= \arcsin \left( -\beta/\alpha + \eta\sqrt{1 + \eta^2 - \beta^2/\alpha^2} \right) / (1 + \eta^2), \\ \eta &= 1/\sqrt{(D/l)^2 - 4}, d = 2l^2/D. \end{aligned}$$

Здесь и далее через  $\lceil x \rceil$  обозначено наименьшее целое число, большее или равное  $x$ , а через  $\lfloor x \rfloor$  – наибольшее целое, не превосходящее  $x$ .

Движение по ломаной  $Z_0 Z_1 \dots Z_N$  способствует *вытеснению* уклоняющегося объекта: если в момент времени, когда ищущий находился в точке  $Z_{k-1}$ , уклоняющийся оказался не ниже точки  $Z_{k-1}$ , то к

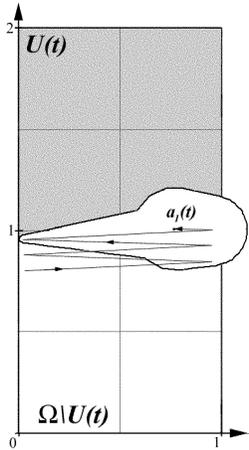


Рис. 5. Поиск в прямоугольнике одним ищущим объектом.

моменту времени, когда ищущий окажется в точке  $Z_k$ , уклоняющийся будет вынужден переместиться в точку, расположенную не ниже уровня точки  $Z_k$  (иначе он будет обнаружен).

Так как высота прямоугольника равна  $H$ , то число звеньев ломаной можно взять равным

$$N = \left\lceil \frac{H \operatorname{ctg} \theta}{(D - 2d)} \right\rceil.$$

Чтобы последнее звено ломаной не выходило за пределы прямоугольника, координату  $y$  точки  $Z_N$  можно положить равной  $H$ . На прохождение одного звена ломаной ищущий объект затратит время, равное

$$T_0 = \frac{D - 2d}{\alpha \cos \theta}.$$

Вся траектория будет пройдена, и процесс поиска завершится за время, не большее

$$T_1 = NT_0 = \frac{[H \operatorname{ctg}(\theta)/(D - 2d)](D - 2d)}{\alpha \cos \theta} \leq \frac{H}{\alpha \sin \theta} + T_0.$$

Обозначим через  $R_k$  часть прямоугольника  $R$ , лежащую ниже точки  $Z_k$ ,

$$R_k = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y < 2k(D - 2d)\operatorname{tg}\theta\},$$

а через  $t_k$  — моменты времени, в которые ищущий объект находился в точках  $Z_k$ . Условие *вытеснения* в терминах информационных множеств можно сформулировать так: если в момент времени  $t_{k-1}$  область неопределенности  $U(t_{k-1})$  не пересекалась с  $R_{k-1}$ ,  $U(t_{k-1}) \cap R_{k-1} = \emptyset$ , то в момент времени  $t_k$  будет выполнено равенство  $U(t_k) \cap R_k = \emptyset$ . Другими словами, в каждый момент времени  $t_k$  все точки, лежащие ниже  $Z_k$ , будут принадлежать свободной от уклоняющихся объектов области  $R_k \subset \Omega \setminus U(t_k)$ . Согласно определению 2, в каждый момент времени  $t_k$  будет выполнено включение  $R_k \subset Q_1[0, t_k]$ . Хотя о непрерывном росте остаточной области  $Q_1[0, t]$  говорить нельзя, тем не менее, в каждый момент времени  $t_k$  остаточная область  $Q_1[0, t_k]$  включает в себя остаточную область  $Q_1[0, t_{k-1}]$  для момента времени  $t_{k-1}$ .

### Два ищущих объекта

Покажем, как увеличение количества ищущих объектов позволяет значительно уменьшить время поиска.

Пусть поисковая область представляет собой полосу шириной  $D$ ,

$$R' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D\},$$

в которой перемещаются два ищущих объекта с одинаковыми скоростями и радиусами кругов обнаружения. В качестве траектории первого ищущего объекта возьмем ломаную  $Z'_0 Z'_1 \dots Z'_N$ .

$$Z'_{2k} = \left( d, H/2 + 2k(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right),$$

$$Z'_{2k+1} = \left( D - d, H/2 + (2k + 1)(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right), k = 0, 1, \dots$$

Что касается второго ищущего объекта, то он будет двигаться по ломаной  $Z''_0 Z''_1 \dots Z''_N$ , которая симметрична  $Z_0 Z_1 \dots Z_N$  относительно прямой  $y = H/2$ :

$$Z''_{2k} = \left( d, H/2 - 2k(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right),$$

$$Z''_{2k+1} = \left( D - d, H/2 - (2k + 1)(D - 2d)\operatorname{tg}\theta \right), k = 0, 1, \dots$$

Нетрудно показать, что к моменту времени  $t_1$ , когда ищущие объекты достигнут точек  $Z'_1$  и  $Z''_1$ , уклоняющийся объект будет вынужден подняться выше точки  $Z'_1$  или переместиться ниже точки  $Z''_1$  (иначе он будет обнаружен). В самом деле, если в начальный момент времени уклоняющийся объект находился выше прямой  $y = H/2$ , то во избежание обнаружения он к моменту времени  $t_1$  должен подняться выше точки  $Z'_1$ . Если же в начальный момент времени уклоняющийся объект находился ниже прямой  $y = H/2$ , то он должен к моменту времени  $t_1$  оказаться ниже точки  $Z''_1$ .

