Методические рекомендации синтеза моделей полипачечного битового трафика в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания

А.Н. Назаров

1. Введение

Анализ дескриптора соглашения «пользователь-сеть» [1] для организации эффективного распределения ресурсов в сети доступа к широкополосной цифровой сети интегрального обслуживания (ШЦСИО) на технологии ATM показывает на необходимость контроля параметров трафика абонента k-ой службы ШЦСИО на технологии ATM. Стохастический процесс передачи битового трафика на конкретном сеансе связи (сессии) продолжительности T можно характеризовать [1]:

- максимальной (пиковой) скоростью передачи источника k-ой службы $B_{\max}^{(k)} = \max b^{(k)}(t)$;
- средней скоростью передачи источника k-ой службы $B_{\text{ср}}^{(k)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T b^{(k)}(t)\mathrm{d}t$;
- соотношением между пиковой и средней скоростью источника k-ой службы, то есть коэффициентом пачечности или пачечностью $k_{\Pi} = \frac{B_p^{(k)}}{B_m^{(k)}}$;
- средней длительностью пика $T_p^{(k)}$.

Очевидно, что даже для одной службы стохастический процесс от сеанса к сеансу может протекать по разному. Тот факт, что абонент k-ой службы неоднократно проводит сеансы передачи своей информации, создает предпосылки дальнейших исследований по уточнению модельной интерпретации или идентификации его битового трафика. Результаты измерений битового трафика абонента k-ой службы ШЦСИО на множестве сессий позволяют разработать подходы, использующие разброс значений параметров трафика от сессии к сессии.

В связи с этим для описания полипачечного трафика ШЦСИО [2] как динамической системы при минимальном объеме априорной информации можно попытаться использовать так называемые формальные модели, синтезируемые на основе результатов измерений, получаемых при экспериментальных исследованиях [4] на множестве сессий. Несмотря на очевидные достоинства, данные модели обладают существенным недостатком, заключающимся в возможности описания поведения исследуемой системы лишь при фиксированных значениях начальных условий различных параметров системы.

В работах [5, 6] был развит метод опорных интегральных кривых (о.и.к.) решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющий получить приближенное решение исходного уравнения в заданной области с требуемой точностью в виде обобщенного интерполяционного полинома. В основе данного метода лежит известных принцип непрерывной зависимости искомых решений от начальных условий и параметров дифференциальной задачи. Будем рассматривать случай, являющийся обобщением указанного метода, когда динамическая модель исследуемой системы – полипачечного битового трафика ШЦСИО априорно неизвестна (структурная неопределенность), а непосредственному наблюдению доступны лишь зашумленные значения вектора состояний системы и его отдельных производных в различные моменты времени при различных наборах начальных условий. Попытаемся по результатам натурных экспериментов синтезировать формально-динамическую модель, адекватную реальному поведению исследуемой системы в заданной пространственно-временной области.

2. Постановка задачи

В общем случае динамическая функция количества передаваемой битовой информации $v^{(k)}(t)$ является случайным процессом [2]. Пусть поведение $b^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}v^{(k)}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}^{(k)}(t)$ описывается некоторым априорно неизвестным уравнением

$$\dot{v}^{(k)}(t) = f(v^{(k)}, t, a^{(k)}), v^{(k)}(t_0, v_0) = v_0 \in \mathbb{R}^J,\ t \in [t_0, T] \subset \mathbb{R}, \qquad (1)$$

где $v^{(k)} = \{v_j^{(k)}(t/v_0),\ \ j = 1, 2, ..., J\}^T$ – вектор состояния системы (1); $a^{(k)} = \{a_i^{(k)}, i = \overline{1, I}\}^T$ – вектор постоянных параметров; векторная функция $f(v^{(k)}, t, a^{(k)})$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения уравнения (1), при этом $|f(v^{(k)*}, t, a^{(k)}) - f(v^{(k)**}, t, a^{(k)})| \leqslant L^* \sum\limits_{j=1}^{J} |v_j^{(k)*} - v_j^{(k)**}|$, L^* – постоянная Липшица.

Поскольку используемый в данном разделе метод о.и.к. [5, 6] легко переносится со скалярных уравнений, не содержащих параметров в правой части, на общий случай (1), то в дальнейшем, с целью сокращения записей, ограничимся рассмотрением первой производной динамической функции количества битовой информации в виде

$$\dot{v}^{(k)}(t) = f(v^{(k)}, t), v^{(k)}(t_0) = v_0^{(k)} \in \mathbb{R},\ t \in [t_0^{(k)}, T_c^{(k)}] \subset \mathbb{R} \qquad (2)$$

полагая при этом, что вид уравнения (2) априорно неизвестен.

Считаем, что на некотором фиксированном множестве сессий над исследуемым передаваемым битовым трафиком k-ой службы может быть проведено конечное число натурных экспериментов для r различных моментов времени $t_{(r)}$, $r = \overline{0, R-1}$, при n различных, но каждое из которых соответствует определенной сессии, начальных условиях $v_{0(n)}^{(k)}$, $n = \overline{0, N-1}$, принадлежащих заданной области $D_1^{(k)} = [v_1^{(k)}, v_2^{(k)}] \times [t_0^{(k)}, T_c^{(k)}]$, где $v_1^{(k)} \leqslant v_{0(n)}^{(k)} \leqslant v_2^{(k)}$. В пределах $D_1^{(k)}$ необходимо описать динамическую функцию количества передаваемой битовой информации с использованием $\varepsilon^{(k)}$-адекватной математической модели [4, 11]:

$$\rho[v^{(k)}(t/v_0^{(k)}), \tilde{v}^{(k)}(t/v_0^{(k)})] \leqslant \varepsilon^{(k)}, t, v_0^{(k)} \in D_1^{(k)}, \tag{3}$$

