

# Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ\*

Ю.П. Пытьев, Г.С. Животников

## 1. Введение

Здесь и далее изображением  $g$  будем называть функцию  $g: \{(i, j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , ее значение  $g_{ij} \in \mathbb{R}^1$  назовем яркостью изображения  $g$  в точке  $(i, j)$  поля зрения,  $\{(i, j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ . Изображение  $g$  можно представить матрицей  $m \times n$ , матричный элемент  $g_{ij}$  которой есть яркость  $g$  в точке  $(i, j)$  поля зрения,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ . Определим операции над изображениями – умножение изображения  $g$  на число  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  и сумму изображений  $g$  и  $f$  – так же, как определяются соответствующие операции над матрицами в линейной алгебре:  $(\alpha g)_{ij} = \alpha g_{ij}$ ,  $(f + g)_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ . Определим также скалярное произведение изображений  $f$  и  $g$ :  $(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij}g_{ij}$ . Заметим, что изображение

может рассматриваться как вектор  $N$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = m \times n$ , при этом значения  $g_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ , являются его координатами.

Рассмотрим задачу узнавания цифр, изображения которых искажены шумом, в которой известно начертание и размер цифр; для

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 44/99-Р.

сравнения помехозащищенности рассматриваемых ниже алгоритмов будем предполагать, что зашумленные изображения, предъявляемые для узнавания, формируются по известному закону.

Пусть дана совокупность десяти эталонных изображений цифр,  $f^{(k)} = \{f_{ij}^{(k)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \in \mathbb{R}^N$ ,  $k = \overline{0, 9}$ , на которых имеется всего два уровня яркости, «белый», соответствующий значению  $f_{ij}^{(k)} = 1$ , и «черный» —  $f_{ij}^{(k)} = 0$ . Предположим, что для узнавания предъявляется изображение  $g$ , полученное путем добавления к одному из эталонных изображений  $f^{(k)}$ , выбранному случайно, аддитивного шума  $\nu = \{\nu_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \in \mathbb{R}^N$  по схеме

$$g = f^{(k)} + \nu. \quad (1)$$

### 1.1. Байесовское решение [1, 4]

Если координаты вектора  $\nu$  независимы, одинаково распределены, и  $\text{pr}(\cdot)$  — плотность распределения вероятностей значений координат  $\nu_{ij}$ ,  $\forall i, j$ , шума  $\nu$ , то плотность условного распределения вероятностей значений яркости в точках поля зрения  $g = \{g_{ij}\} \in \mathbb{R}^N$  при условии, что оно формировалось на основе эталонного изображения  $f^{(k)}$  цифры « $k$ » по схеме (1), равна

$$\text{pr}(g|«k») = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \text{pr}(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}).$$

Вообще говоря, для построения байесовского решающего правила независимость случайных величин  $\nu_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  несущественна; необходимо только, чтобы была известна плотность их совместного распределения  $\text{pr}_\nu(\cdot)$ . Тогда

$$\text{pr}(g|«k») = \text{pr}_\nu(g - f^{(k)}).$$

Пусть  $\text{Pr}(\langle k \rangle)$  — априорная вероятность того, что предъявленное для узнавания изображение будет изображением цифры « $k$ »,  $k = \overline{0, 9}$ . Байесовская стратегия предписывает найти такой номер  $k^*$ , при котором условная вероятность того, что предъявленное изображение  $g$  является искаженным изображением цифры « $k$ »,

$$\Pr(\langle k \rangle | g) = \frac{\text{pr}(g | \langle k \rangle) \Pr(\langle k \rangle)}{\sum_{l=0}^9 \text{pr}(g | \langle l \rangle) \Pr(\langle l \rangle)}, \quad k = 0, \dots, 9,$$

принимала максимальное по  $k$  значение:

$$k^* = k^*(g) = \arg \max_{k=0,9} \Pr(\langle k \rangle | g), \quad g \in \mathbb{R}^N.$$

Для простоты предположим, что  $\Pr(\langle k \rangle) = 1/10$ ,  $k = \overline{0, 9}$ . Тогда задача  $\Pr(\langle k \rangle | g) \sim \max_k$  равносильна задаче  $\text{pr}(g | \langle k \rangle) \sim \max_k$  и, следовательно, если наблюдается изображение  $g$ , то согласно байесовской стратегии следует считать, что оно является искаженным изображением цифры  $\langle k^* \rangle$ , где

$$k^* = \arg \max_{k=0,9} \text{pr}(g | \langle k \rangle) = \arg \max_{k=0,9} \text{pr}_\nu(g - f^{(k)}), \quad g \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Если координаты  $\nu_{ij}$  вектора  $\nu \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , статистически независимы и имеют одинаковое распределение  $\text{pr}(\cdot)$ , то

$$k^* = \arg \max_{k=0,9} \left( \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \text{pr}(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}) \right). \quad (3)$$

Покажем, что такая стратегия минимизирует математическое ожидание числа ошибочных решений.

Обозначим  $\phi(\cdot) = (\phi_0(\cdot), \dots, \phi_9(\cdot)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \Phi$  векторнозначную функцию, значение  $\phi(g)$  которой при любом аргументе  $g \in \mathbb{R}^N$  лежит в 9-мерном симплексе  $\Phi$ , замкнутом выпуклом подмножестве евклидова пространства  $\mathbb{R}^{10}$ :

$$\phi(g) \in \Phi = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_9) : \sum_{k=0}^9 \lambda_k = 1; \lambda_k \geq 0, \forall k = \overline{0, 9} \right\}, \quad g \in \mathbb{R}^N. \quad (4)$$

Функция  $\phi(\cdot)$  определяет произвольную рандомизированную стратегию: если для узнавания предъявлено изображение  $g \in \mathbb{R}^N$ , то решение  $\langle k \rangle$  принимается с вероятностью  $\phi_k(g)$ ,  $k = \overline{0, 9}$ .

Математическое ожидание числа ошибочных решений при использовании стратегии  $\phi(\cdot)$  при условии, что для узнавания предъ- является искаженное шумом изображение цифры « $l$ », равно

$$R(\langle l \rangle, \phi(\cdot)) = \sum_{k=0}^9 (1 - \delta_{kl}) \int_{\mathbb{R}^N} \phi_k(g) p(g|\langle l \rangle) dg,$$

где  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера. Если известны априорные вероятности  $\Pr(\langle l \rangle)$ ,  $l = \overline{0, 9}$ , то математическое ожидание числа ошибочных решений при использовании стратегии  $\phi(\cdot)$  имеет вид

$$R(\phi(\cdot)) = \sum_{l=0}^9 \Pr(\langle l \rangle) \sum_{k=0}^9 (1 - \delta_{kl}) \int_{\mathbb{R}^N} \phi_k(g) p(g|\langle l \rangle) dg. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу  $R(\phi(\cdot)) \sim \min_{\phi(\cdot)}$ , учитывая в (5) конкретные значения априорных вероятностей,  $\Pr(\langle l \rangle) = 1/10$ ,  $l = \overline{0, 9}$ :

$$R(\phi(\cdot)) = \frac{1}{10} \sum_{l=0}^9 \sum_{k=0}^9 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_k(g) p(g|\langle l \rangle) dg - \frac{1}{10} \sum_{l=0}^9 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_l(g) p(g|\langle l \rangle) dg \sim \min_{\phi(\cdot)},$$

Эта задача эквивалентна задаче

$$\sum_{l=0}^9 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_l(g) p(g|\langle l \rangle) dg \sim \max_{\phi(\cdot)}, \quad (6)$$

поскольку  $\frac{1}{10} \sum_{l=0}^9 \sum_{k=0}^9 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_k(g) p(g|\langle l \rangle) dg = 1$ . Рассмотрим случай, когда  $\max_{k=\overline{0, 9}} p(g|\langle k \rangle)$  достигается при единственном значении индекса  $k$ .