Далее ищущие объекты вытесняют уклоняющийся объект аналогично тому, как это делал один ищущий объект. Только область, свободная от уклоняющегося объекта, будет расширяться сразу в двух направлениях и расти вдвое быстрее, чем в случае одного ищущего объекта.

Рассмотрим часть полосы  $R'$ , совпадающую с прямоугольником  $R$ . Можно считать, что первый ищущий объект осуществляет поиск в прямоугольнике высотой  $H/2$

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, H/2 \leq y \leq H\}.$$

Время, затраченное им на поиск, будет не больше

$$T_2 = \frac{H}{2\alpha \sin \theta} + T_0.$$

За это же время второй ищущий объект вытеснит уклоняющегося из прямоугольника такой же высоты

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y \leq H/2\}.$$

Тем самым пара ищущих завершит поиск в прямоугольнике  $R$  высотой  $H$  за время, не превышающее

$$T_2 = \frac{H}{2\alpha \sin \theta} + T_0 = \frac{T_1}{2} + T_0.$$

Для достаточно больших  $H$  время, затраченное на поиск в прямоугольнике  $R$  двумя объектами, оказывается почти в два раза меньше времени, за которое завершит поиск один объект.

## 2m ищущих объектов

Пусть в прямоугольнике  $R$  шириной  $D$  и высотой  $H$  ведут поиск  $2m, m > 1$ , ищущих объектов. В этом случае время поиска можно сократить почти в  $2m$  раз по сравнению с временем, затраченным одним ищущим объектов. Покажем, как это можно сделать.

Разобьем область поиска вдоль стороны длиной  $H$  на  $m$  непересекающихся прямоугольников  $R_i$  шириной  $D$  и высотой  $H/m$ . Ищущие объекты расположим так, чтобы поиск в произвольном прямоугольнике  $R_i$  пара объектов с номерами  $2n - 1$  и  $2n, n = 1, \dots, m$ , могла осуществить в полном соответствии со стратегией, указанной в предыдущем пункте. Тогда за время, не превышающее

$$T_{2m} = \frac{H}{2m\alpha \sin \theta} + T_0 = \frac{T}{2m} + T_0,$$

уклоняющийся объект будет вытеснен из прямоугольника  $R_i$ . Но так как

$$R = \bigcup_{i=1}^m R_i,$$

то с исчерпанием всех прямоугольников  $R_i$  одновременно произойдет полное исчерпание области поиска, и уклоняющийся объект будет обнаружен.

Надо заметить, что если число ищущих объектов  $2m \geq \lceil D/(2l) \rceil$ , то круги обнаружения ищущих объектов можно расположить на стороне прямоугольника шириной  $D$  так, что они будут перекрывать всю область поиска по горизонтали. Стратегия поиска в этом случае становится тривиальной - при одновременном параллельном перемещении ищущих объектов вдоль другой стороны прямоугольника (шириной  $H$ ) происходит исчерпание области поиска. Полное исчерпание области поиска в этом случае произойдет за время, не большее  $H/\alpha$ .

На рис. 6-8 показаны информационные множества, возникающие в процессе поиска в прямоугольнике с участием четырех ищущих объектов. Темным цветом обозначена область неопределенности  $U(t)$ , белым - область  $R \setminus U(t)$ , свободная от уклоняющихся объектов.

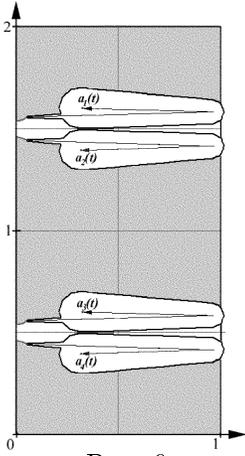


Рис. 6.

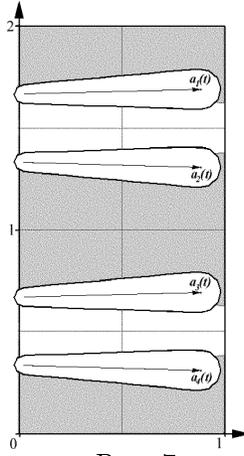
Момент  $t > 0$ 

Рис. 7.

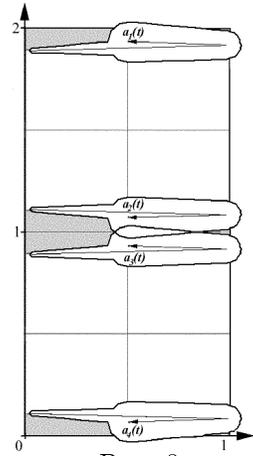
Момент  $t' > t$ 

Рис. 8.

Момент  $t'' > t'$ 

### 3.2. Многосвязная упреждающая область

Приведем пример взаимодействия нескольких ищущих объектов, при котором число компонент связности упреждающей области оказывается больше числа ищущих объектов. Подробно такое взаимодействие исследовано в работе [3].

В поиске участвуют  $n > 2$  ищущих объектов, обладающих одинаковыми скоростями  $\alpha$  и радиусами кругов обнаружения  $l$ . Предположим, что в начальный момент ищущие объекты равномерно распределены по окружности достаточно большого радиуса  $R_0$  с центром в точке  $O$ , а затем начинают синхронно перемещаться по прямолинейным траекториям к центру окружности.