где $v^{(k)}(t/v_0^{(k)})$ – истинное количество передаваемой битовой информации к моменту времени t текущей сессии абонентом k-ой службы или значение динамической функции количества передаваемой битовой информации абонента k-ой службы в момент времени t, являющееся решением уравнения (2) при начальном условии $v^{(k)}(t_0^{(k)}/v_0^{(k)}) = v_0^{(k)}$; $\tilde{v}^{(k)}(t/v_0^{(k)})$ – функция, аппроксимирующая динамическую функцию количества передаваемой битовой информации при том же начальном условии $\tilde{v}^{(k)}(t_0^{(k)}/v_0^{(k)}) = v_0^{(k)}$; $\rho[\cdot]$ – заданное определенным образом расстояние в соответствующем метрическом пространстве. Условие $\varepsilon^{(k)}$-адекватности запишем в виде

$$\max_{t, v_0^{(k)}} |v^{(k)}(t/v_0^{(k)}) - \tilde{v}^{(k)}(t/v_0^{(k)})| \leqslant \varepsilon^k, \ t, \ v_0^{(k)} \in D_1^{(k)}. \tag{4}$$

Полагаем также, что экспериментальные измерения могут содержать аддитивные случайные ошибки. В этом случае проведенные эксперименты характеризуются вектором-столбцом измерений

$$\begin{gathered} \bar{V}^{(k)[Q]\{H\}} = \left\{ \bar{v}_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}}, \, n=\overline{0,N-1}, \, r=\overline{0,R-1}, \, q=\overline{0,Q-1}, \, h=\overline{0,H-1} \right\}^T : \\ v_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}} = v_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}} + \delta v_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $v_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}} = \left. \frac{\partial^{q+h} v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)}{\partial t^q \, \partial \nu_0^{(k)h}} \right|_{\substack{v_0 = v_{0(n)} \\ t = t_{(r)}}}$, $\delta v_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}}$ – случайные ошибки измерений.

Будем полагать, что ошибки измерений битового трафика k-ой службы некоррелированы и характеризуются нулевым математическим ожиданием и соответствующими среднеквадратическими отклонениями $\sigma_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}} = \sigma_0^{(k)[q]\{h\}} / \omega_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}}$, где $\omega_{(n,r)}^{(k)[q]\{h\}}$ – известные положительные веса измерений; $\sigma_0^{(k)[q]\{h\}}$ – некоторый в общем случае безразмерный коэффициент, зависящий от порядков производных q и h.

В зависимости от объема информации, полученной при проведении экспериментов, будем различать, следуя рекомендациям [9], пять различных категорий функционального описания количества передаваемого битового трафика k-ой службы ШЦСИО.

Определение 1. Динамическим трафиком первой категории будем называть такой битовой трафик, для которого в результате экспериментов может быть получен вектор-столбец измерений

$$\bar{V}^{(k)[Q]\{H\}} = V^{(k)[Q]\{H\}} + \delta V^{(k)[Q]\{H\}}.$$

Определение 2. Динамическим трафиком второй категории будем называть такой битовой трафик, для которого в результате экспериментов может быть получен вектор-столбец измерений

$$\begin{aligned}
&\bar{V}^{(k)[Q]\{0\}} = V^{(k)[Q]\{0\}} + \delta V^{(k)[Q]\{0\}},\\
&V^{(k)[Q]\{0\}} = \left\{v_{(n,r)}^{(k)[q]},\ n=\overline{0,N-1},\ r=\overline{0,R-1},\ q=\overline{0,Q-1}\right\}^T,\\
&\delta V^{(k)[Q]\{0\}} = \left\{\delta v_{(n,r)}^{(k)[q]},\ n=\overline{0,N-1},\ r=\overline{0,R-1},\ q=\overline{0,Q-1}\right\}^T.
\end{aligned}$$

Определение 3. Динамическим трафиком третьей категории будем называть такой битовой трафик, для которого в результате экспериментов может быть получен вектор-столбец измерений

$$\begin{aligned}
&\bar{V}^{(k)[0]\{H\}} = V^{(k)[0]\{H\}} + \delta V^{(k)[0]\{H\}},\\
&V^{(k)[0]\{H\}} = \left\{v_{(n,r)}^{(k)\{h\}},\ n=\overline{0,N-1},\ r=\overline{0,R-1},\ h=\overline{0,H-1}\right\}^T,\\
&\delta V^{(k)[0]\{H\}} = \left\{\delta v_{(n,r)}^{(k)\{h\}},\ n=\overline{0,N-1},\ r=\overline{0,R-1},\ h=\overline{0,H-1}\right\}^T.
\end{aligned}$$

Определение 4. Динамическим трафиком четвертой категории будем называть такой битовой трафик, для которого в результате экспериментов может быть получен вектор-столбец измерений

$$\bar{V}^{(k)[Q]\{0\}} \quad \text{и} \quad \bar{V}^{(k)[0]\{H\}}.$$

Определение 5. Динамическим трафиком пятой категории будем называть такой битовой трафик, для которого в результате экспериментов может быть получен вектор-столбец измерений

$$\begin{aligned}
&\bar{V}^{(k)[0]\{0\}} = V^{(k)[0]\{0\}} + \delta V^{(k)[0]\{0\}},\\
&V^{(k)[0]\{0\}} = \left\{ v_{(n,r)}^{(k)},\ n = \overline{0, N-1},\ r = \overline{0, R-1} \right\}^T,\\
&\delta V^{(k)[0]\{0\}} = \left\{ \delta v_{(n,r)}^{(k)},\ n = \overline{0, N-1},\ r = \overline{0, R-1} \right\}^T.
\end{aligned}$$

Требуется с учетом (1) – (5) на основе метода о.и.к. решения задачи Коши разработать метод синтеза математических моделей динамических трафиков разных категорий, $\varepsilon^{(k)}$-адекватных реальным трафикам в заданных пространственно-временных областях.