Тогда байесовская стратегия (2) в терминах функций  $\phi(\cdot)$  имеет вид

$$\phi_l^*(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(g|\langle l \rangle) = \max_{k=\overline{0, 9}} p(g|\langle k \rangle) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad g \in \mathbb{R}^N.$$

Функция  $\phi^*(\cdot) = (\phi_0^*(\cdot), \dots, \phi_9^*(\cdot))$  является решением задачи (6) в классе нерандомизированных стратегий. В самом деле, поменяем в (6) знак интеграла и знак суммы местами. Решение задачи о максимизации интеграла буде найдено, если найти решение, максимизирующее подинтегральную функцию при каждом значении переменной интегрирования. Таким образом, решение задачи

$$\forall g \in \mathbb{R}^N : \sum_{l=0}^9 \phi_l(g) p(g|«l») \sim \max_{\phi(g)} \quad (7)$$

содержится в классе решений задачи (6). То, что  $\phi^*(\cdot)$  является решением задачи (7), очевидно.

Поскольку класс произвольных стратегий  $\phi(\cdot)$  образует выпуклое замкнутое множество в прямом произведении  $\mathcal{L}^{10}$  десяти евклидовых пространств  $\mathcal{L}$  функций  $\varphi(\cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ , и поскольку функционал, стоящий в правой части (6), линеен по  $\phi(\cdot)$ , то максимум в (6) достигается в угловых точках<sup>1</sup> множества произвольных стратегий, то есть на нерандомизированных стратегиях (см., например, [2]). Это доказывает оптимальность стратегии  $\phi^*(\cdot)$ , совпадающей с (2).

Итак, байесовское решение минимизирует математическое ожидание числа ошибок, обеспечивая наилучший результат в достаточно длинной серии испытаний. Однако оно предполагает и выполнение очень жестких требований к теоретико-вероятностной модели формирования предъявляемых для узнавания изображений, а именно, необходимо точное знание плотности распределения вероятностей вектора шума и априорных вероятностей  $\text{Pr}(«k»)$ ,  $k = \overline{0, 9}$ .

## 1.2. Морфологическое решение

Для построения морфологического решающего правила в рассматриваемой задаче введем понятие формы изображения [5].

Пусть  $\chi^{(k),q} = \{\chi_{ij}^{(k),q}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$  – индикаторная функция множества<sup>2</sup> постоянной яркости на эталонном изображении  $f^{(k)}$ ,  $k =$

<sup>1</sup>Возможно, не только в них.

<sup>2</sup>Если задано множество  $A$  точек  $(i, j)$  поля зрения, то под индикаторной функцией множества  $A$  будем понимать вектор  $\chi^A = \{\chi_{ij}^A, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\} \in$

$\overline{0, 9}$ . В данном случае индекс  $q$  принимает два значения, например 0 и 1, соответствующих множествам черных и белых точек, и эталонное изображение цифры « $k$ » равно  $f^{(k)} = 0 \cdot \chi^{(k),0} + 1 \cdot \chi^{(k),1}$ ,  $k = \overline{0, 9}$ .

**Определение 1.** Формой эталонного изображения  $f^{(k)}$  называется выпуклое и замкнутое в  $\mathbb{R}^N$  множество  $\mathcal{V}_{f^{(k)}}$  всевозможных изображений, которые могут быть получены из эталонного изотонным (сохраняющим упорядоченность) преобразованием яркостей,

$$\mathcal{V}_{f^{(k)}} = \left\{ f = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^N \mid f = \sum_q c_q \chi^{(k),q}, c_0 \leq c_1 \right\}, \quad (8)$$

или – оператор  $P_{f^{(k)}}$  проецирования на  $\mathcal{V}_{f^{(k)}}$ , который определяется следующим образом:

$$P_{f^{(k)}} g = \sum_q c_q^* \chi^{(k),q}, \quad g \in \mathbb{R}^N, \quad (9)$$

где  $c_0^* = c_0^*(g)$ ,  $c_1^* = c_1^*(g)$  – решение следующей вариационной задачи:  $\forall g \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( g_{ij} - \sum_q c_q^* \chi_{ij}^{(k),q} \right)^2 = \min_{c_0 \leq c_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( g_{ij} - \sum_q c_q \chi_{ij}^{(k),q} \right)^2, \quad k = \overline{0, 9}. \quad (10)$$

Существование и единственность решения задачи (10) показана в [5].

Вообще, пусть дано изображение

$$f = \sum_{i=1}^s c_i^f \chi_f^{(i)}, \quad (11)$$

$\mathbb{R}^N$ , координаты которого принимают значения

$$\chi_{ij}^A = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in A \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin A \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

где  $\chi_f^{(i)} \in \mathbb{R}^N$  – индикаторная функция множества постоянной яркости  $c_i^f \in \mathbb{R}^1$  изображения  $f$ ,  $i = \overline{1, s}$ ;  $\chi_f^{(1)}, \dots, \chi_f^{(s)}$  – взаимно ортогональные векторы в  $\mathbb{R}^N$ , координаты которых принимают значения 0 либо 1, а яркости  $c_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $i = \overline{1, s}$  упорядочены согласно неравенствам

$$0 \leq c_1^f < c_2^f < \dots < c_s^f,$$

и образуют вектор  $c^f = (c_1^f, \dots, c_s^f) \in \mathbb{R}^s$ . Обозначим  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^s$  – множество всех векторов  $c \in \mathbb{R}^s$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_s. \quad (12)$$

Формой изображения  $f$  (11) в таком случае называется выпуклое замкнутое множество  $\mathcal{V}_f$  всех векторов  $g \in \mathbb{R}^N$ , представимых в виде

$$g = \sum_{i=1}^s c_i \chi_f^{(i)}, \quad c = (c_1, \dots, c_s) \in \mathcal{C},$$

или оператор  $P_f$  проецирования на  $\mathcal{V}_f$ , определенный неравенством

$$P_f g = \sum_{i=1}^s c_i^* \chi_f^{(i)}, \quad g \in \mathbb{R}^N,$$

в котором  $c^* = (c_1^*, \dots, c_s^*) \in \mathcal{C}$  – решение задачи на минимум:  $\forall g \in \mathbb{R}^N$

$$\left\| g - \sum_{i=1}^s c_i^* \chi_f^{(i)} \right\|^2 = \min_{c \in \mathcal{C}} \left\| g - \sum_{i=1}^s c_i \chi_f^{(i)} \right\|^2. \quad (13)$$

**Определение 2.** Минимальное по включению линейное подпространство  $\mathcal{L}_f \subset \mathbb{R}^N$ , содержащее множество  $\mathcal{V}_f$ , называется формой изображения  $f$  в широком смысле.

Его размерность, очевидно, равна  $s$ , и  $\mathcal{L}_f$  совпадает с  $\mathcal{L}(\chi_f^{(1)}, \dots, \chi_f^{(s)})$  – линейной оболочкой, натянутой на индикаторные функции множеств постоянной яркости изображения  $f$ .

