

О стохастических моделях ВОЗМОЖНОСТИ*

Ю.П. Пытьев

Введение

Рассмотрим стохастический эксперимент \mathcal{E} , математической моделью которого является дискретное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ – конечное или счетное множество элементарных исходов \mathcal{E} , $\mathcal{P}(\Omega)$ – σ -алгебра всех подмножеств Ω , представляющих все мыслимые исходы \mathcal{E} , или, как принято говорить, – результаты испытаний, $\text{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ – вероятность, заданная своими значениями на элементарных исходах $\text{Pr}(\{\omega_i\}) = \text{pr}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots; \sum_{i=1}^{\infty} \text{pr}_i = 1$, определяющими вероятность любого результата испытаний $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ равенством

$$\text{Pr}(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \text{pr}_i. \quad (1)$$

В рамках эксперимента \mathcal{E} невозможно дать содержательную интерпретацию значения вероятности $\text{Pr}(A)$ и указать способ ее эмпирического определения. Для этого следует обратиться к эксперименту \mathcal{E}^n , который можно представить себе как n копий \mathcal{E} , выполненных взаимно независимо. Эксперимент \mathcal{E}^n принято называть последовательностью n независимых испытаний.

Математической моделью \mathcal{E}^n , то есть n раз независимо воспроизведенного \mathcal{E} , является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \text{Pr}_n)$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 44/99Р

– n -ая степень $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, где Ω^n – множество всех последовательностей $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})$, $\omega_{i_k} \in \Omega$, $k = 1, \dots, n$, описывающих элементарные исходы \mathcal{E}^n , $\mathcal{P}(\Omega^n)$ – σ -алгебра всех подмножеств Ω^n , представляющих исходы \mathcal{E}^n – результаты n независимых испытаний, Pr_n – вероятность, заданная на множестве всех элементарных исходов \mathcal{E}^n равенствами

$$\text{Pr}_n(\{(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})\}) = \text{pr}_{i_1} \dots \text{pr}_{i_n}, \quad (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n, \quad (2)$$

определяющими факт независимости испытаний.

$$\text{Пусть } A \text{ – некоторый исход } \mathcal{E}, \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}, \omega \in \Omega,$$

– индикаторная функция A и $\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi_A(\omega_{i_k})$, $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n$, – случайная величина на $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \text{Pr}_n)$, равная частоте исхода A в последовательности n независимых испытаний.

Как известно¹, с увеличением n вероятность любого отклонения частоты $\nu_A^{(n)}$ от вероятности $\text{Pr}(A)$ стремится к нулю, точнее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\text{Pr}_n((\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \in \Omega^n, |\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) - \text{Pr}(A)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Этот факт лежит в основе так называемой частотной интерпретации вероятности, ее статистического толкования, согласно которому в достаточно длинной последовательности независимых повторений \mathcal{E} частота любого его исхода A оценивается вероятностью A , а если последняя неизвестна, то частота A является ее экспериментальной оценкой. Имея ввиду цели этой статьи, подчеркнем, что значение $\text{Pr}(A)$ следует рассматривать как прогнозируемое значение частоты исхода A в достаточно длинной серии независимых испытаний, но не как элемент предвидения исхода A , не как меру возможности исхода A при каждом испытании.

Вместе с тем при любом определении возможности p_i исхода $\omega_i \in \Omega$ как меры, оценивающей обстоятельства, определяющие относительную предпочтительность реализации исхода ω_i в сравнении

¹Закон больших чисел, [1].

со всеми другими элементарными исходами \mathcal{E} , естественно считать, что $p_i \geq p_j$, если $rg_i \geq rg_j$, $i, j = 1, 2, \dots$. Неформальная мотивация в данном случае такова: чем больше вероятность rg_i исхода ω_i , тем чаще ω_i встретится в длинной серии испытаний, тем более возможен исход ω_i в каждом очередном испытании. Но для такого заключения не обязательно знать значения вероятностей rg_1, rg_2, \dots , достаточно лишь знать, как они упорядочены.

В связи с этими замечаниями рассмотрим стохастический эксперимент \mathcal{E} , математической моделью которого является класс \mathcal{Pr} дискретных вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, в которых значения вероятностей $rg_i = \text{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$ элементарных исходов \mathcal{E} подчинены лишь условиям упорядоченности² и нормировки

$$1 \geq rg_1 \geq rg_2 \geq \dots \geq 0, \quad rg_1 + rg_2 + \dots = 1, \quad (3)$$

а в остальном произвольны.