3. Методика синтеза моделей динамического трафика в детерминированной постановке

Рассмотрим применение метода о.и.к. [5, 6] для синтеза математических моделей динамических трафиков при условии, что известны точные значения динамической функции количества передаваемой битовой информации $v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)$ и ее производных различных порядков по t и $v_0^{(k)}$ в узлах $t_m, v_{0p}^{(k)}$, $m = \overline{0, M-1}$, $p = \overline{0, P-1}$:

$$v_{pm}^{(k)[q]\{h\}} = \left. \frac{\partial^{q+h} v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)}{\partial t^q \partial v_0^{(k)h}} \right|_{\substack{v_0^{(k)} = v_{0p}^{(k)} \\ t = t_m}} \tag{6}$$

По аналогии с [6] решение уравнения (2) в области $D_1^{(k)}$ представим в виде обобщенного интерполяционного полинома

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{Q-1} \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{i=0}^{H-1} \alpha_{uj}^{(k)[r]\{i\}} \mu_{ui}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right) \gamma_{jr}^{(k)}(t) \tag{7}$$

где $\alpha_{uj}^{(k)[r]\{i\}}$ – постоянные коэффициенты; $\left\{ \mu_{ui}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right) \times \gamma_{jr}^{(k)}(t) \right\}$ – система известных линейно-независимых функций.

Очевидно, что выражение (7) может быть использовано в качестве $\varepsilon^{(k)}$-адекватной модели в том случае, когда истинную динамическую функцию количества передаваемой битовой информации можно представить виде ряда

$$v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) + R\left(t/v_0^{(k)}\right), \tag{8}$$

где $\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)$ определяется выражением (7), $R\left(t/v_0^{(k)}\right)$ – остаточный член, удовлетворяющий условию

$$\max_{t,v_0^{(k)}}\left|R\left(t,v_0^{(k)}\right)\right| \leqslant \varepsilon^{(k)}, t, v_0^{(k)} \in D_1^{(k)} \tag{9}$$

В этом случае коэффициенты $\alpha_{uj}^{(k)[r]\{i\}}$ с учетом характеристического свойства функций [9] $\mu_{ui}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)$ и $\gamma_{jr}^{(k)}(t)$ находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\alpha_{uj}^{(k)[i]\{h\}}\mu_{ui}^{(k)[h]}\left(v_{op}^{(k)}\right)\gamma_{jr}^{(k)[q]}(t_m) = v_{pm}^{(k)[q]\{h\}} \tag{10}$$

Для построения модели динамического трафика первой категории целесообразно использовать полиномы Эрмита [6]. Выражение (7) в этом случае принимает вид

$$\begin{gathered}\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{h=0}^{H-1} v_{pm}^{(k)[q]\{h\}} H_{ph}\left(v_0^{(k)}\right) H_{mq}(t) = \\ = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{\lambda=0}^{Q-q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{h=0}^{H-1}\sum_{\eta=0}^{H-\eta-1} v_{pm}^{(k)[q]\{h\}}\frac{1}{m!}\frac{1}{q!}\frac{1}{p!}\frac{1}{n!}\left[\frac{\left(v_0^{(k)}-v_{0p}^{(k)}\right)^H}{\Omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}\right]^{(\eta)}_{v_0^{(k)}=v_{0p}^{(k)}} \times \\ \times\frac{\Omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{\left(v_0^{(k)}-v_{0p}^{(k)}\right)^{H-h-\eta}}\left[\frac{(t-t_m)^Q}{\Omega_{M-1}(t)}\right]^{(\lambda)}_{t=t_m}\frac{\Omega_{M-1}(t)}{(t-t_m)^{Q-q-\lambda}},\end{gathered} \tag{11}$$

где $\Omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right) = \prod_{j=0}^{P-1}\left(v_0^{(k)} - v_{0j}^{(k)}\right)^H$, $\Omega_{M-1}(t) = \prod_{j=0}^{M-1}\left(v_0^{(k)} - v_{0j}^{(k)}\right)^H$.

Рассуждая аналогично (7) – (10), запишем полином, описывающий поведение динамического трафика второй категории и соответствующую ему систему алгебраических уравнений

$$\tilde{v}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[r]\{0\}}\mu_u^{(k)}v_u^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{jr}^{(k)}(t)\,, \tag{12}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[r]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_{jr}^{(k)[q]}(t_m) = v_{pm}^{(k)[q]\{0\}}, \tag{13}$$

$$p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ q=\overline{0,Q-1}.$$

Выражение (12) с использованием полиномов Лагранжа и Эрмита [6] принимает вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1} v_{pm}^{(k)[q]\{0\}}L_p\left(v_0^{(k)}\right)H_{mq}(t) = \\
&= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{\lambda=0}^{Q-q-1}\sum_{p=0}^{P-1} v_{pm}^{(k)[q]\{0\}}\frac{1}{m!}\frac{1}{q!}\left[\frac{(t-t_m)^Q}{\Omega_{M-1}(t)}\right]_{t=t_m}^{(\lambda)}\times \\
&\times\frac{\Omega_{M-1}(t)}{(t-t_m)^{Q-q-\lambda}}\frac{\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{\left(v_0^{(k)}-v_{0p}^{(k)}\right)\omega_{P-1}^{(k)}\,\omega_{P-1}^{(1)}\left(v_0^{(k)}\right)\Big|_{v_0^{(k)}=v_{0p}^{(k)}}},
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right) = \prod_{j=0}^{P-1}\left(v_0^{(k)}-v_{0j}^{(k)}\right), \omega_{P-1}^{(1)}\left(v_0^{(k)}\right) = \frac{\partial\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{\partial v_0^{(k)}}$.