В момент времени

$$t_1 = \frac{R_0 - l/\sin(\pi/n)}{\alpha}$$

круги обнаружения ищущих объектов одновременно коснутся друг друга. Но задолго до этого, в некоторый момент времени  $t^* < t_1$ , вокруг точки  $O$  возникнет и будет расти область, при нахождении в которой уклоняющийся объект не успеет избежать обнаружения. Согласно определению 3, точки этой области будут принадлежать общей упреждающей области  $P_{i_1, \dots, i_m}[t, R_0/l], t \geq t^*$ .

При известном соотношении между параметрами задачи  $(R_0, \alpha, \beta, l, n)$  в момент времени  $t^*$  уклонение еще возможно из сужающегося кольца с центром в точке  $O$ , отделяющего компоненты связности упреждающей области, соответствующие ищущим объектам, от компоненты связности, содержащей точку  $O$ .

На рис. 9 показан результат численных расчетов упреждающей области при  $n = 6; l = 0, 2; \alpha = 0, 5; \beta = 0, 15$ .

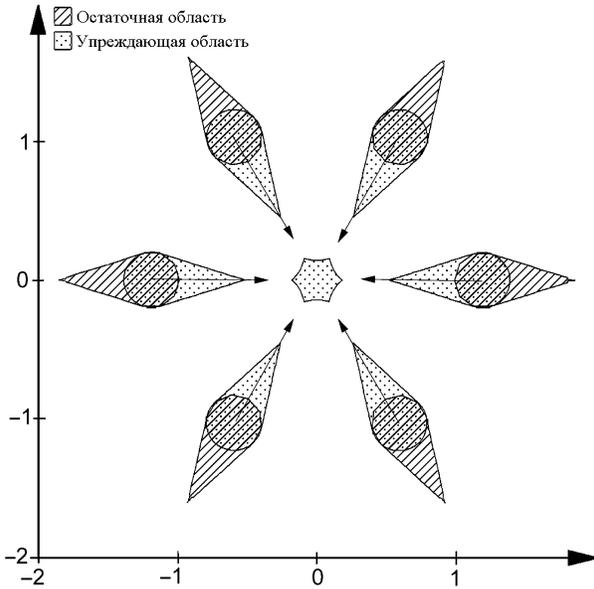


Рис. 9. Упреждающая область с  $(n + 1)$  компонентой связности ( $n = 6$ ).

#### 4. Аппроксимации информационных множеств

Рассмотренные в предыдущих разделах примеры взаимодействия нескольких ищущих объектов показывают, что упреждающая и остаточная области могут иметь весьма сложную структуру, поддающуюся аналитическому описанию далеко не всегда. К сожалению,

определения 1,2 и 3 не конструктивны и не указывают достаточно эффективного способа построения информационных множеств.

В работе [4] были приведены и обоснованы формулы, позволяющие строить аппроксимацию области неопределенности по начальной области неопределенности  $U(0)$  и заданным на промежутке  $[0, t_0]$  траекториям за конечное число шагов.

Разобьем временной промежуток  $[0, t_0]$  на  $N$  частей  $0 = t_N < t_{N-1} < \dots < t_0$ . Положим  $U^N = U(0)$  и будем считать, что аппроксимация области неопределенности  $U^k$  в момент времени  $t_k$  уже построена. Аппроксимация области неопределенности в момент времени  $t_{k-1}$  рассчитывается исходя из аппроксимации области неопределенности в момент времени  $t_k$ .

Назовем  $\Delta$ -расширением множества  $M$  объединение множества  $M$  и полосы шириной  $2\Delta \geq 0$ , эквидистантной границе  $M$ . Операцию  $\Delta$ -расширения множества  $M$  можно записать так

$$G(M, \Delta) = \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, \Delta)}.$$

Смоделируем движение уклоняющихся объектов на временном промежутке  $[t_k, t_{k-1}]$ , считая, что они находятся вблизи границы области неопределенности  $U(t_k)$ . За время  $t_{k-1} - t_k$  уклоняющиеся объекты успеют удалиться от границы области неопределенности  $U(t_k)$  на расстояние, не превосходящее  $\beta(t_{k-1} - t_k)$ . Следовательно, к аппроксимации области неопределенности  $U^k$  можно применить операцию  $\Delta$ -расширения, где  $\Delta = \beta(t_{k-1} - t_k)$ ,

$$U^{l(k-1)} = G(U^k, \beta(t_{k-1} - t_k)).$$

Но к моменту времени  $t_{k-1}$  ищущие объекты перемещаются по своим траекториям в точки  $a_i(t_{k-1})$  и присоединяют часть области неопределенности к области, свободной от уклоняющихся объектов. Учтем перемещение ищущих объектов, вычитая из выросшей области неопределенности  $U^{l(k-1)}$  множества  $V_i^{k-1}$ ,

$$U^{ll(k-1)} = U^{l(k-1)} \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i^{k-1}.$$

Здесь через  $V_i^{k-1}$  обозначен круг обнаружения  $i$ -го ищущего объекта  $\overline{B(a_i(t_{k-1}), l_i)}$ . Но в качестве  $V_i^{k-1}$  можно взять любое легко вычислимое подмножество индивидуальной остаточной области  $i$ -го ищущего объекта  $Q_i[t_k, t_{k-1}]$ . Например, это может быть объединение

$$V_i^{k-1} = \bigcup_{t \in [t_k, t_{k-1}]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t_{k-1} - t))}.$$

Осталось учесть, что уклоняющиеся и ищущие объекты перемещаются только в области поиска:

$$U^{k-1} = U^{n(k-1)} \cap \Omega.$$

Объединяя описанные выше шаги, получаем рекуррентные формулы для аппроксимации области неопределенности

$$U^N = U(0), \quad (3)$$

$$U^{k-1} = \left( G(U^k, \beta(t_{k-1} - t_k)) \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i^{k-1} \right) \cap \Omega, \quad k = N, N-1, \dots, 1. \quad (4)$$

Формулы (3)-(4) позволяют свести построение аппроксимации области неопределенности в некоторый момент времени к построению простых множеств  $V_i^k$ . Соотношение между теоретической областью неопределенности и построенной аппроксимацией этой области описывается теоремой.