Определение 1. Класс всех вероятностей $\text{Pr}(\cdot)$ (1), определяемых последовательностями $rg \triangleq \{rg_1, rg_2, \dots\}$ вероятностей элементарных исходов, удовлетворяющих условиям (3), обозначим \mathbb{Pr} , соответственно класс вероятностных пространств $\mathcal{Pr} \triangleq \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr}), \text{Pr} \in \mathbb{Pr}\}$ является математической моделью \mathcal{E} ; далее класс \mathcal{Pr} называется стохастической моделью \mathcal{E} .

Знания одной лишь упорядоченности (3), конечно, недостаточно, чтобы охарактеризовать \mathcal{E} в терминах стандартного формализма теории вероятностей. Условия (3) подсказывают, что модель \mathcal{E} следует формулировать в терминах возможностей исходов \mathcal{E} , причем в ранговой шкале, в которой содержательно могут быть истолкованы не конкретные значения возможностей, а лишь отношения упорядоченности между ними, как это сделано, например, в теории возможностей, элементы которой представлены в [2].

Сопоставим \mathcal{E} , стохастическая модель которого определена как класс \mathcal{Pr} вероятностных пространств, класс \mathcal{P} возможностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, в которых значения возможностей $p_i \triangleq$

²Любое распределение вероятностей rg_1, rg_2, \dots может быть линейно упорядочено по убыванию путем перенумерации элементарных исходов (см. раздел 3)

$P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, элементарных исходов, определяющие возможность $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ формулой

$$P(A) \triangleq \sup_{i: \omega_i \in A} p_i, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad (4)$$

упорядочены так же, как вероятности в (3):

$$1 = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0. \quad (5)$$

Определим класс \mathbb{P} возможностей, *согласованный с классом вероятностей* \mathbb{P}_r , добавив к условию (5), согласующему упорядоченность возможностей элементарных исходов \mathcal{E} с упорядоченностью их вероятностей, аналогичные условия для произвольных исходов \mathcal{E} , точнее — для всех тех исходов $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ эксперимента, для которых неравенство $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ выполняется *для любой вероятности* $\text{Pr} \in \mathbb{P}_r$.

Определение 2. Максимальный по включению класс \mathbb{P} возможностей $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ назовем согласованным с классом \mathbb{P}_r вероятностей $\text{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ если выполнено следующее условие:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : \begin{array}{l} \text{если } \forall \text{Pr} \in \mathbb{P}_r \quad \text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B), \\ \text{то } \forall P \in \mathbb{P} \quad P(A) \leq P(B), \end{array} \quad (6)$$

где вероятность Pr и возможность P определены соответственно формулами (1) и (4). Класс \mathbb{P} , согласованный с \mathbb{P}_r , определяет теоретико-возможностную модель

$$\mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), \quad P \in \mathbb{P}\}$$

эксперимента \mathcal{E} , согласованную с его стохастической моделью \mathcal{P}_r условиями (3) и (6).

Заметим, что если класс \mathbb{P} согласован с классом \mathbb{P}_r и $\forall \text{Pr} \in \mathbb{P}_r : \text{Pr}(A) = \text{Pr}(B)$, то $\forall P \in \mathbb{P} : P(A) = P(B)$. Действительно, если $\forall \text{Pr} \in \mathbb{P}_r : \text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ и $\text{Pr}(A) \geq \text{Pr}(B)$, то согласно (6) $\forall P \in \mathbb{P} : P(A) \leq P(B)$ и $P(A) \geq P(B)$.

Заметим также, что поскольку по определению, $P(\Omega) = 1$, [2], то условие (6) содержит как частный случай условие (5), ибо в качестве A и B в (6) можно выбирать одноточечные множества $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, упорядоченные согласно (3).

Заметим, наконец, что в силу монотонности $\text{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ (1) и $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ (4), означающей, что

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B), \\ P(A) \leq P(B), \end{cases}$$

согласно (1) и (4) для любых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \forall \text{Pr} : & \begin{cases} \text{Pr}(A \cup B) \geq \max(\text{Pr}(A), \text{Pr}(B)), \\ \text{Pr}(A \cap B) \leq \min(\text{Pr}(A), \text{Pr}(B)), \end{cases} \\ \forall P : & \begin{cases} P(A \cup B) = \max(P(A), P(B)), \\ P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)). \end{cases} \end{aligned}$$

Далее в разделе 1 будет показано, что на самом деле требования (6) являются следствием условий (3) и (5) и тем самым последние определяют класс \mathbb{P} , согласованный с классом $\mathbb{P}\text{r}$, и теоретико-возможностную модель \mathcal{E} , согласованную с его стохастической моделью $\mathcal{P}\text{r}$.