По аналогии с (12), (13) для динамического трафика третьей категории имеем

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{ui}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}(t), \tag{15}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{ui}^{(k)[h]}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}(t_m) = v_{pm}^{(k)[0]\{h\}}. \tag{16}$$

При использовании полиномов Лагранжа и Эрмита выражение (15) принимает вид

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{h=0}^{H-1}v_{pm}^{(k)[0]\{h\}}H_{ph}\left(v_0^{(k)}\right)L_m\left(t\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{h=0}^{H-1}\sum_{\eta=0}^{H-\eta-1}v_{pm}^{(k)[0]\{h\}}\tfrac{1}{p!}\tfrac{1}{h!}\left[\frac{\left(v_0^{(k)}-v_{0p}^{(k)}\right)^H}{\Omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}\right]^{(\eta)}_{v_0^{(k)}=v_{0p}^{(k)}}\times \tag{17}$$
$$\times\frac{\Omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{\left(v_0^{(k)}-v_{0p}^{(k)}\right)^{H-h-\eta}}\frac{\omega_{M-1}(t)}{(t-t_m)\omega_{M-1}^{(1)}(t)|_{t=t_m}},$$

где $\omega_{M-1}\left(t\right)=\prod\limits_{j=0}^{M-1}\left(t-t_j\right)$, $\omega_{M-1}^{(1)}\left(t\right)=\frac{d\omega_{M-1}(t)}{dt}$.

Применительно к динамическому трафику четвертой категории по аналогии с [3] можно записать

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{P-1}\left[\alpha_{uj}^{(k)[0]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{r=0}^{Q-1}\alpha_{uj}^{(k)[r]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{jr}^{(k)}\left(t\right)++\sum_{i=0}^{H-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{ui}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t\right)\right]. \tag{18}$$

Соответствующая модели (18) система уравнений для вычисления коэффициентов $\alpha_{uj}^{(k)[0]\{0\}}$, $\alpha_{uj}^{(k)[r]\{0\}}$, $\alpha_{uj}^{(k)[0]\{i\}}$ имеет вид

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{M-1}\sum\limits_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t_m\right)=v_{pm}^{(k)[0]\{0\}},\\ \sum\limits_{j=0}^{M-1}\sum\limits_{r=1}^{Q-1}\sum\limits_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[r]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_{jr}^{(k)[q]}\left(t_m\right)=v_{pm}^{(k)[q]\{0\}},\\ \sum\limits_{j=0}^{M-1}\sum\limits_{u=1}^{P-1}\sum\limits_{i=0}^{H-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{ui}^{(k)[h]}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t_m\right)=v_{pm}^{(k)[0]\{h\}},\end{cases} \tag{19}$$

$$p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ q=\overline{0,Q-1},\ h=\overline{0,H-1}.$$

Используя для построения модели (18) полиномы Лагранжа и Эрмита, получим

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\left[v_{pm}^{(k)[0]\{0\}}L_p\left(v_0^{(k)}\right)L_m\left(t\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{q=0}^{Q-1}v_{pm}^{(k)[q]\{0\}}L_p\left(v_0^{(k)}\right)H_{mq}\left(t\right)+\sum_{h=0}^{H-1}v_{pm}^{(k)[0]\{h\}}H_{ph}\left(v_0^{(k)}\right)L_m\left(t\right)\right]. \tag{20}$$

По аналогии для динамического трафика пятой категории имеем

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t\right), \tag{21}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{u=0}^{P-1}\alpha_{uj}^{(k)[0]\{0\}}\mu_u^{(k)}\left(v_{0p}^{(k)}\right)\gamma_j^{(k)}\left(t_m\right)=v_{pm}^{(k)[0]\{0\}}, \tag{22}$$

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}v_{pm}^{(k)[0]\{0\}}L_p\left(v_0^{(k)}\right)L_m\left(t\right). \tag{23}$$

Следует отметить, что построение моделей динамических трафиков вида (9), (12), (15), (18), (21) может осуществляться с использованием и других типов интерполяционных полиномов. Однако полиномы Лагранжа и Эрмита обладают рядом существенных преимуществ по сравнению с другими полиномами при выполнении расчетов на ЭВМ [6].

В общем случае при $j \neq 0, 1, ..., N-1$:

$$\tilde{v}^{(k)}\left(t_m/v_{0j}^{(k)}\right)=\tilde{v}_{mj}^{(k)}\neq v_{mj}^{(k)},$$

то есть реальное значение динамической функции количества передаваемой битовой информации отличается от значения аппроксимирующей функции при $t=t_m$ на величину $\Delta\tilde{v}_{mj}^{(k)}=\tilde{v}_{mj}^{(k)}-v_{mj}^{(k)}$. Согласно постановке задачи модель вида (7) должна быть $\varepsilon^{(k)}$-адекватна реальной динамической функции количества передаваемой битовой информации, то есть удовлетворять условию (4). Покажем на примере динамического трафика пятой категории порядок выбора узлов интерполяции t_m, $v_{0p}^{(k)}$, обеспечивающих выполнение указанного условия. Известно, что погрешность двумерной интерполяции задается остаточным членом [5].

$$R\left(t/v_0^{(k)}\right) = \frac{\omega_{M-1}(t)}{M!}\frac{\partial^M}{\partial t^M}v\left(t^*/v_0^{(k)}\right) + \frac{\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{P!}\frac{\partial^P}{\partial v_0^{(k)P}}v_0^{(k)}\left(t/v_0^{(k)*}\right) - \\ -\frac{\omega_{M-1}(t)\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)}{M!P!}\frac{\partial^{M+P}}{\partial t^M \partial v_0^{(k)P}}v\left(t^{**}/v_0^{(k)**}\right), \tag{24}$$

где t^*, t^{**} и $v_0^{(k)*}$, $v_0^{(k)**}$ – некоторые характерные значения переменных t и $v_0^{(k)}$, принадлежащих области $D_1^{(k)}$.