**Теорема 1.** *Аппроксимация  $U^0$ , построенная согласно формулам (3)-(4), содержит в себе теоретическую область неопределенности  $U(t_0)$ .*

Иными словами, построенная аппроксимация области неопределенности содержит все возможные точки расположения уклоняющегося объекта.

Вычисление аппроксимаций для общих остаточной и упреждающей областей можно свести к вычислению множеств  $V_i^k$  аналогичным образом. Вывод соответствующих формул и доказательство некоторых свойств полученных аппроксимаций приведены в работе [3]. Приведем основные результаты.

1. Рассмотрим разбиение промежутка  $[t_0 - \Delta, t_0]$  на  $N > 0$  частей:  $t_0 - \Delta = t_N < t_{N-1} < \dots < t_0$ . Тогда множество  $Q^0$ , аппроксимирующее общую остаточную область  $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0]$ , строится при помощи следующих формул

$$Q^N = \Omega \bigcap_{j=1}^m V_{i_j}^N, \quad (5)$$

$$Q^{k-1} = \Omega \bigcap \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus Q^k, \beta(t_{k-1} - t_k)) \cup \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^{k-1}, k = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Ответ на вопрос о том, как соотносятся полученная аппроксимация и теоретическая остаточная область, дает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Общая остаточная область, построенная согласно формулам (5)–(6), содержится в теоретической остаточной области,*

$$Q^0 \subset Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0].$$

Иными словами, в точках аппроксимации остаточной области упреждающего объекта гарантированно нет.

2. Разобьем отрезок  $[t_0, t_0 + \delta]$  на  $N > 0$  частей,  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + \delta$ , и построим аналогичным образом аппроксимацию упреждающей области  $P_0$ :

$$P^N = \Omega \bigcap_{j=1}^m V_{i_j}^N, \quad (7)$$

$$P^{k-1} = \Omega \bigcap \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus P^k, \beta(t_k - t_{k-1})) \cup \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^{k-1}, k = 1, \dots, N. \quad (8)$$

*Замечание.* Структуры формул (5)–(6) и (7)–(8) отличаются лишь порядком нумерации точек разбиения соответствующего отрезка, что отражает определенную симметрию остаточной и упреждающей областей.

Для аппроксимации упреждающей области также справедлива теорема о вложении.

**Теорема 3.** *Общая упреждающая область, построенная согласно формулам (7)-(8), содержится в теоретической упреждающей области,*

$$P^0 \subset P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta].$$

Иными словами, если объект находится в точках, принадлежащих аппроксимации упреждающей области, то он будет гарантированно обнаружен в течение заданного времени.

Формулы (3)-(4), (5)-(6) и (7)-(8) хорошо подходят для построения информационных множеств по заданным траекториям ищущих объектов на компьютере. Такая задача может быть полезна, например, в следующих приложениях.

1. При визуализации поискового процесса по заданным траекториям для предварительного анализа поисковой задачи или для проверки траекторий, полученных из некоторых иных соображений. Особенно полезным может оказаться вариант программного обеспечения, допускающего интерактивное задание и изменение траекторий.

2. Теоремы вложения из раздела 2 утверждают, что если траектории ищущих объектов решают задачу поиска на аппроксимациях информационных множеств, то теоретическая задача поиска также будет решена. Этот факт позволяет создать программу, осуществляющую эвристический перебор параметров задачи (например,  $\alpha_i$  и  $l_i$ ) для заданных траекторий и указывающую достаточные для успешного поиска ресурсы.

## 5. Компьютерная реализация

Применение компьютера для построения информационных множеств согласно формулам (3)-(4), (5)-(6) и (7)-(8) возможно только при наличии компьютерной реализации теоретико-множественных операций и операции  $\Delta$ -расширения над элементами из некоторого класса  $\Sigma$  компьютерно-представимых множеств.

Один из возможных вариантов компьютерной реализации теоретико-множественных операций приведен в работе [4]. Алгоритмы из этой работы и формулы (3)-(4), (5)-(6) и (7)-(8) реализованы в программе, позволяющей по заданным траекториям строить динами-

ческие изображения информационных множеств, отражающие ход поискового процесса. При помощи этой программы была получена часть иллюстраций к данной статье. Ниже приведены основные идеи одного из подходов к компьютерному представлению множеств, примененному в работах [4],[5].

### 5.1. Граничное представление множеств на плоскости

Рассмотрим геометрическую реализацию планарного графа  $G = \langle E, V \rangle$ , где  $E$  - конечное множество ребер, а  $V$  - конечное множество вершин. Граф  $G$  может быть многосвязным. Пусть каждой вершине графа  $G$  инцидентны два или более ребер. Тогда ребра геометрической реализации  $G$  разбивают плоскость на конечное число областей  $F_0, \dots, F_n$  без разрезов, только одна из которых (обозначим ее  $F_0$ ) неограничена. Назовем эти области *гранями* геометрической реализации  $G$ . Неограниченную область будем называть *внешней* гранью.