Согласно теореме о транзитивности проецирования [6], решение задачи (13) эквивалентно проецированию  $g$  на форму в широком смысле, то есть вычислению ортогональной проекции  $\tilde{g}$  изображения  $g$  на  $\mathcal{L}_f$

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^s \tilde{c}_i \chi_f^{(i)}, \quad \tilde{c}_i = \frac{(g, \chi_f^{(i)})}{\|\chi_f^{(i)}\|^2}, \quad i = 1 \dots s,$$

и последующему решению задачи выпуклого программирования:  $\forall \tilde{c} \in \mathbb{R}^s$

$$\|c^* - \tilde{c}\|_{H_f}^2 = \min_{c \in C} \|c - \tilde{c}\|_{H_f}^2,$$

где  $\|x\|_{H_f}^2 = (x, H_f x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^s$ ,  $H_f = \begin{pmatrix} \|\chi_f^{(1)}\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\chi_f^{(2)}\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\chi_f^{(s)}\|^2 \end{pmatrix}$ .

В рассматриваемой задаче узнавания морфологическое решающее правило предписывает считать предъявленное изображение  $g$  изображением цифры « $k^*$ », если

$$k^* = \arg \min_k \|g - P_{f^{(k)}} g\|^2. \quad (14)$$

Иначе говоря, изображение  $g$  классифицируется как изображение цифры « $k^*$ », если, как это отмечено в (14), оно ближе всего к форме изображения эталона « $k^*$ ».

Предположим, что в (1) координаты  $\nu_{ij}$  вектора шума  $\nu$  одинаково распределены, независимы,  $E\nu_{ij} = 0$  и  $E\nu_{ij}^2 = \sigma^2 < \infty$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Как показано в [9], при таких условиях случайная величина  $\|\nu\|^2/\sigma^2$  имеет распределение, близкое к центральному  $\chi^2$ -распределению с  $N = m \times n$  степенями свободы, если  $N$  достаточно велико.

Рассмотрим случайную величину  $\xi^{(k)} = \|g - P_{f^{(k)}} g\|^2/\sigma^2$ . Пусть  $g = f^{(l)} + \nu$ , тогда  $\xi^{(k)} = \|f^{(l)} + \nu - P_{f^{(k)}}(f^{(l)} + \nu)\|^2/\sigma^2$ . При больших  $N$  и  $\text{rank } P_{f^{(k)}} \ll N$ ,  $k = \overline{0, 9}$ , случайная величина  $\xi^{(k)}$  имеет распределение, близкое<sup>3</sup> к распределению  $\chi^2$  с  $N - \text{rank } P_{f^{(k)}}$  степенями

<sup>3</sup>При большом  $N$  и небольшом количестве  $s \ll N$  уровней яркости на эталон-

свободы, центральному, если  $k = l$ , и имеющему параметр нецентральности  $t_k^2 = \|f^{(l)} - P_{f^{(k)}} f^{(l)}\| > 0$ , если  $k \neq l$  и изображение  $f^{(l)}$  не сравнимо по форме<sup>4</sup> с  $f^{(k)}$ .

Пусть имеется 10 случайных величин  $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(9)}$ , о которых известно, что все они имеют распределение  $\chi^2$  с одинаковым числом степеней свободы и разными параметрами нецентральности  $t_0^2, \dots, t_9^2$ . Пусть известно также, среди них есть лишь одна случайная величина,  $\xi^{(k^*)}$ , имеющая центральное  $\chi^2$ -распределение,  $t_{k^*}^2 = 0$ ,  $y^{(k)}$  – реализация случайной величины  $\xi^{(k)}$ ,  $\text{pr}_{\chi^2}(\cdot, t_k^2)$  – плотность распределения  $\chi^2$  с данным числом степеней свободы ( $\approx N$ ) и параметром нецентральности  $t_k^2$ ,  $k = \overline{0, 9}$ . Пусть предъявлены десять значений  $y^{(0)}, \dots, y^{(9)}$  случайных величин  $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(9)}$ , отвечающих одной реализации шума  $\nu$ . Если стоит задача отыскания случайной величины с параметром нецентральности, равным нулю, то, как известно [3, 4], решающее правило, минимизирующее математическое ожидание частоты появления ошибочных решений, предписывает считать таковой ту, реализация которой равна  $y^{k^*}$ , где

$$k^* = \arg \max_k p_{\chi^2}(y^{(k)}, t_k^2) = \arg \min_k y^{(k)}. \quad (15)$$

Как видно, решающее правило (15) совпадает с (14).

**Лемма 1.** Пусть в равенстве (1) координаты  $\nu_{ij}$  вектора шума  $\nu$  одинаково распределены, независимы,  $E\nu_{ij} = 0$  и  $E\nu_{ij}^2 = \sigma^2 < \infty$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Тогда морфологическое решающее правило (14) асимптотически при  $N \rightarrow \infty$  минимизирует математическое ожидание числа ошибочных решений.

---

ных изображениях можно не учитывать тот факт, что оператор  $P_{f^{(k)}}$ , вообще говоря, не является ортогональным проектором при наличии условий вида (12), так как неортогональность проектора  $P_{f^{(k)}}$  влечет неравенство  $\text{rank } P_{f^{(k)}} \leq s$  вместо равенства  $\text{rank } P_{f^{(k)}} = s$ , и это различие при  $N \gg s$  не играет роли в последующем рассуждении.

<sup>4</sup>Изображение  $g$  называется сравнимым по форме с изображением  $f$ , если  $g \in \mathcal{V}_f$  [6].

## 2. Теоретико-возможностные аналоги традиционных решений

Во введении представлены ставшие уже традиционными решающие правила, оптимальность которых в том или ином смысле доказана теоретически.

В этом разделе построены стратегии решений, аналогичные традиционным, но сформулированные для теоретико-возможностных моделей, рассмотренных в [8]. Здесь и далее будут приведены некоторые результаты из этой книги.

### 2.1. Теоретико-возможностное морфологическое решение

Пусть, как и ранее,  $f^{(k)} = \{f_{ij}^{(k)}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  – эталонное изображение цифры « $k$ »,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , причем  $f^{(k)} = 0 \cdot \chi^{(k),0} + 1 \cdot \chi^{(k),1}$ ;  $\chi^{(k),q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $q = 0, 1$  – индикаторные функции множеств постоянной яркости (0 и 1) на  $f^{(k)}$ ,  $k = \overline{0, 9}$ .

Предъявляемое для узнавания изображение  $g \in \mathbb{R}^N$  будем считать значением нечеткого вектора  $\xi$ , который формируется как сумма вектора  $f^{(\varkappa)}$  – эталонного изображения одной из цифр – и нечеткого вектора  $\nu \in \mathbb{R}^N$ , распределение которого неизвестно, моделирующего шум. Здесь  $\varkappa$  – нечеткий элемент, имеющий дискретное распределение возможностей, принимающий значения от 0 до 9 (для простоты будем считать, что  $P(\varkappa = k) = 1, \forall k = \overline{0, 9}$ , то есть все изображения цифр, предъявляемые для узнавания, априори равновозможны).

Форму  $\mathcal{V}_{f^{(k)}}$  эталонного изображения  $f^{(k)}$  определим как двумерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^N$ , линейную оболочку, натянутую на  $\chi^{(k),0}$  и  $\chi^{(k),1}$ , то есть

$$\mathcal{V}_{f^{(k)}} = \left\{ h \in \mathbb{R}^{m \times n} : h = \sum_{q=0}^1 c_q \chi^{(k),q}, -\infty < c_0 < +\infty, -\infty < c_1 < +\infty \right\},$$

и соответственно  $P_{f^{(k)}}$  – как ортогональный проектор на  $\mathcal{V}_{f^{(k)}}$ :

$$P_{f^{(k)}}g = \sum_{q=0}^1 c_q^{(k)}(g)\chi^{(k),q}, \quad g \in \mathbb{R}^N,$$

где  $c_q^{(k)}(g) = \frac{(g, \chi^{(k),q})}{\|\chi^{(k),q}\|^2}$ ,  $k = \overline{0, 9}$ ,  $q = 0, 1$ .