По аналогии с [5] с учетом (4) и (14) можно записать

$$\max_{t,v_0^{(k)}}\left|v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) - \tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)\right| \leqslant \frac{S_M}{M!}\left\|\omega_{M-1}(t)\right\|_t + \\ +\frac{T_P}{P!}\left\|\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)\right\|_{v_0^{(k)}} + \frac{D_{M,P}}{M!P!}\left\|\omega_{M-1}(t)\,\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)\right\|_{t,v_0^{(k)}} \leqslant \varepsilon^{(k)}, \tag{25}$$

где

$$S_M = \max_{t,v_0^{(k)}}\left|\frac{\partial^M}{\partial t^M}v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)\right|, \quad T_P = \max_{t,v_0^{(k)}}\left|\frac{\partial^P}{\partial v_0^{(k)}}v^k\left(t/v_0^{(k)}\right)\right|,$$
$$D_{M,P} = \max_{t,v_0^{(k)}}\left|\frac{\partial^{M+P}}{\partial t^M \partial v_0^{(k)P}}v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)\right|,$$
$$\|\cdot\|_{t\left(v_0^{(k)}\right)} = \max_{t\left(v_0^{(k)}\right)}|\cdot|, \quad \|\cdot\|_{t,v_0^{(k)}} = \max_{t,v_0^{(k)}}|\cdot|.$$

Задаваясь величиной $\varepsilon^{(k)}$, в соответствии с (25) удается подобрать такие M и P, при которых обеспечивается требуемая точность описания исследуемого динамического трафика (адекватность модели (7)). При этом шаги $\Delta v_{0p}^{(k)} = v_{0p}^{(k)} - v_{op-1}^{(k)}$ и $\Delta t = t_m - t_{m-1}$ должны выбираться из условия минимизации оценки погрешности двумерной интерполяции (26). В этом случае узлы t_m и $v_{0p}^{(k)}$ совпадают с корнями полинома Чебышева [5], то есть при оценке сверху величин $\omega_{M-1}(t)$ и $\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)$ можно воспользоваться известными соотношениями [3]

$$\max_t |\omega_{M-1}(t)| \leqslant \frac{(t_{M-1}-t_0)^M}{2^{2M-1}}, \quad t \in [t_0, T],$$
$$\max_{v_0^{(k)}} \left|\omega_{P-1}\left(v_0^{(k)}\right)\right| \leqslant \frac{\left(v_{0p-1}^{(k)}-v_{00}^{(k)}\right)^P}{2^{2P-1}}, v_0^{(k)} \in \left[b_1^{(k)}, b_2^{(k)}\right].$$

С учетом этих соотношений по аналогии с [3] вместо (25) воспользуемся оценкой

$$\max_{t,v_0^{(k)}} \left|v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) - \tilde{v}^{(k)}\left(t, v_0^{(k)}\right)\right| \leqslant \frac{(t_{M-1}-t_0)^M}{2^{2M-1}} \frac{S_M}{M!} + \frac{\left(v_{0p-1}^{(k)}-v_{00}^{(k)}\right)^P}{2^{2P-1}} \frac{T_P}{P!} +$$
$$+ \frac{(t_{M-1}-t_0)^M}{2^{2M-1}} \frac{\left(v_{0p-1}^{(k)}-v_{00}^{(k)}\right)^P}{2^{2P-1}} \frac{D_{M,P}}{M!P!},$$

которая соответствует выбору узлов t_m и $v_{0p}^{(k)}$ в соответствии с формулами

$$\begin{cases} t_m = \frac{1}{2}\left[(T-t_0)\cos\frac{2m+1}{2M}\pi + T + t_0\right], m = \overline{0, M-1}, \\ v_{0p}^{(k)} = \frac{1}{2}\left[\left(b_2^{(k)} + b_1^{(k)}\right)\cos\frac{2n+1}{2N}\pi + b_2^{(k)} + b_1^{(k)}\right], p = \overline{0, P-1.} \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, с учетом полученных соотношений можно так выбрать узлы интерполяции t_m и $v_{0p}^{(k)}$, чтобы модель (7) была $\varepsilon^{(k)}$-адекватна исследуемому динамическому трафику в заданной области .

Как показывает анализ [6], при достаточно гладкой зависимости функции $v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)$ от t и $v_0^{(k)}$ общее количество узлов интерполяции оказывается незначительным.

4. Метод синтеза моделей динамического трафика в статистической постановке

Рассмотрим задачу синтеза математических моделей динамического трафика с учетом случайных ошибок измерений. Для приближенного определения коэффициентов интерполяционного полинома (7), описывающего поведение исследуемого динамического трафика, воспользуемся следующей аппроксимирующей функцией $\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)$:

$$\hat{\tilde{v}}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\left(G\right)\mu_{pi}^{(k)}\gamma_{mr}^{(k)}, \tag{27}$$

где $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\left(G\right)$ – оценки, полученные по результатам G измерений ($G=N\cdot R\cdot Q\cdot H$), при этом полагаем, что вектор-столбец $\bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}}$ включает в себя избыточные измерения ($NR>PM$).