Пусть каждой вершине графа  $G$  инцидентно четное число ребер. Тогда из работы [5] следует, что можно единственным способом определить набор  $I_1 = \{0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$  такой, что граница множества

$$S_1(G) = \bigcup_{i \in I_1} \text{int } F_i$$

совпадает с геометрической реализацией графа  $G$ . Множество  $S_1(G)$  открыто, так как является объединением конечного числа открытых множеств, и неограничено, так как содержит все внутренние точки неограниченной грани  $F_0$ . Здесь запись  $\text{int } A$  обозначает множество всех внутренних точек множества  $A$ .

Из внутренних точек граней, не вошедших в множество  $S_1(G)$ , составим множество

$$S_2(G) = \bigcup_{i \in I_2} \text{int } F_i, \text{ где } I_2 = \{0, \dots, n\} \setminus I_1.$$

Множество  $S_2(G)$  открыто и ограничено, его граница  $S_2(G)$  также совпадает с геометрической реализацией графа  $G$ .

Таким образом геометрическая реализация  $G$  любого планарного графа, в котором каждой вершине инцидентно четное число ребер, оказывается границей одновременно двух открытых множеств  $S_1(G)$  и  $S_2(G)$ , первое из которых неограничено, а второе - ограничено.

Ребрам графа  $G$  можно единственным способом приписать направление так, чтобы был возможен обход против часовой стрелки граней, принадлежащих множеству  $S_1(G)$ . При этом обход всех граней, не принадлежащих  $S_1(G)$ , будет осуществляться по часовой стрелке, а для каждой вершины количество входящих и выходящих ребер будет совпадать. Будем считать, что в этом случае геометрическая реализация ориентированного графа  $G$  определяет множество  $S(G) = S_1(G)$ .

Изменим направление всех ребер графа  $G$  на противоположное. тогда против часовой стрелки будет производиться обход граней, входящих в состав  $S_2(G)$ . В этом случае положим  $S(G) = S_2(G)$ . Следовательно, существуют два взаимно-противоположных варианта выбора направления ребер графа  $G$ , определяющих множества  $S_1(G)$  и  $S_2(G)$ .

Информация о направлении ребер позволяет не только однозначно определять соответствующее геометрической реализации ориентированного графа  $G$  множество  $S(G)$ , но и принимать решение о принадлежности точки множеству исходя из *локальной* информации, так как в некоторой окрестности каждого ребра справа (при движении по направлению ребра) будут лежать точки не принадлежащие множеству, а слева – принадлежащие.

В этом случае, по границе множества  $S(G)$ , заданной как геометрическая реализация  $G$  некоторого графа, можно определить, принадлежит или нет множеству произвольно выбранная точка, то есть однозначно определить множество  $S(G)$ . В компьютерной реализации множество  $S(G)$  определяется координатами вершин геометрической реализации графа  $G$  и отрезками кривых, задающих ребра  $G$ . Такой подход к описанию множеств называется *граничным представлением* множеств (*boundary representation* или *b-rep*). Теоретические аспекты граничного представления множеств и один из вариантов реализации теоретико-множественных операций над некоторым классом компьютерно-представимых множеств подробно рассмотрены в работе [5].

## 5.2. Теоретико-множественные операции

Обозначим через  $L$  класс кривых, отрезки которых соответствуют ребрам графа при построении его геометрической реализации. Например, класс  $L$  может состоять из отрезков прямых и дуг окружностей.

В класс  $\Sigma(L)$  поместим множества, определяемые всевозможными геометрическими реализациями планарных графов с четным числом дуг в каждой вершине и ориентацией ребер, соответствующей одному из двух приведенных выше вариантов.

Введем над множествами из  $\Sigma(L)$  регуляризованные теоретико-множественные операции объединения, пересечения и дополнения:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \setminus^* A &= \text{int} (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}), \\ A \cap^* B &= \text{int} (\bar{A} \cap \bar{B}), \\ A \setminus^* B &= \text{int} (\bar{A} \cap \bar{B}).\end{aligned}$$

**Замечание.** Регуляризованные теоретико-множественные операции выбраны для построения аппроксимаций информационных множеств на компьютере из следующих соображений. Во первых, использование регуляризованных теоретико-множественных операций позволяет избежать появления множеств, содержащих разрезы или изолированные точки, обеспечивая тем самым замкнутость класса  $\Sigma(L)$  относительно операций пересечения, объединения и дополнения. Во вторых, в большинстве случаев результат применения регуляризованных теоретико-множественных операций совпадает с результатом применения их классических аналогов. Можно доказать, что регуляризованные операции совпадают с классическими на множествах из класса  $\Sigma(L)$ , для которых результат применения классических теоретико-множественных операций принадлежит классу  $\Sigma(L)$ .

Рассмотрим операцию регуляризованного дополнения множества  $S$

$$\mathbb{R}^2 \setminus^* S = \text{int} (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}).$$

**Лемма 2.** Пусть множество  $S(G) \in \Sigma(L)$  определяется геометрической реализацией графа  $G$ . Тогда регуляризованное дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus^* S(G)$  определяется геометрической реализацией, полученной из

$G$  изменением направления всех ребер. При этом регуляризованное дополнение также входит в класс множеств  $\Sigma(L)$ .