Рассмотрим вектор  $c^{(k)}(g) = \begin{pmatrix} c_0^{(k)}(g) \\ c_1^{(k)}(g) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Введем обозначения:  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $H^{(k)} = \begin{pmatrix} \|\chi^{(k),0}\|^2 & 0 \\ 0 & \|\chi^{(k),1}\|^2 \end{pmatrix}$ . Суммарная яркость проекции предъявленного изображения  $g$  на форму  $V_{f^{(k)}}$  равна  $(c^{(k)}(g), H^{(k)}e)$ . С другой стороны, при фиксированной суммарной яркости проекции, величина  $c_1^{(k)}(g) - c_0^{(k)}(g)$  тем больше, чем контрастнее изображение проекции  $P_{f^{(k)}}g$ .

Естественно предположить, что при прочих равных условиях (то есть при фиксированной средней яркости) чем контрастнее проекция изображения  $g$  на форму эталонного изображения цифры « $k$ », тем больше возможность того, что  $g$  является изображением цифры « $k$ ».

С учетом этих рассуждений, условную при условии  $\xi = g$  возможность того, что предъявленное изображение  $g$  в действительности является искаженным шумом изображением цифры  $k$ , определим следующим образом:

$$P(\varkappa = k | \xi = g) = F\left(\frac{(c^{(k)}(g), b)}{(c^{(k)}(g), H^{(k)}e)}\right), \quad (16)$$

где функция  $F(\cdot)$  строго монотонно возрастает от 0 до 1 на всей области определения, а  $b = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ .

Решение, минимизирующее необходимость ошибки, принимается по максимуму условной возможности, [8], то есть выбирается номер цифры  $k^*$ , такой, что

$$k^* = \arg \max_{k=0 \dots 9} P(\varkappa = k | \xi = g). \quad (17)$$

## 2.2. Теоретико-возможностный аналог байесовской стратегии

Предъявляемое для узнавания изображение  $g$  будем считать значением нечеткого элемента  $\eta$ , который формируется как сумма нечеткого вектора  $f^{(\varkappa)}$  – эталонного изображения одной из цифр – и нечеткого вектора  $\nu$ , моделирующего шум, где нечеткий элемент  $\varkappa \in \{0, \dots, 9\}$ . Пусть задано распределение возможностей  $\varphi^{\nu_{ij}}(\cdot) = \varphi(\cdot)$  для координат вектора шума,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и координаты  $\nu$  независимы в теоретико-возможностном смысле, [8]. Выражение для условного при условии  $\varkappa = k$  распределения возможности нечеткого элемента  $\eta$  при условии, что  $\eta$  сформировано на основании эталонного изображения цифры « $k$ », имеет вид

$$\varphi^{\eta|\varkappa}(g|k) = \min_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} \varphi(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}), \quad g \in \mathbb{R}^N, \quad k = 0, \dots, 9.$$

Значение  $\varphi^{\eta|\varkappa}(g|k)$  есть возможность равенства  $\eta = g$  при условии, что  $\varkappa = k$ . Поскольку [8]

$$P(\varkappa = k, \eta = g) = \min(\varphi^{\eta|\varkappa}(g|k), P(\varkappa = k)),$$

то в предположении о равновозможности  $P(\varkappa = k) = 1, \forall k = \overline{0, 9}$ ,

$$P(\varkappa = k, \eta = g) = \min_{i=\overline{1,n}} \min_{j=\overline{1,m}} \varphi(g_{ij} - f_{ij}^{(k)}).$$

Стратегия, согласно которой решение о принадлежности предъявленного для узнавания изображения  $g$  к классу « $k^*$ » = « $k^*(g)$ » принимается по максимуму этой возможности, то есть

$$k^*(g) = \arg \max_k P(\varkappa = k, \eta = g). \quad (18)$$

**Лемма 2.** Пусть в (1) координаты вектора шума  $\nu$  суть значения одинаково распределенных независимых нечетких элементов, а  $f$  – значение нечеткого вектора  $f^{(\varkappa)}$ , причем все значения  $k$  нечеткого элемента  $\varkappa$  равновозможны. Тогда решающее правило (18) минимизирует необходимость ошибки, [8].

### 3. Статистическое моделирование нечеткого элемента

В разделе 2.2 моделью шума служил нечеткий элемент. При исследовании свойств теоретико-возможностных решений на ЭВМ в качестве реализации нечеткого элемента выбирается исход стохастического эксперимента. Если необходимо получить реализацию нескольких нечетких элементов, стохастический эксперимент должен проводиться со случайным вектором соответствующей размерности. При этом возникает вопрос: какому классу должно принадлежать распределение вероятностей случайного вектора, чтобы моделируемый с его помощью нечеткий вектор имел заранее заданное распределение возможностей? Этому вопросу посвящен настоящий параграф.

#### 3.1. Связь дискретного вероятностного и дискретного возможностного пространств

Пусть  $\Omega$  – конечное или счетное множество,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \dots\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  –  $\sigma$ -алгебра всех его подмножеств,  $\text{Pr}(\cdot)$  и  $P(\cdot)$  – соответственно вероятностная и возможностная меры, заданные на элементах  $\mathcal{F}$  и принимающие значения в  $[0, 1]$ . Тройки  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$  и  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  суть вероятностное и возможностное пространства.

**Определение 3.** Возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  будем называть согласованным с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , если  $\forall A, B \in \mathcal{F} : \text{Pr}(A) \geq \text{Pr}(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$ .

Среди всех возможностных пространств  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , согласованных с данным вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , существует, очевидно, пространство с тривиальной мерой  $P(\cdot)$ :  $\forall A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset : P(A) = 1, P(\emptyset) = 0$ , то есть класс согласованных с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$  возможностных пространств не пуст.

**Определение 4.** Возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  будем называть максимально согласованным с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , если  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  согласовано с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , и для любого другого  $(\Omega, \mathcal{F}, P')$ , согласованного с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$  выполняется условие

$$\forall A, B \in \mathcal{F} : P'(A) > P'(B) \Rightarrow P(A) > P(B).$$

Определения 3.1, 3.1 даны в соответствии с [8], гл. 5, §1. Там же указан алгоритм построения возможностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , максимально согласованного с данным вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Полученному в [8] результату можно дать следующую формулировку. Перенумеруем элементы  $\Omega$  таким образом, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$\text{Pr}(\{\omega_1\}) \geq \text{Pr}(\{\omega_2\}) \geq \dots \geq \text{Pr}(\{\omega_N\}) \geq \dots > 0, \quad (19)$$

исключив тем самым элементы с нулевой вероятностью. Условия (19) далее всюду предполагаются выполненными. Обозначим  $p_k = P(\{\omega_k\})$ ,  $\text{pr}_k = \text{Pr}(\{\omega_k\})$  и  $F_k = \sum_{j=1}^k \text{pr}_j$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $F_0 \equiv 0$ .