Очевидно, что для $\varepsilon^{(k)}$-адекватности модели (27) исследуемой системе необходимо, чтобы оценки $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\left(G\right)$ обладали свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности по отношению к коэффициентам $\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\left(G\right)$, при которых удовлетворяется условие (9), то есть

$$\begin{gathered}\lim_{G\to\infty}P\left\{\left\|\hat{A}\left(G\right)-A\right\|>\delta\nu\right\}=0, M\left\{\hat{A}\left(G\right)-A\right\}=0,\\ \beta^{T}M\left\{\left[\hat{A}^{Э}\left(G\right)-A\right]\left[A^{Э}\left(G\right)-A\right]^{T}\right\}\beta\leqslant\\ \leqslant\beta^{T}M\left\{\left[\hat{A}\left(G\right)-A\right]\left[\hat{A}\left(G\right)-A\right]^{T}\right\}\beta,\end{gathered}$$

где $\delta\nu$ – сколь угодно малое положительное число; $\hat{A}\left(G\right)=\left\{\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}},\ p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ q=\overline{0,Q-1},\ i=\overline{0,H-1}\right\}^{T}$, $\beta=\left\{\beta_j,\ j=\overline{0,(P-1)\left(M-1\right)\left(Q-1\right)\left(H-1\right)}\right\}^{T}$ – произвольный вектор; $\hat{A}^{Э}\left(G\right)$ – эффективная оценка вектора A, полученная по результатам G измерений

$$A = \left\{ \alpha_{uj}^{(k)[r]\{i\}},\ u = \overline{0, P-1},\ j = \overline{0, M-1},\ r = \overline{0, Q-1},\ i = \overline{0, H-1} \right\}^T.$$

Известно [9], что указанным свойствам удовлетворяют оценки, полученные на основе метода наименьших квадратов (МНК-оценки) [7]. В соответствии с данным методом сформируем невязку:

$$\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} = \bar{v}_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} - \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{Q-1} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{i=0}^{H-1} \hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}} \mu_{pi}^{(k)\{h\}} \Big(v_{0(n)}^{(k)} \Big) \gamma_{mj}^{(k)[q]} \big(t_{(s)} \big),$$
$$n = \overline{0, N-1},\ s = \overline{0, S-1},\ q = \overline{0, Q-1},\ h = \overline{0, H-1}. \tag{28}$$

Искомые оценки $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ находятся из условия [7]:

$$\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}} = \arg\min_{\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}} \left\{ \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{H-1} \omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} \left[\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} \right]^2 \right\}. \tag{29}$$

Следует отметить, что узлы интерполяции t_m, $v_{0p}^{(k)}$ в общем случае не совпадают с узлами $t_{(s)}$, $v_{0(n)}^{(k)}$, в которых производятся измерения, при этом $M < S, P < N$.

Дифференцируя выражение (29) по $\alpha_{\lambda g}^{(k)[z]\{d\}}$, $\lambda = \overline{0, P-1}$, $g = \overline{0, M-1}$, $z = \overline{0, Q-1}$, $d = \overline{0, H-1}$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов:

$$\sum_{s=0}^{S-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{h=0}^{H-1} \omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} \left[\bar{v}_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} - \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{Q-1} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{i=0}^{H-1} \hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}} \times \right.$$
$$\left. \times \mu_{pi}^{(k)[h]} \left(v_{0(n)}^{(k)} \right) \gamma_{mr}^{(k)[q]} \left(t_{(s)} \right) \right] \mu_{\lambda d}^{(k)[h]} \left(v_{0(n)}^{(k)} \right) \gamma_{gz}^{(k)[q]} \left(t_{(s)} \right) = 0,$$
$$\lambda = \overline{0, P-1},\ g = \overline{0, M-1},\ z = \overline{0, Q-1},\ d = \overline{0, H-1}. \tag{30}$$

Решение уравнения (2), описывающее поведение динамического трафика первой категории в заданной области $D_1^{(k)}$, аппроксимируется полиномом (27), при этом коэффициенты $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (30).

Аппроксимирующий полином типа (27), описывающий поведение динамического трафика второй категории имеет вид

$$\hat{\tilde{v}}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}\mu_p^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}(t), \tag{31}$$

при этом коэффициенты $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}$ на основании (30) находятся из решения системы уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{s=0}^{S-1}\sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[q]}\left[\bar{v}_{(n,s)}^{(k)[q]}-\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}\times\right.\\ \left.\times\,\mu_p^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)[q]}(t_s)\right]\mu_\lambda^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{gz}^{(k)[q]}\left(t_{(s)}\right)=0,\\ \lambda=\overline{0,P-1},g=\overline{0,M-1},z=\overline{0,Q-1}.\end{gathered} \tag{32}$$

Рассуждая аналогично (27) – (30), запишем решение уравнения (2) и систему уравнений для вычисления коэффициентов $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}$ применительно к динамическому трафику третьей категории:

$$\hat{\tilde{v}}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{m}^{(k)}(t), \tag{33}$$

$$\begin{gathered}\sum_{s=0}^{S-1}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{h=0}^{H-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[h]}\left[\bar{v}_{(n,s)}^{(k)[h]}-\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}\times\right.\\ \left.\times\mu_{pi}^{(k)[h]}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{m}^{(k)}(t_s)\right]\mu_{\lambda d}^{(k)[h]}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{g}^{(k)}\left(t_{(s)}\right)=0,\\ \lambda=\overline{0,P-1},g=\overline{0,M-1},d=\overline{0,Q-1}.\end{gathered} \tag{34}$$