Рассмотрим  $N$  множеств  $S_1 = S(G_1), \dots, S_N = S(G_N)$  из класса  $\Sigma(L)$ , границы которых определяют геометрические реализации графов  $G_1, \dots, G_N$ . Регуляризованное объединение

$$S_0 = \text{int} \left( \bigcup_{i=1}^N \bar{S}_i \right)$$

строится в два этапа. На первом этапе формируется геометрическая реализация некоторого графа  $G_0$ , которая является *объединением* геометрических реализаций  $G_1, \dots, G_N$ . Вершинами графа  $G_0$  являются точки попарного пересечения ребер геометрических реализаций  $G_1, \dots, G_N$ . Ребрам графа  $G_0$  соответствуют отрезки, на которые ребра исходных геометрических реализаций разбиваются точками пересечения. Если два или более ребер  $G_1, \dots, G_N$  совпадают на некотором отрезке, то все они включаются в множество ребер графа  $G_0$ .

Результатом первого этапа является реализация на плоскости ориентированного графа  $G_0$ , каждой вершине которого инцидентно четное число ребер, причем для каждой вершины количества входящих и выходящих ребер совпадают. Отрезки кривых, соответствующие ребрам  $G_0$ , могут пересекаться только в концевых точках или совпадать.

**Лемма 3.** *Регуляризованное объединение  $S_0$  принадлежит  $\Sigma(L)$ , при этом множества вершин и ребер геометрической реализации графа, определяющей  $S_0$ , являются подмножествами множеств вершин и ребер графа  $G_0$ .*

Тем самым, для получения геометрической реализации, определяющей регуляризованное объединение  $S_0$ , необходимо удалить из графа  $G_0$  ребра и вершины, не входящие в состав границы множества  $S_0$ . В этом заключается второй этап построения регуляризованного объединения.

Регуляризованное пересечение  $A \cap^* B = \text{int} (\bar{A} \cap \bar{B})$  может быть вычислено как  $\mathbb{R}^2 \setminus^* ((\mathbb{R}^2 \setminus^* A) \cup^* (\mathbb{R}^2 \setminus^* B))$ .

**Лемма 4.** *Регуляризованное пересечение  $A \cap^* B = \text{int}(\bar{A} \cap \bar{B})$  входит в класс множеств  $\Sigma(L)$ .*

Кроме регуляризованных теоретико-множественных операций для реализации формул (3)-(4), (5)-(6) и (7)-(8) необходимо уметь строить  $\Delta$ -расширение множества  $M$

$$G(M, \Delta) = \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, \Delta)}.$$

Для того чтобы операция  $\Delta$ -расширения не выводила из класса  $\Sigma(L)$ , введем операцию регуляризованного  $\Delta$ -расширения для множеств из  $\Sigma(L)$

$$G^*(M, \Delta) = \text{int } G(\bar{M}, \Delta).$$

Ее можно записать в виде регуляризованного объединения множества  $S$  с  $\Delta$ -расширением его границы  $\partial S$ ,

$$G^*(M, \Delta) = \text{int} \left( \bar{M} \cup \bigcup_{x \in \partial M} \overline{B(x, \Delta)} \right).$$

Для построения регуляризованного  $\Delta$ -расширения границы множества достаточно построить регуляризованное объединение регуляризованных  $\Delta$ -расширений всех ребер графа, определяющего границу. Желательно, чтобы класс кривых  $L$  допускал построение границы  $\Delta$ -расширения отрезка кривой из этого класса. На практике удобными для реализации выглядят следующие два класса кривых  $L$ .

1. В класс кривых  $L$  включаются только отрезки прямых. Тогда граница  $\Delta$ -расширения состоит из отрезков прямых и дуг окружностей. Дуги окружностей приходится аппроксимировать ломаными. Этот подход был применен в статье [4]. К его достоинствам можно отнести легкость вычисления пересечения ребер, однако применение операции  $\Delta$ -расширения значительно увеличивает количество ребер в границе множества, так как одну дугу окружности приходится аппроксимировать большим числом отрезков прямой.

2. В класс допустимых кривых  $L$  входят отрезки прямых и дуги окружностей. Тогда граница  $\Delta$ -расширения любого отрезка кривой

из класса  $L$  представима кривыми из этого же класса. Но вычисление пересечения ребер графа и построение результатов теоретико-множественных операции оказываются более сложными, чем в предыдущем случае.

### 5.3. Ошибки округления

Рекуррентная природа формул (3)-(4), (5)-(6) и (7)-(8) требует от алгоритмов работы с компьютерным представлением множеств устойчивости к погрешностям округления, вносимыми компьютерной реализацией работы с действительными числами.

При реализации теоретико-множественных операций объединение геометрических реализаций графов является операцией, в наибольшей степени подверженной влиянию ошибок округления. Ошибки, вносимые арифметикой с плавающей точкой, невелики, но если две вершины графа достаточно близки, то при определении пересечения ребер, инцидентных этим вершинам, возможно нарушение *логической структуры* данных. Например, количество ребер ориентированного графа, входящих в одну вершину, и количество ребер, выходящих из нее, могут оказаться разными.

Вопросам обработки ошибок округления уделяется достаточно много внимания в работах, посвященных системам автоматизированного проектирования (CAD). Для учета ошибок округления можно заменять арифметику с плавающей точкой на арифметику рациональных чисел с произвольными длинами числителя и знаменателя. Однако в этом случае уменьшается эффективность вычислений, и, что более серьезно, невозможно работать с кривыми порядка выше первого.