**Теорема 1.** *Для того, чтобы пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  было (максимально) согласованным с пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия согласованности (максимальной согласованности):  $p_1 = 1$ ;  $p_k = p_{k+1}$ , если  $\text{pr}_k \leq 1 - F_k$ , и  $p_k \geq p_{k+1}$  ( $p_k > p_{k+1}$ ) в противном случае,  $k = 1, 2, \dots$ .*

**Доказательство.** Докажем сначала утверждения теоремы, относящиеся к условиям согласованности пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ .

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  согласовано с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Необходимость требования  $p_1 = 1$  вытекает из того, что согласно условию (19)

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_k\}\right) = \sup_{k=1 \dots \infty} p_k \text{ и}$$

$$1 = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N \geq \dots \quad (20)$$

Пусть  $\text{pr}_k \leq 1 - F_k$ , но  $p_k > p_{k+1}$ . Выберем события  $A = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots\}$  и  $B = \{\omega_k\}$ . Тогда  $\text{Pr}(A) = 1 - F_k$ ,  $\text{Pr}(B) = \text{pr}_k$ , так что  $\text{Pr}(A) \geq \text{Pr}(B)$ . С другой стороны,

$$P(A) = \sup_{i=k+1 \dots \infty} p_i = p_{k+1} < p_k = P(B),$$

так что условие согласованности возможностного пространства с вероятностным не выполнено. Следовательно, если  $\text{pr}_k \leq 1 - F_k$ , то  $p_k \leq p_{k+1}$ , что вместе с (20) означает  $p_k = p_{k+1}$ . Тем самым показана необходимость всех условий теоремы.

Пусть условия теоремы выполнены. Очевидно, что  $\forall A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset : \exists k_A : \text{pr}_{k_A} \leq \text{Pr}(A) \leq 1 - F_{k_A-1}$ . В самом деле, любое  $A \in \mathcal{F}$  представимо в виде  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap \{\omega_i\})$ , и если  $A \neq \emptyset$ , то среди чисел  $i : A \cap \{\omega_i\} \neq \emptyset$  можно выбрать минимальное. Обозначим его  $k_A$ :

$$k_A = \min_{i=1 \dots \infty} \{i \mid i = 1, 2, \dots, \omega_i \in A\}.$$

Тогда

$$\text{pr}_{k_A} \leq \text{Pr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Pr}(A \cap \{\omega_i\}) = \sum_{i=k_A}^{\infty} \text{Pr}(A \cap \{\omega_i\}) \leq \sum_{i=k_A}^{\infty} \text{pr}_i = 1 - F_{k_A-1}.$$

Выберем произвольные  $A, B \in \mathcal{F}, \text{Pr}(A) \geq \text{Pr}(B) > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Pr}(A) &= \text{pr}_{k_A} + \sum_{i=k_A+1}^{\infty} \text{Pr}(A \cap \{\omega_i\}), \\ \text{Pr}(B) &= \text{pr}_{k_B} + \sum_{i=k_B+1}^{\infty} \text{Pr}(B \cap \{\omega_i\}), \end{aligned}$$

и из  $\text{Pr}(A) \geq \text{Pr}(B)$  вытекает  $1 - F_{k_A-1} \geq \text{pr}_{k_B}$ , ибо  $1 - F_{k_A-1} \geq \text{pr}_{k_A} + \sum_{i=k_A+1}^{\infty} \text{Pr}(A \cap \{\omega_i\}) \geq \text{pr}_{k_B} + \sum_{i=k_B+1}^{\infty} \text{Pr}(B \cap \{\omega_i\}) \geq \text{pr}_{k_B}$ . С другой стороны,  $P(A) = p_{k_A}, P(B) = p_{k_B}$ . Если  $k_A \leq k_B$ , то  $P(A) \geq P(B)$ . Если же  $k_A > k_B$ , то, поскольку  $\text{pr}_{k_B} \leq 1 - F_{k_A-1}$ , справедливы неравенства

$$\text{pr}_{k_A} \leq \text{pr}_{k_A-1} \leq \dots \leq \text{pr}_{k_B} \leq 1 - F_{k_A-1} \leq \dots \leq 1 - F_{k_B},$$

то есть  $\forall j = k_B, \dots, k_A - 1 : \text{pr}_j \leq 1 - F_j$ . Тогда, в силу условий теоремы,  $\forall j = k_B, \dots, k_A - 1 : p_j = p_{j+1}$ , в частности,  $P(A) = p_{k_A} = p_{k_B} = P(B)$ .

Теперь перейдем к доказательству необходимости условий теоремы для максимальной согласованности  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Пусть  $\text{pr}_k > 1 - F_k$ , но  $p_k = p_{k+1}$ . Тогда возьмем другую возможностную меру  $P'(\cdot)$ , такую, что  $(\Omega, \mathcal{F}, P')$  согласовано с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$  и  $P'(\{\omega_k\}) > P'(\{\omega_{k+1}\})$ . Для множеств  $A = \{\omega_k\}$  и  $B = \{\omega_{k+1}\}$   $P'(A) > P'(B)$ , но  $P(A) = P(B)$ , так что  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  является возможным пространством, согласованным, но не максимально согласованным с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Тем самым доказана необходимость условия со строгим неравенством; необходимость остальных условий очевидна.

Пусть выполнены условия максимальной согласованности  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Тогда, как было показано ранее, возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  согласовано с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Возьмем другую возможность  $P'(\cdot)$ , такую, что  $(\Omega, \mathcal{F}, P')$  согласовано с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , и выберем два множества  $A, B \in \mathcal{F}$ :  $P'(A) > P'(B)$ . Тогда  $P'(A) = P'(\{\omega_{k_A}\}) > P'(B) = P'(\{\omega_{k_B}\})$ , откуда  $k_A < k_B$  и  $\exists j : k_A \leq j \leq k_B - 1 : \text{pr}_j > 1 - F_j$ . Следовательно, для этого номера  $j : p_j > p_{j+1}$ , а потому  $P(A) = p_{k_A} \geq p_j > p_{j+1} \geq p_{k_B} = P(B)$ . Достаточность условий доказана.

Рассмотрим ситуацию, в некотором смысле обратную предыдущей, в которой задано возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , для которого выполняются соотношения

$$1 = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N \geq \dots > 0, \quad (21)$$

где  $p_k = P(\{\omega_k\})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и требуется построить класс вероятностных пространств  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , с каждым из которых  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (максимально) согласовано. Требование (21) ограничивает класс рассматриваемых возможностных пространств, ибо не всякая счетная последовательность  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , может быть путем перенумерации элементов приведена к виду (21). Например, из рассмотрения придется исключить такие счетные возможностные пространства, в которых, начиная с некоторого номера  $k \geq 1$ ,  $p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < \dots \leq 1$ . С другой стороны, в случае конечных возможностных пространств требование (21) может быть выполнено всегда.