В данном случае важен тот факт, что, хотя модель \mathcal{P} не определяет значение возможности $P(C)$ (4) любого³ исхода $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ эксперимента, тем не менее она *упорядочивает все исходы \mathcal{E} по значениям их возможностей*, а именно, для любых исходов A и B модель \mathcal{P} позволяет определить, какое из неравенств $P(A) \leq P(B)$ или $P(B) \leq P(A)$ имеет место, ибо согласно условиям (5) и формуле (4), например, $P(A) \leq P(B)$, если и только если $i(A) \triangleq \min_{\omega_k \in A} k \geq \min_{\omega_k \in B} k \triangleq i(B)$. Этот факт позволяет полностью охарактеризовать \mathcal{E} в терминах формализма теории возможностей [2] на основе его модели \mathcal{P} .

Дело в том, что в теории возможностей [2] шкала $\mathcal{L} = ([0, 1], \leq, \text{max}, \text{min})$ значений возможности, определенная как отрезок $[0, 1]$ числовой прямой с естественной упорядоченностью, определенной неравенством « \leq », и двумя правилами композиции: « max » как сложение « \oplus » и « min » как умножение « \odot », имеет обширную группу Γ

³за исключением $C = \emptyset$, $P(C) = 0$, и C , содержащих ω_1 , для которых $P(C) = 1$

изотонных автоморфизмов $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, определяющую то, что в [2] названо *принципом относительности возможности*. Согласно этому принципу все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, объявляются эквивалентными, эквивалентными считаются любые теоретико-возможностные утверждения, если в некоторых шкалах их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкалы.

Формально дело обстоит следующим образом. Пусть функция $\gamma(\cdot)$ определена и принимает значения в $[0, 1]$ и \mathcal{L} -шкала $([0, 1], \leq, +, \bullet) \triangleq ([0, 1], \leq, \max, \min)$.

Определение 3. Функция $\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ определяет отображение $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, называемое эндоморфизмом \mathcal{L} , если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in [0, 1] : \text{если } a \leq b, \text{ то } \gamma(a) \leq \gamma(b), \\ \gamma(a+b) = \gamma(a)+\gamma(b), \quad \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b), \\ \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = 1. \end{aligned}$$

Эндоморфизм γ называется автоморфизмом, если функция $\gamma(\cdot)$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$; автоморфизм γ^{-1} , определяемый функцией $\gamma^{-1}(\cdot)$, называется обратным к γ . Композиция $\gamma' \circ \gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ функций $\gamma'(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ определяется согласно равенству⁴ $\gamma' \circ \gamma(x) \triangleq \gamma'(\gamma(x))$, $x \in [0, 1]$, $\gamma' \circ \gamma$ -соответствующая композиция эндоморфизмов γ и γ' . Символ Γ далее обозначает как множество функций $\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, так и множество соответствующих эндоморфизмов $\gamma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (как правило, – автоморфизмов).

Обозначим символом $\mathcal{L} \rightarrow \gamma\mathcal{L}$ то, что далее называется переходом от шкалы \mathcal{L} к преобразованной шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, последнюю назовем гомоморфной (изоморфной, эквивалентной) \mathcal{L} , если γ -эндоморфизм (автоморфизм). Если $\mathcal{L}(\Omega)$ -класс функций $f(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega))$ -класс интегралов $p(\cdot) : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$, то при переходе $\mathcal{L} \rightarrow \gamma\mathcal{L}$ [2]:

- $a \rightarrow \gamma(a)$, $a \in [0, 1]$;
- $f(\cdot) \rightarrow \gamma \circ f(\cdot)$, где $\gamma \circ f(\omega) \triangleq \gamma(f(\omega))$, $\omega \in \Omega$,
- $p(\cdot) \rightarrow \gamma * p(\cdot)$, где $\gamma * p(f(\cdot)) \triangleq \gamma(p(\gamma^{-1} \circ f(\cdot)))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(\Omega)$.