### Кластеризация вершин

Учитывая, что большое число ошибок округления вносится близкорасположенными вершинами, при объединении геометрических реализаций графов

$$G_1 = \langle E^1, V^1 \rangle, \dots, G_N = \langle E^N, V^N \rangle$$

предлагается применять *кластеризацию* вершин. При попарном пересечении всех ребер геометрических реализаций строится множество точек пересечения

$$V = \{V_m\}, V^1 \subset V, \dots, V^N \subset V,$$

исходя из которого строятся множества близкорасположенных вершин

$$W_n = \left\{ V_i \in V \mid \forall V_j \in W_n \|V_i - V_j\| \leq \delta \right\}$$

для достаточно маленького  $\delta$ .

Если в множество  $W_n$  входит всего одна вершина, то никакой дополнительной обработки не требуется. Если же в  $W_n$  входит несколько элементов, то возможны два подхода.

1. Для ребер, инцидентных вершинам из  $W_j$ , используются алгоритмы обработки совокупности ребер, а не попарного пересечения. Примеры таких алгоритмов для отрезков прямых даны в работе [6].

2. Путем деформации ребер геометрической реализации графа все вершины из  $W_j$  сводятся в одну. Число входящих и выходящих ребер, инцидентных новой вершине, будет равно сумме числа входящих и выходящих ребер для вершин из  $W_j$ . Естественно, что такое изменение графа возможно только при условии, что деформация ребер не выведет из класса кривых  $L$  и не приведет к появлению новых вершин в геометрической реализации графа.

### Упрощение границы множества

Другим источником ошибок округления являются ребра геометрической реализации графа, характерные размеры которых много меньше диаметра самого графа. Отрезки кривых, соответствующие таким ребрам, не несут почти никакой информации о границе. Для удаления подобных отрезков, то есть для упрощения границы множества, возможно применение алгоритмов, сходных с алгоритмами упрощения полигональных моделей. Но от алгоритма упрощения границы множества в задаче построения информационных множеств следует требовать выполнения определенного соотношения между исходным и результирующим множествами.

Например, при упрощении границы компьютерного представления  $U^n$  множества неопределенности  $U(t_n)$  получается множество  $U^{l(n)}$ . Согласно теореме 1 для множеств  $U(t_n)$  и  $U^n$  выполняется включение  $U(t_n) \subset U^n$ . Тогда если после упрощения границы  $U^n$  верно соотношение  $U^n \subset U^{l(n)}$ , то включение  $U(t_n) \subset U^{l(n)}$  будет выпол-

нено и для упрощенного множества  $U^{(n)}$ . Следовательно, останется верным утверждение, что вне аппроксимации области неопределенности  $U^{(n)}$  уклоняющегося объекта нет.

Алгоритм упрощения границы множества, обладающий такими свойствами, можно построить на основе алгоритма упрощения полигональных моделей, приведенного в статье [7]. Идея алгоритма связана с понятием  $\alpha$ -оболочки множества и состоит в перемещении круга достаточно малого радиуса вдоль границы множества и заполнении недоступных для круга областей. При таком перемещении происходит заполнение и выравнивание мелких неровностей границы, то есть ее упрощение.

Покажем, как такой эффект может быть достигнут последовательным применением операции  $\Delta$ -расширения множества. В дополнение к операции  $\Delta$ -расширения множества  $M$ ,

$$G(M, \Delta) = \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, \Delta)}, \Delta \geq 0,$$

введем операцию  $\Delta$ -сужения множества

$$G(M, \Delta) = \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus M, -\Delta), \Delta < 0.$$

Если операция  $\Delta$ -расширения увеличивает множество на полосу шириной  $\Delta$ , то операция  $\Delta$ -сужения уменьшает множество, удаляя из него прилегающую к границе полосу шириной  $\Delta$ .

Как указано в работе [8], операции  $\Delta$ -сужения и  $\Delta$ -расширения множеств не являются взаимно обратными, то есть

$$\exists M, \Delta : M \neq G(G(M, \Delta), -\Delta).$$

Можно доказать, что если к произвольному множеству  $M$  применить сначала операцию  $\Delta$ -расширения, а затем операцию  $\Delta$ -сужения, то получившееся множество будет содержать в себе исходное. Если же сначала применить операцию  $\Delta$ -сужения, а затем  $\Delta$ -расширения, то результат будет содержаться в исходном множестве.

**Лемма 5.** Для любого множества  $M$  и  $\Delta > 0$  выполняются включения  $M \subset G(G(M, \Delta), -\Delta)$  и  $G(G(M, -\Delta), \Delta) \subset M$ .

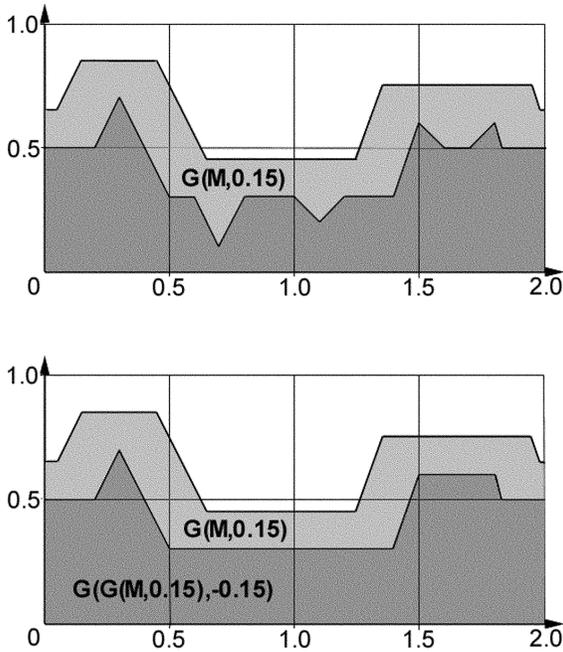


Рис. 10.