**Теорема 2. 1.** Для того, чтобы возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , в котором возможность  $P$  определена значениями  $P(\{\omega_i\}) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , упорядоченными согласно (21), было согласовано с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , необходимо и достаточно, чтобы функция распределения вероятностей

$$F_s = \sum_{k=1}^s \text{pr}_k, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \text{где } \text{pr}_k = \text{Pr}(\{\omega_k\}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{удовлетворяют условию (19), принадлежала классу}$$

творяют условию (19), принадлежала классу

$$Q = \left\{ F_s = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{j=1}^s 2^j \varepsilon_j, \quad s = 1, 2, \dots; \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\} \in \mathcal{E} \right\},$$

$$\text{где } \mathcal{E} = \left\{ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\} : |\varepsilon_s| < \frac{1}{2^s} \left( 2 - \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j \right), \quad s = 1, 2, \dots, \quad \varepsilon_s \leq \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^s} \left( 2 - \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j \right) + \varepsilon_{s-1}, \quad s = 2, 3, \dots, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N+1}} \left( 2 - \sum_{s=1}^N 2^s \varepsilon_s \right) = \right.$$

$$\left. 0, \quad \text{причем } \varepsilon_s > 0 \text{ при } p_s > p_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots \right\}.$$

2. Для того, чтобы данное возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  было максимально согласовано с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия пункта 1 настоящей теоремы при дополнительных ограничениях на  $\varepsilon_s$ :  $\varepsilon_s \leq 0$ , если  $p_s = p_{s+1}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ .

3. Класс  $Q$  непуст как в пункте 1, так и в пункте 2.

**Доказательство.** 1. Пусть возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  согласовано с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ . Обозначим

$$\varepsilon_s = \text{pr}_s - (1 - F_s). \tag{22}$$

Из (22) и определения  $F_s = \sum_{k=1}^s \text{pr}_k$  получается рекуррентное соотношение для  $F_s$ :

$$2F_s = 1 + F_{s-1} + \varepsilon_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad F_0 = 0, \tag{23}$$

---

<sup>5</sup> Подразумевается, что при  $k = 0$   $\sum_{j=1}^k 2^j \varepsilon_j = 0$ .

которое, как нетрудно убедиться, эквивалентно соотношениям

$$F_s = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{j=1}^s 2^j \varepsilon_j, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$\text{и } \text{pr}_s = \frac{1}{2^s} + \frac{\varepsilon_s}{2} - \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j, \quad s = 1, 2, \dots. \quad (25)$$

Для того, чтобы величины  $\text{pr}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , представляли собой вероятности, удовлетворяющие условиям (19), необходимо и достаточно, чтобы в (24), (25)

$$F_{s-1} < F_s < 1, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \text{pr}_k \geq \text{pr}_{k+1} > 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (26)$$

Подставляя в (26) выражения (24), получим

$$1 - 2^{-s+1} + 2^{-s} \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j < 1 - 2^{-s} + 2^{-s-1} \sum_{j=1}^s 2^j \varepsilon_j < 1.$$

или, что эквивалентно,

$$|\varepsilon_s| < \frac{1}{2^s} \left( 2 - \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j \right), \quad s = 1, 2, \dots. \quad (27)$$

Подставляя во вторую группу неравенств (26) выражения (25), получим условие

$$\varepsilon_s \leq \frac{1}{2^s} \left( 2 - \sum_{j=1}^{s-1} 2^j \varepsilon_j \right) + \varepsilon_{s-1}, \quad s = 2, 3, \dots. \quad (28)$$

Условие нормировки  $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = 1$  при подстановке выражения для  $F_N$  непосредственно из (24) дает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N+1}} \left( 2 - \sum_{s=1}^N 2^s \varepsilon_s \right) = 0. \quad (29)$$

Наконец, если  $p_s > p_{s+1}$ , то, в соответствии с теоремой 1,  $\varepsilon_s = \text{pr}_s - (1 - F_s) > 0$ . Тем самым доказана необходимость условий пункта 1 настоящей теоремы.

Из теоремы 1 следует, что, согласно (22),

$$\varepsilon_s > 0 \Leftrightarrow p_s > p_{s+1},$$

а потому условия пункта 1 являются и достаточными для того, чтобы возможностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  было согласовано с вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ .

2. Максимальная согласованность пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с  $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$  в обозначениях настоящей теоремы эквивалентна выполнению условий

$$\begin{aligned} \varepsilon_s > 0 &\Leftrightarrow p_s > p_{s+1}, \\ \varepsilon_s \leq 0 &\Leftrightarrow p_s \leq p_{s+1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Комбинируя результаты теоремы 1 и пункта 1 настоящей теоремы, нетрудно получить утверждение пункта 2.

3. Покажем, что существует последовательность  $\varepsilon_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , удовлетворяющая условиям (27), (28), (29) и (30).

Очевидно, что для  $s = 1$  условие (27) превращается в  $|\varepsilon_1| < 1$ , а потому может быть выполнено. Предположим, что оно выполняется для всех  $s = 1, 2, \dots, k$ . Тогда

$$|\varepsilon_k| + \Delta = \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right), \quad \Delta > 0.$$

Для  $s = k + 1$  условие (27) выглядит как

$$|\varepsilon_{k+1}| < \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_k. \tag{31}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_k > \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right) - \frac{1}{2} |\varepsilon_k| = \\ & = \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^k} \left( 2 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \varepsilon_j \right) - \Delta \right) = \frac{\Delta}{2} > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что условие (31) также может быть выполнено (правая часть неравенства положительна).

Условие (27) позволяет выбрать любое  $\varepsilon_s$  как большим 0, так и меньшим либо равным 0, что означает, что (30) также может быть выполнено.

Выбирая теперь  $\varepsilon_s = 0$ , если  $p_s = p_{s-1}$ , получим, что условие (28) выполняется всегда, так как оно является следствием (27) при  $\varepsilon_{s-1} \geq 0$ .

Наконец, при таком выборе  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_s \geq 0$ , условие нормировки (29) всегда выполнено, поскольку  $0 \leq \sum_{j=1}^s 2^s \varepsilon_s < 2$ ,  $\forall s = 1, 2, \dots$

**Замечание.** Для случая конечного числа  $N$  элементов множества  $\Omega$  теорема 2 остается справедливой. В условии нормировки исчезает предел, и оно может быть выполнено при любом выборе  $\varepsilon_k$ ,  $k < N$ , если только для этих  $\varepsilon_k$  выполняется (27). Тогда, выбрав

$$\varepsilon_N = \frac{1}{2^N} \left( 2 - \sum_{j=1}^{N-1} 2^j \varepsilon_j \right), \quad (32)$$

получим  $F_N = 1$ .

### 3.2. Моделирование независимых нечетких элементов

Нетрудно видеть, что задача моделирования совокупности  $N$  независимых нечетких элементов с одинаковым дискретным распределением  $\varphi(\cdot)$  сводится к моделированию одного нечеткого элемента с

дискретным распределением. В самом деле, пусть  $(\Omega^N, \mathcal{F}(\Omega^N), P_N)$  – возможностное пространство, где  $\Omega^N = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega$  – прямое произведение  $N$  счетных множеств  $\Omega$ ;  $\mathcal{F}(\Omega^N)$  –  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств такого прямого произведения;  $P_N(\cdot)$  – возможность, определенная на  $\mathcal{F}(\Omega^N)$  и обладающая следующим свойством:

$$P_N(\{\omega_{k_1}\} \times \dots \times \{\omega_{k_N}\}) = \min_{i=1\dots N} \varphi(\omega_{k_i}).$$

Тогда нечеткие элементы  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , каждый из которых принимает значения в  $\Omega$  с возможностью  $P(\xi_k = \omega_l) = \varphi(\omega_l) = p_l$ , образуют нечеткий вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \Omega^N$  с распределением возможностей  $\varphi^\xi(x) = P_N(\{x\})$ ,  $x \in \Omega^N$ ; его координаты являются независимыми в теоретико-возможностном смысле.