⁴ $\gamma^{-1} \circ \gamma(x) = \gamma \circ \gamma^{-1}(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $(\gamma' \circ \gamma)^{-1}(\cdot) = \gamma^{-1} \circ \gamma'^{-1}(\cdot)$

При этом $P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}, \omega \in \Omega, A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

поэтому $\gamma * P(A) \triangleq \gamma * p(\chi_A(\cdot)) = \gamma(p(\gamma^{-1} \circ \chi_A(\cdot))) = \gamma(p(\chi_A(\cdot))) = \gamma(P(A))$, ибо $\gamma^{-1} \circ \chi_A(\cdot) = \chi_A(\cdot), \gamma(\cdot) \in \Gamma, A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Пусть $P(A)$ и $P(B)$ —возможности A и соответственно B в шкале \mathcal{L} , тогда в шкале $\gamma\mathcal{L}$ возможности A и B суть соответственно $\gamma(P(A))$ и $\gamma(P(B))$, причем неравенства $P(A) < P(B)$ и $\gamma(P(A)) < \gamma(P(B))$ эквивалентны, если γ —автоморфизм, а в противном случае не исключено, что неравенство $P(A) < P(B)$ повлечет равенство $\gamma(P(A)) = \gamma(P(B))$.

Далее, если не оговорено противное, Γ обозначает множество всех функций $\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, непрерывных, строго монотонно возрастающих и принимающих значения $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$. Поскольку каждая функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot) \in \Gamma$, и для любых двух функций $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\gamma'(\cdot) \in \Gamma$ их композиция $\gamma \circ \gamma'(\cdot) \in \Gamma$, то множество Γ является группой относительно операции умножения « \circ ». Далее функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и определяемые ими автоморфизмы $\gamma \in \Gamma$ будем называть изотонными, Γ -группой (всех) изотонных автоморфизмов $\mathcal{L}, \Gamma \circ \triangleq \{\gamma \circ, \gamma \in \Gamma\}$ и $\Gamma * \triangleq \{\gamma *, \gamma \in \Gamma\}$ —группами всех изотонных автоморфизмов класса $\mathcal{L}(\Omega)$ функций $f(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}$ и соответственно класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega))$ интегралов $p(\cdot) : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$. Если не оговорено противное $\tilde{\Gamma}$ далее обозначает как множество всех монотонно неубывающих функций $\tilde{\gamma}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1] = 0, \tilde{\gamma}(0) = 0, \tilde{\gamma}(1) = 1$, так и множество определяемых ими эндоморфизмов $\tilde{\gamma} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; \tilde{\Gamma} \circ \triangleq \{\tilde{\gamma} \circ, \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}\}$ и $\tilde{\Gamma} * \triangleq \{\tilde{\gamma} *, \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}\}$ обозначает множества эндоморфизмов $\tilde{\gamma} \circ : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$ и $\tilde{\gamma} * : \mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega)) \rightarrow \mathcal{L}$ соответственно; $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$.

Возвращаясь к принципу относительности, заметим, что в теории возможностей [2] любые возможности $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$ и $\tilde{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}$, равно как и соответствующие возможностные пространства $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ и $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{P})$ (и определяемые ими модели Э!) считаются эквивалентными (обозначение: $P \sim \tilde{P}, (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P) \sim (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{P})$), если существует функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, такая, что $\tilde{P}(A) = \gamma(P(A))$ для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. А поскольку единственным полным инвариантом распределения возможностей (5) относительно группы Γ изотонных преобразований $\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ является определен-

ная в (5) упорядоченность, или класс \mathbb{P} , если речь идет о соответствующих (5) возможностях, то в теории возможностей [2] содержательно, независимо от выбора шкалы, могут быть истолкованы не значения возможности, а лишь отношения « \langle », « \rangle » или « $=$ » между ними. Иначе говоря, в теории возможностей шкала \mathcal{L} играет роль «индивидуальной системы отсчета» исследователя, и содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели \mathcal{E} , которые не изменяются при преобразовании шкалы, не зависят от выбора \mathcal{L} . В частности, не зависит от выбора шкалы отмеченная выше упорядоченность *всех* исходов \mathcal{E} по значениям их возможностей. В этом смысле класс \mathcal{P} является «полноценной» моделью \mathcal{E} .

Кроме понятия согласованности класса \mathbb{P} с классом \mathbb{Pr} (см. определение 2) используются понятия согласованности возможности P с вероятностью Pr , класса $\mathbb{P}(\text{Pr})$ возможностей, согласованных с вероятностью Pr и т.д. По аналогии с определением 2 назовем *возможность P согласованной с вероятностью Pr , если выполнены следующие условия согласованности: $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ если $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$, то $P(A) \leq P(B)$ (и, как следствие, если $\text{Pr}(A) = \text{Pr}(B)$, то $P(A) = P(B)$).* Кроме того, естественно считать, что если $\text{Pr}(A) = 0$, $\text{Pr}(B) = 1$, то $P(A) = 0$, $P(B) = 1$. Это соглашение определяет согласованность шкалы значений возможности со шкалой значений вероятностей.