**Доказательство.** Обозначим  $\Delta$ -расширение множества  $M$  через  $M_1$ ,

$$M_1 = G(M, \Delta).$$

Рассмотрим произвольную точку  $x \in M$  и докажем, что  $x \in G(M_1, -\Delta)$ . Из свойств  $\Delta$ -расширения следует, что расстояние от точки  $x$  до любой точки множества  $\mathbb{R}^2 \setminus M_1$  больше  $\Delta$ ,

$$\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus M_1 \quad \|x - y\| > \Delta.$$

Следовательно,  $x$  не будет принадлежать  $\Delta$ -расширению множества  $\mathbb{R}^2 \setminus M_1$ ,

$$x \notin G(\mathbb{R}^2 \setminus M_1, \Delta),$$

но это означает, что

$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus M_1, \Delta) = G(M_1, -\Delta).$$

Включение  $G(G(M, -\Delta), \Delta) \subset M$  доказывается аналогично.

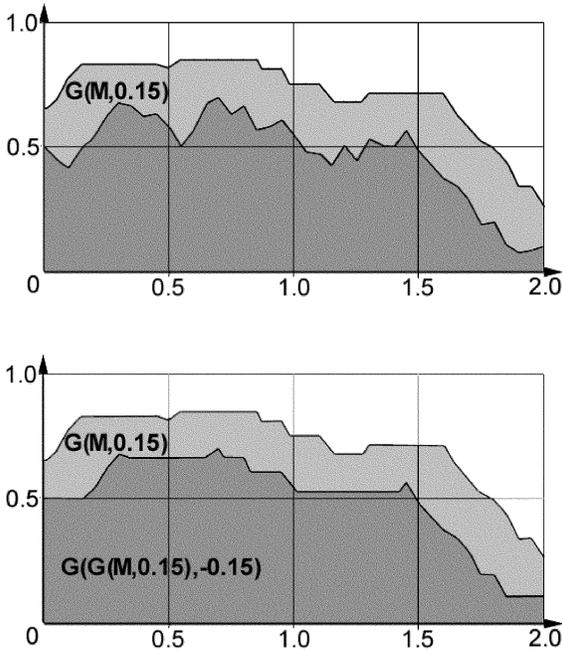


Рис. 11.

Применим утверждение 5 к задаче упрощения границы множества  $M$ . Сначала расширим, а затем сузим множество  $M$  на полосу шириной  $\Delta$ . Полученное множество  $M'$  содержит в себе  $M$ . При этом исчезают мелкие впадины в границе  $M$ , характерный размер которых меньше  $\Delta$ . Последовательное применение операций сужения и расширения эквивалентно заполнению впадин в границе. Заметим, что при построении  $\Delta$ -расширения и  $\Delta$ -сужения круг  $\overline{B}(x, \Delta)$  можно взять в метрике  $L_\infty$ , где он будет представлять собой квадрат со сторонами  $\Delta$ , параллельными осям координат. Для метрики  $L_\infty$  существуют эффективные алгоритмы построения  $\Delta$ -расширения (см. работу [7]).

Примеры упрощения границы множества при помощи операций  $\Delta$ -расширения и сужения приведены на рис. 10 и 11. На рис. 10 граница исходного множества  $M$  состоит из 16 отрезков прямых, граница множества  $G(G(M, 0, 15), -0, 15)$  состоит из 8 отрезков прямых. На

рис. 11 исходное множество, граница которого состоит из 39 отрезков, упрощено до множества, границу которого составляют 25 отрезков прямых.

Помимо уменьшения влияния ошибок округления упрощение границы множества приводит к уменьшению времени выполнения теоретико-множественных операций.

## Список литературы

- [1] Чхартишвили А.Г., Шикин. Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // *Фундаментальная и прикладная математика*. Т. 1. Вып. 2. М., 1995.
- [2] Скворцов А.А. Динамический поиск в выпуклых областях // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 785–790.
- [3] Березин С.Б. Информационные множества в задаче динамического поиска объектов с несколькими ищущими // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика*. №3. 2001.
- [4] Березин С.Б. Теоретико-множественные операции в задаче визуализации переменных информационных множеств – Деп. в ВИНТИ, №127–В00.
- [5] В.А. Дебелов, А.М. Мацокин, С.А. Упольников. Разбиение плоскости и теоретико-множественные операции // *Сибирский журн. вычисл. матем.* 1998. Т. 1. №3. С. 227–247.
- [6] Kokichi Sugihara, Masao Iri. A Solid Modelling System Free from Topological Inconsistency // *Journal of Information Processing*. Vol. 12. No. 4. 1989.
- [7] Jihad El-Sana, Amitabh Varshney. Topology Simplification for Polygonal Virtual Environments // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. Vol. 4. No. 2. April–June 1998.
- [8] S.E.O. Saeed, A. de Pennington, J.R. Dodsworth. Offsetting in Geometric Modelling // *Computer Aided Design*. Vol. 20. No. 2.