Построим вероятностное пространство  $(\Omega^N, \mathcal{F}(\Omega^N), \text{Pr}_N)$ , такое, что определенное выше возможностное пространство максимально с ним согласовано. Пусть случайный вектор  $\eta$  контролируется распределением вероятностей  $\text{pr}^\eta(\cdot) : \text{pr}^\eta(x) = \text{Pr}_N(\{x\})$ ,  $x \in \Omega^N$ . Реализацию случайного вектора  $\eta$  можно интерпретировать как совокупность значений  $N$  независимых нечетких элементов, каждый из которых имеет распределение  $\varphi(\cdot)$  возможностей его значений.

Например, рассмотрим ситуацию, когда требуется моделировать два независимых одинаково распределенных нечетких элемента  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , принимающих значения в  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  с возможностями  $P(\xi_i = j) = p_j$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = \overline{1, 4}$ ,  $1 = p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > 0$ . Совместное распределение этих нечетких элементов, или распределение нечеткого элемента  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , принимающего значения в  $\Omega^2$ , можно изобразить следующим образом (на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  здесь стоит возможность множества  $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} \subset \Omega^2$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ ):

|   |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|
|   | 1     | 2     | 3     | 4     |
| 1 | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
| 2 | $p_2$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
| 3 | $p_3$ | $p_3$ | $p_3$ | $p_4$ |
| 4 | $p_4$ | $p_4$ | $p_4$ | $p_4$ |

Согласно изложенной выше схеме значением нечеткого элемента  $\xi \in \Omega^2$  следует считать одну реализацию случайного вектора  $\eta =$

$(\eta_1, \eta_2) \in \Omega^2$ , распределение вероятностей которого выглядит, например, так (на пересечении строки  $i$  и столбца  $j$  здесь стоит вероятность множества  $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} \subset \Omega^2$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ ):

|   |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|
|   | 1      | 2      | 3      | 4      |
| 1 | $pr_1$ | $pr_2$ | $pr_3$ | $pr_4$ |
| 2 | $pr_2$ | $pr_2$ | $pr_3$ | $pr_4$ |
| 3 | $pr_3$ | $pr_3$ | $pr_3$ | $pr_4$ |
| 4 | $pr_4$ | $pr_4$ | $pr_4$ | $pr_4$ |

причем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< pr_1 < 1; \\ \frac{1 - pr_1}{4} &< pr_2 < \frac{1 - pr_1}{3}; \\ \frac{1 - pr_1 - 3pr_2}{6} &< pr_3 < \frac{1 - pr_1 - 3pr_2}{5}; \\ pr_4 &= \frac{1 - pr_1 - 3pr_2 - 5pr_3}{7}. \end{aligned}$$

Последнее равенство, очевидно, обеспечивает нормировку. Покажем, как получена, например, пара неравенств во второй строке (неравенства в других строках получены аналогично). Рассмотрим множества  $A = \{\omega_2\} \times \{\omega_2\} = \{\omega_2\}^2$  и  $B = (\Omega \times \Omega) \setminus ((\{\omega_1\} \times \{\omega_1\}) \cup (\{\omega_2\} \times \{\omega_1\}) \cup (\{\omega_1\} \times \{\omega_2\}) \cup (\{\omega_2\} \times \{\omega_2\})) = \Omega^2 \setminus \{\omega_1, \omega_2\}^2$ . Для них  $P_2(A) = p_2 > p_3 = P_2(B)$ , так что для максимальной согласованности получаем условие  $Pr_2(A) > Pr_2(B)$ . Но  $Pr_2(A) = pr_2$ , а  $Pr_2(B) = 1 - pr_1 - 3pr_2$ , откуда следует левое неравенство во второй строке. Поскольку множество  $A$  имеет минимальную вероятность среди непустых множеств, включенных в  $\{\omega_1, \omega_2\}^2$ , а множество  $B$  — максимальную вероятность среди множеств, включенных в  $\Omega^2 \setminus \{\omega_1, \omega_2\}^2$ , то полученное неравенство является необходимым и достаточным. Правое неравенство во второй строке необходимо и достаточно для того, чтобы при уже выбранных  $pr_1$  и  $pr_2$  можно было выбрать оставшиеся  $pr_k > 0$ ,  $k = 3, 4$ ; оно следует из требования  $Pr_2(\{\omega_1, \omega_2\}^2) = pr_1 + 3pr_2 < 1$ .

На практике при стохастическом моделировании нечетких элементов на ЭВМ вместо совместных распределений вероятностей

удобнее использовать маргинальные и условные распределения. В рассмотренном примере маргинальные распределения вероятностей случайных величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  совпадают и равны  $\Pr(\eta_k = i) = \sum_{j=1}^4 \min(\text{pr}_i, \text{pr}_j)$ ,  $i \in \Omega$ ,  $k = 1, 2$ , а условное распределение  $\eta_2$  при условии  $\eta_1$

$$\Pr(\eta_2 = i | \eta_1 = j) = \frac{\min(\text{pr}_j, \text{pr}_i)}{\sum_{k=1}^4 \min(\text{pr}_k, \text{pr}_j)}, \quad i, j = \overline{1, 4},$$

как видно, зависит от значения  $\eta_1$ , то есть случайные величины, которыми моделируются независимые в теоретико-возможностном смысле нечеткие элементы, должны быть зависимы в теоретико-вероятностном смысле.

**Лемма 3.** *Для стохастического моделирования  $N$  независимых одинаково распределенных нечетких элементов  $\xi_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , принимающих значения в конечном множестве  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  с возможностями  $1 = p_1 > \dots > p_m > 0$ , можно использовать  $N$  случайных величин  $\eta_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , таких, что маргинальное распределение каждой из них равно*

$$\Pr(\eta_k = \omega_j) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{N-1}=1}^m \min(\text{pr}_j, \text{pr}_{i_1}, \dots, \text{pr}_{i_{N-1}}), \quad j = 1, \dots, m,$$

а условные распределения

$$\begin{aligned} \Pr(\eta_{k+1} = \omega_{j_{k+1}} | \eta_1 = \omega_{j_1}, \dots, \eta_k = \omega_{j_k}) &= \\ &= \frac{\sum_{i_{k+2}=1}^m \dots \sum_{i_N=1}^m \min(\text{pr}_{j_1}, \dots, \text{pr}_{j_{k+1}}, \text{pr}_{i_{k+2}}, \dots, \text{pr}_{i_N})}{\sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_N=1}^m \min(\text{pr}_{j_1}, \dots, \text{pr}_{j_k}, \text{pr}_{i_{k+1}}, \dots, \text{pr}_{i_N})}, \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, N - 1, \quad j_k = 1, \dots, m;$$

причем

$$\frac{1 - \sum_{r=1}^{k-1} (r^N - (r-1)^N) \text{pr}_r}{k^N - (k-1)^N + 1} < \text{pr}_k < \frac{1 - \sum_{r=1}^{k-1} (r^N - (r-1)^N) \text{pr}_r}{k^N - (k-1)^N},$$

где  $k = 1, \dots, m-1$ , а  $\text{pr}_m$  определяется из условия нормировки:

$$(m^N - (m-1)^N) \text{pr}_m = 1 - \sum_{r=1}^{m-1} (r^N - (r-1)^N) \text{pr}_r.$$

При этом распределение нечеткого вектора  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$  будет максимально согласованным с распределением случайного вектора  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ .

#### 4. Сравнительный анализ работы алгоритмов

В этом разделе приведены результаты вычислительных экспериментов, в которых были реализованы приведенные выше методы распознавания.