В дальнейшем будем исходить из определения «более сильной» согласованности P с Pr , включающей согласованность шкал.

Определение 4. *Возможность P называется согласованной с вероятностью Pr , если существует эндоморфизм $\tilde{\gamma}(\cdot) \in \tilde{\Gamma}$ такой, что $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \tilde{\gamma}(\text{Pr}(A)) \triangleq \tilde{\gamma} * \text{Pr}(A)$. Согласованность P с Pr обозначим символом $\text{Pr} \sim > P$.*

Возможность P называется *максимально согласованной с вероятностью Pr* , если $\text{Pr} \sim > P$ и $\forall \tilde{P} \text{ Pr} \sim > \tilde{P} \exists \tilde{\gamma}(\cdot) \in \tilde{\Gamma} \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \tilde{P}(A) = \tilde{\gamma}(P(A)) \triangleq \tilde{\gamma} * P(A)$. Максимальную согласованность P с Pr обозначим символом $\text{Pr} \approx > P$.

Обозначим

$$\mathbb{P}(\text{Pr}) = \{\gamma * P(\cdot), \gamma \in \Gamma\}, \quad \text{Pr} \approx > P,$$

класс всех возможностей, максимально согласованных с вероятностью⁵ \Pr . Если $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$, то эта формула определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot) : \mathbb{P}_\Gamma \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$, поскольку если $\Pr \approx > P$, то $P \in \mathbb{P}$, и, следовательно, $\mathbb{P}(\Pr) \subset \mathbb{P}$. В этом случае обратное к $\mathbb{P}(\cdot)$ отображение $\Pr(\cdot) : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$ определяется равенством⁶

$$\Pr(P) = \{\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma, P \in \mathbb{P}(\Pr)\}, \quad P \in \mathbb{P},$$

$\Pr(P)$ –класс всех вероятностей, с каждой из которых возможность $P \in \mathbb{P}$ максимально согласована. Включения $P \in \mathbb{P}(\Pr)$ и $\Pr \in \Pr(P)$, по определению, эквивалентны.

Заметим, что класс \mathcal{P} возможностных пространств может быть представлен в виде объединения попарно непересекающихся подклассов эквивалентных возможностных пространств, каждый из которых определяет в известном смысле «неприводимую», не допускающую дальнейшей «детализации» модель \mathcal{E} . Действительно, поскольку $\forall \gamma * \in \Gamma *$ включения $P(\cdot) \in \mathbb{P}$ и $\gamma * P(\cdot) \in \mathbb{P}$ эквивалентны, и $\forall P(\cdot) \in \mathbb{P}$ множество $\{\gamma * P(\cdot), \gamma * \in \Gamma *\} \subset \mathbb{P}$ является классом эквивалентных (и эквивалентных $P(\cdot)$) возможностей, то класс \mathbb{P} можно представить в виде объединения (континуума) попарно непересекающихся классов $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$, $\text{ord} \in [0, 1]$, эквивалентных возможностей

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\text{ord} \in [0, 1]} \mathbb{P}_{(\text{ord})}, \quad (26^*)$$

где ord –двоичное число из $[0, 1]$, определяющее «точную» упорядоченность распределения возможности $P(\cdot) \in \mathbb{P}_{(\text{ord})}$, определенную лишь отношениями⁷ « \approx » \sim «0» и « $>$ » \sim «1» (см. раздел 3). Каждый класс $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$, $\text{ord} \in [0, 1]$, определяет «неприводимую» модель \mathcal{E} как класс эквивалентных возможностных пространств $\mathcal{P}_{(\text{ord})} = \{(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}_{(\text{ord})}\}$, $\text{ord} \in [0, 1]$. При этом $\mathcal{P} = \bigcup_{\text{ord} \in [0, 1]} \mathcal{P}_{(\text{ord})}$.