Для динамического трафика четвертой категории аппроксимирующий полином представим в виде [6]

$$\hat{\tilde{v}}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\left[\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{0\}}\mu_p^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}(t)+\sum_{r=0}^{Q-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}\times\right.$$
$$\left.\times\mu_p^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}(t)+\sum_{i=0}^{H-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}(t)\right]. \tag{35}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим систему для вычисления коэффициентов $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{0\}}, \hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}, \hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{s=0}^{S-1}\sum\limits_{q=0}^{Q-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{h=0}^{H-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\mu_\lambda^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_g^{(k)}(t_s)=0,\\ \sum\limits_{s=0}^{S-1}\sum\limits_{q=0}^{Q-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{h=0}^{H-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\mu_\lambda^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{gz}^{(k)[q]}\left(t_{(s)}\right)=0,\\ \sum\limits_{s=0}^{S-1}\sum\limits_{q=0}^{Q-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{h=0}^{H-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}\mu_{\lambda d}^{(k)[h]}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_g^{(k)}\left(t_{(s)}\right)=0,\end{array}\right.$$
$$\lambda=\overline{0,P-1}, g=\overline{0,M-1}, z=\overline{0,Q-1}, d=\overline{0,H-1}, \tag{36}$$

где невязка $\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}$ определяется выражением

$$\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}=v_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}}-\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\left[\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{0\}}\mu_p^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}\left(t_{(s)}\right)+\right.$$
$$+\sum_{r=0}^{Q-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{0\}}\times\mu_p^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)[q]}\left(t_{(s)}\right)+$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{H-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}\mu_{pi}^{(k)[h]}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}\left(t_{(s)}\right)\right].$$

По аналогии для динамического трафика пятой категории имеем

$$\hat{\tilde{v}}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{0\}}\mu_p^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}(t), \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\sum_{s=0}^{S-1}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_{(n,s)}^{(k)[h]}\left[\bar{v}_{(n,s)}^{(k)[h]}-\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[0]\{i\}}\times\right.\\ \left.\times\mu_p^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_m^{(k)}\left(t_{(s)}\right)\right]\mu_\lambda^{(k)}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_g^{(k)}\left(t_{(s)}\right)=0,\\ \lambda=\overline{0,P-1},g=\overline{M-1}.\end{gathered}\tag{38}$$

Для построения моделей динамических трафиков (27), (31), (33), (35), (37) также могут быть использованы полиномы Лагранжа и Эрмита. Так, для динамического трафика первой категории можно записать

$$\hat{\tilde{v}}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\hat{v}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}H_{pi}\left(v_0^{(k)}\right)H_{mr}\left(t\right).\tag{39}$$

при этом в качестве коэффициентов $\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ выступают оценки динамической функции количества передаваемой битовой информации и ее производных различных порядков $\hat{v}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ в моменты времени $t=t_m$, $0\leqslant m\leqslant M-1$, при p-ом начальном условии $v_0^{(k)}=v_{0p}^{(k)}$, $0\leqslant p\leqslant P-1$.

Применение изложенного в данном параграфе метода допускает удобную матричную форму записи, что делает данный подход наиболее приемлемым для реализации на ЭВМ. Так, модель динамического трафика первой категории можно представить в виде

$$\hat{\tilde{v}}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\psi^{(k)}\hat{A}^{(k)},\tag{40}$$

где $\hat{A}^{(k)}=\left\{\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}},\ p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,Q-1},\ i=\overline{0,H-1}\right\}^T$, $\psi^{(k)}=\left\{\mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}\left(t\right),\ p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,Q-1},\ i=\overline{0,H-1}\right\}^T$.

Выражение (28) в этом случае принимает вид

$$\Delta^{(k)}=\bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}}-\phi^{(k)}\hat{A}^{(k)},\tag{41}$$

где $\phi^{(k)} = \left\{\phi_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}},\ n=\overline{0,N-1},\ s=\overline{0,S-1},\ q=\overline{0,Q-1},\ h=\overline{0,H-1}\right\}$, $\phi_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}} = \left\{\mu_{pi}^{(k)[h]}\left(v_{0(n)}^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)[q]},\ p=\overline{0,P-1},\ m=\overline{0,M-1},\ r=\overline{0,Q-1},\ i=\overline{0,H-1}\right\}^T$, $\Delta^{(k)} = \left\{\Delta_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}},\ n=\overline{0,N-1},\ s=\overline{0,S-1},\ q=\overline{0,Q-1},\ h=\overline{0,H-1}\right\}^T$.

С учетом (40), (41) вектор оценок $\hat{A}^{(k)}$, оптимальных в смысле критерия

$$\hat{A}^{(k)} = \arg\min_{A^{(k)}} \Delta^{(k)T} W \Delta^{(k)} = \arg\min_{A^{(k)}} \left[\bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}} - \phi^{(k)} A^{(k)}\right]^T \cdot$$
$$\cdot W \left[\bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}} - \phi^{(k)} A^{(k)}\right],$$

находится из решения матричного уравнения

$$\phi^T W \phi \hat{A} = \phi^T W \bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}}$$

согласно правилу

$$\hat{A} = \left(\phi^T W \phi\right)^{-1} \phi^T W \bar{Y}^{(k)[Q]\{H\}}, \tag{42}$$

где $W = diag\left\{\omega_{(n,s)}^{(k)[q]\{h\}},\ n=\overline{0,N-1},\ s=\overline{0,S-1},\ q=\overline{0,Q-1},\ h=\overline{0,H-1}\right\}$.