Размер поля зрения для изображений был выбран равным  $100 \times 60$ ; изображения эталонных цифр имели всего два уровня яркости (см. рис. 1, крайний слева). Моделировались описанные выше алгоритмы при следующих условиях: к исходному изображению добавлялся аддитивный шум, имеющий а) нормальное  $N(0, \sigma^2)$  распределение вероятностей (плотность каждой из координат равна  $\text{pr}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ), б) равномерное распределение вероятностей  $U(-\sigma/\sqrt{2}, \sigma/\sqrt{2})$  (плотность равна  $\text{pr}(x) = (\sqrt{2}\sigma)^{-1}$ , если  $|x| \leq \sigma/\sqrt{2}$ , и  $\text{pr}(x) = 0$  в противном случае) и в) распределение возможностей, в некотором смысле согласованное с нормальным распределением вероятностей а) (см. рис. 1, второй, третий и четвертый слева соответственно).

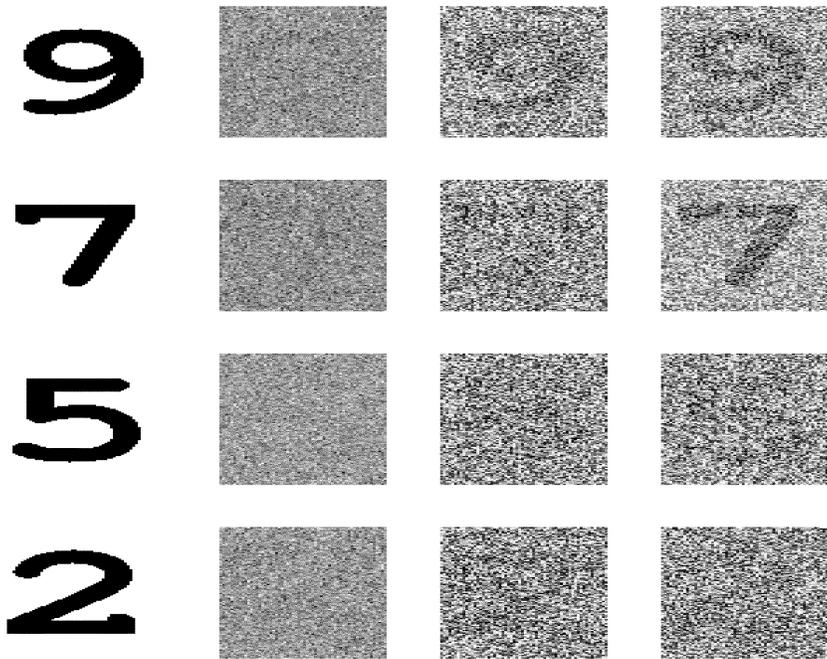


Рис. 1. Изображения цифр «9», «7», «5», «2»: эталонные (крайний слева столбец), искаженные нормально распределенным шумом (второй слева столбец), равномерно распределенным шумом (второй справа столбец) и шумом, моделирующим независимые одинаково распределенные нечеткие элементы (крайний справа столбец). Дисперсия координат случайного шума (по отношению к яркости белых точек на эталонном изображении) и «эффективная ширина» распределения возможностей нечеткого шума равны: 4.0 – для цифры «9», 6.0 – для «7», 8.0 – для «5», и 14.0 – для «2».

Точнее, в соответствии с теоремой 1 было построено распределение нечеткого элемента, максимально согласованное с дискретизованной версией нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$ . Затем для совокупности из  $N$  независимых копий такого нечеткого элемента, по алгоритму, указанному в лемме 3, было получено распределение вероятностей  $N$ -мерной случайной величины, координаты которой

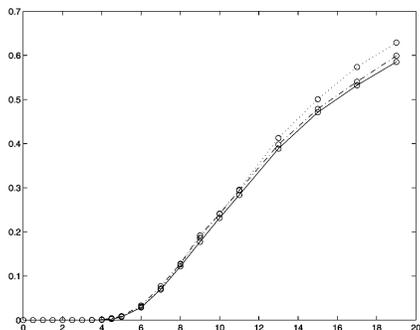


Рис. 2. Зависимость частоты ошибочных решений от дисперсии нормально распределенного шума. Для получения каждой точки проведено 10000 испытаний. Сплошная линия соответствует байесовскому алгоритму, штрихпунктир – традиционному морфологическому решению, пунктир – теоретико-возможностному варианту морфологического алгоритма.

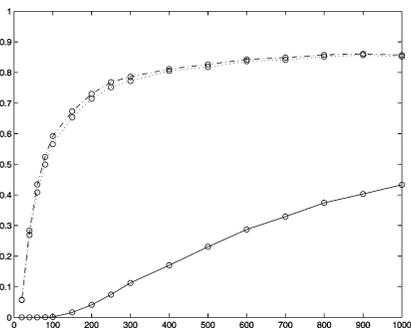


Рис. 3. Зависимость частоты ошибочных решений от «эффективной ширины» распределения возможностей нечеткого шума. Для получения каждой точки проведено 10000 испытаний. Сплошная линия соответствует нечеткому байесовскому алгоритму, штрихпунктир – традиционному морфологическому решению, пунктир – теоретико-возможностному варианту морфологического алгоритма.

оказались зависимыми в теоретико-вероятностном смысле, и их реализации отвечали значениям моделируемого шума. Дисперсия  $\sigma^2$

«исходного» нормального распределения вероятностей была названа «эффективной шириной» распределения возможностей моделируемого таким образом нечеткого элемента.

Для нахождения байесовского решения использовалась формула (3). Морфологическое решение было построено на основании выражения (14). В алгоритме, основанном на теоретико-возможностном аналоге морфологического решения использовалась формула (17), а нечеткое байесовское решение определено в (18).

Результаты численного эксперимента приведены на графиках (рис. 2, 3).

Статистический вариант байесовского алгоритма исследовался при добавлении только нормального и равномерно распределенного шума. Этот метод, как и следовало ожидать, показал наибольшую помехозащищенность и качество. Морфологическое решение (как традиционное, так и его нечеткий аналог) исследовалось для всех вариантов распределения вектора шума и показало высокую устойчивость и качество. Качество традиционного морфологического решения практически неотлично от качества байесовского решения; несколько ниже качество нечеткого аналога морфологического алгоритма.

Нечеткий аналог байесовского алгоритма (решение максимальной возможности) сравнивается с морфологическими алгоритмами при условии добавления к эталонным изображениям вектора шума, моделирующего значение нечеткого вектора с независимыми в теоретико-возможностном смысле одинаково распределенными координатами. Помехоустойчивость этого алгоритма оказалась существенно выше, чем у алгоритмов, основанных на морфологических методах. Это можно объяснить тем, что статистические свойства шума, моделирующего нечеткий вектор с независимыми координатами, не удовлетворяют требованиям, которые предъявляются к шуму для обеспечения асимптотической оптимальности морфологических методов (а именно, координаты вектора шума зависимы в теоретико-вероятностном смысле, см. лемму 1). Вместе с тем нечеткий аналог байесовского решения полностью учитывает такую модель формирования изображений, что и обеспечивает его высокую эффективность.

## Список литературы

- [1] Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
- [2] Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
- [3] Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
- [4] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
- [5] Пытьев Ю.П. Морфологический анализ изображений. ДАН СС-СР. 1983. Т. 269. №5. С. 1061–1064.
- [6] Пытьев Ю.П. Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М.: Наука, 1984. С. 41–82.
- [7] Pyt'ev Yu.P. Morphological Image Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. Vol. 3. No. 1. Pp. 19–28.
- [8] Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [9] Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.