Полагая, что полином (7) является полиномом наилучшего приближения реальной динамической функции количества передаваемой битовой информации $v^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right)$ исследуемого динамического трафика, выражение (27) представим в виде

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{v}}\left(t/v_0^{(k)}\right) &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1} \hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}} \mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}(t) = \\ &= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{i=0}^{H-1}\left(\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}} + \Delta\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\right)\mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}(t) = \\ &= \tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right) + \Delta\tilde{v}^{(k)}\left(t/v_0^{(k)}\right),\end{aligned} \tag{43}$$

где $\Delta\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ – случайная ошибка определения коэффициентов $\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$,

$$\Delta\tilde{v}\left(t/v_0^{(k)}\right)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{r=0}^{Q-1}\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{i=0}^{H-1}\Delta\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}\mu_{pi}^{(k)}\left(v_0^{(k)}\right)\gamma_{mr}^{(k)}(t).$$

Известно [7], что если оценки $\hat{\alpha}_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ являются МНК-оценками, величины $\Delta\alpha_{pm}^{(k)[r]\{i\}}$ некоррелированы, имеют минимальную дисперсию и нулевое математическое ожидание. Таким образом, при выборе узлов t_m, $v_{0p}^{(k)}$ согласно методике, изложенной в предыдущем параграфе, модель вида (27) будет асимптотически $\varepsilon^{(k)}$-адекватна.

В отличие от случая, когда ошибками измерений можно пренебречь, реализация изложенного в настоящем параграфе метода предполагает необходимость решения систем алгебраических уравнений. Данная процедура с учетом (40) – (42) может быть автоматизирована с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники.

Следует отметить, что в случае, когда необходимо описать динамический трафик при фиксированном начальном условии, предложенный подход сводится к построению формальной модели [4] с использованием обобщенного метода наименьших квадратов для случая расширенной модели наблюдений [8]. В случае, когда модель наблюдений при этом не содержит производных от измеряемых величин (динамический трафик пятой категории), развитый метод сводится к построению формальной модели с использованием классического МНК [7].

5. Обсуждение полученных результатов

Использование предлагаемого в статье подхода не исключает его комплексирования с классическим методом построения адекватных динамических моделей исследуемых трафиков. Результатом такого комплексирования может служить сглаживающий полином, минимизирующий расстояние между некоторым семейством частных решений, полученный на основе классической динамической модели и массивом статистических данных, соответствующих натурным экспериментам [9].

Предложенный в работе подход несложно обобщить на случай многомерного битового трафика, описываемого векторным уравнением (системой уравнений) (1) с вектором постоянных параметров в правой части. В этом случае экспериментальные измерения необходимо производить при различных значениях вектора $a^{(k)}$. Модели динамических функций количества передаваемой битовой будут представлять из себя многомерные интерполяционные структуры, подобные рассмотренным в [5].

Применимость двумерной сплайн-интерполяции вполне допустима как развитие достигнутых результатов. Двумерный сплайн – функция, «склеенная из кусков» двумерных алгебраических полиномов. Однако, если в одномерном случае стыковка полиномов, а также нужные краевые условия обеспечивались заданием их значений в конечном множестве точек на прямой, то на плоскости все это надо делать на некоторых кривых [10], чем значительно усложняется процедура построения сплайнов. Самый простой вариант – «склеивать» полиномы и задавать краевые условия вдоль прямых, параллельным осям координат. На таких прямых мы уже будем иметь дело с одномерными сплайнами, а, кроме того, будет облегчено использование информации о гладкости интерполируемой функции двух переменных, описываемой с помощью частных производных. Известными методами [10] можно двумерный сплайн конструировать на базе одномерных сплайнов, а задачу оценки погрешности приближения свести к рассмотренной ранее задаче на основе критерия $\varepsilon^{(k)}$-ограниченной невязки и применить двухэтапный метод оценки адекватности локальной полиномиальной сплайн-интерполяции битового трафика [11], и метод параметрической устойчивой идентификации динамического битового трафика [12].

Список литературы

[1] Назаров А.Н., Симонов М.В. АТМ: технология высокоскоростных сетей. М.: Эко-Трендз. 1997.

[2] Назаров А.Н. Модели трафика служб с битовой скоростью передачи информации в широкополосных цифровых сетях инте-

грального обслуживания // Автоматика и телемеханика. 1998. №9. С. 52–63.

[3] Булычев Ю.Г. Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. №10. С. 1482–1490.

[4] Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Т. Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974.

[5] Булычев Ю.Г. Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. №9. С. 1305–1319.

[6] Булычев Ю.Г. Численно-аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Журн. вычисл. матем.и матем. физ. 1994. Т. 34. №4. С. 520–532.

[7] Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: ГИФМЛ, 1962.

[8] Назаров А.Н. К вопросу синтеза математических моделей динамического трафика по экспериментальным данным в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания // М: РНТОРЭС им. А.С.Попова, Международная академия информатизации, Научный семинар «Информационные сети и системы» 26–27 октября 1999, Тезисы докладов. С. 13–15.

[9] Булычев Ю.Г., Манин А.А. Синтез математических моделей динамических систем по экспериментальным данным. ВИНИТИ. рук. Деп. №2745–В97. 1997.

[10] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближений. М.: Наука, 1984.

[11] Назаров А.Н. Двухэтапный метод оценки адекватности локальной полиномиальной сплайн-интерполяции битового трафика служб широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания // Интеллектуальные системы. Т. 4. Вып. 1–2. 1999.

[12] Назаров А.Н. Метод параметрической устойчивой идентификации динамического битового трафика в широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания // Интеллектуальные системы. Т. 4. Вып. 3–4. 1999.