Если P –любая возможность из $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$, то $\mathbb{P}_{(\text{ord})} = \{\gamma * P, \gamma * \in \Gamma\}$, а если $\hat{P} \in \mathbb{P}_{(0.11\dots)}$, то для любого $\text{ord} \in [0, 1]$ можно указать класс

⁵Если $\Pr \approx > P$, то $\forall \gamma \in \Gamma \quad \Pr \approx > \gamma * P$

⁶Классы $\mathbb{P}(\Pr), \Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$ и $\Pr(P), P \in \mathbb{P}$, подробно рассмотрены в разделе 3

⁷Например, 0.01110... соответствует $1 = p_1 = p_2 > p_3 > p_4 > p_5 = p_6$, где «ноль» перед «точкой» соответствует всегда верному равенству $1 = p_1$

$\tilde{\Gamma}_{(\text{ord})}$ эндоморфизмов $\tilde{\gamma} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, таких, что $\mathbb{P}_{(\text{ord})} = \{\tilde{\gamma} * \hat{P}, \tilde{\gamma} * \in \Gamma_{(\text{ord})}^*\}$.

С другой стороны, как показано в разделе 3, разбиению (26*) взаимно однозначно соответствует разбиение класса \mathbb{P}_{Γ} :

$$\mathbb{P}_{\Gamma} = \bigcup_{\text{ord} \in [0, 1]} \mathbb{P}_{\Gamma(\text{ord})}, \quad (27^*)$$

на классы вероятностей $\mathbb{P}_{\Gamma(\text{ord})}$, $\text{ord} \in [0, 1]$, причем так, что любая возможность $P \in \mathbb{P}_{(\text{ord})}$, максимально согласована со всеми вероятностями $\text{Pr} \in \mathbb{P}_{\Gamma(\text{ord})}$, и только с ними, $\text{ord} \in [0, 1]$. Этот факт позволит свести задачу экспериментального определения возможности к задаче проверки статистических гипотез об упорядоченности распределения вероятностей.

В заключение заметим, что, если речь идет о теоретико-вероятностном «прототипе» возможности, то в том случае когда математическая модель \mathcal{E} определена как вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$, любая согласованная с ней теоретико-возможностная модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ не будет востребована, ибо в этом случае полностью определенной вероятности $\text{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$ содержит все, что можно извлечь из $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Но, разумеется, теоретико-возможностная модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ не обязана иметь теоретико-вероятностный «прототип». Более того, теоретико-возможностные модели как раз характерны для «нечетких», «размытых» и т.п. объектов и явлений, [3], не содержащих хорошо определенной стохастической компоненты.

Вместе с тем, как будет показано в разделе 3, наличие стохастического «прототипа» открывает путь экспериментального определения теоретико-возможностной модели. Но вначале рассмотрим то, что можно назвать *принципом соответствия* теоретико-возможностной модели модели теоретико-вероятностной. Речь пойдет об условиях согласованности классов возможностей с классами вероятностей, теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной и т.п.

1. Условия согласованности класса \mathbb{P} с классом \mathbb{Pr}

В этом параграфе представлены некоторые свойства класса \mathbb{Pr} вероятностей, определенного условием (3), позволяющие убедиться в анонсированной во введении согласованности класса \mathbb{P} возможностей, удовлетворяющих условию (5), с классом \mathbb{Pr} , определенным условием (3).

Будет показано, что для возможности $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, определенной в (4), требования (6) являются следствием условий (3) и (5), которые и определяют согласованность \mathbb{P} с \mathbb{Pr} . При этом решающее значение имеет следующий факт.

Лемма 1. Пусть $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_{a_i}\}$, $B = \bigcup_{i \in I_B} \{\omega_{b_i}\}$ – некоторые подмножества Ω , где⁸ $I_A \triangleq \{1, 2, \dots, i_A\} \subset I$, $I_B \triangleq \{1, 2, \dots, i_B\} \subset I \triangleq \{1, 2, \dots\}$, причем не исключаются случаи $i_A = \infty$, $i_B = \infty$, $a_1 < a_2 < \dots$, $b_1 < b_2 < \dots$. Тогда $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ ($\text{Pr}(A) = \text{Pr}(B)$) при любых значениях вероятностей $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots, \text{pr}_i \triangleq \text{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию (3), если и только если

$$\begin{aligned} I_A \subset I_B \text{ и } \forall i \in I_A \cap I_B \quad a_i \geq b_i \\ (I_A = I_B \text{ и } \forall i \in I_A = I_B \quad a_i = b_i), \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. *Достаточность.* Согласно условиям (7),(4) $\text{pr}_{a_i} \leq \text{pr}_{b_i}$, $i \in I_A \cap I_B = I_A$, поэтому $\text{Pr}(B) = \sum_{i \in I_A} \text{pr}_{b_i} + \sum_{i \in I_B \setminus I_A} \text{pr}_{b_i} \geq \sum_{i \in I_A} \text{pr}_{a_i} + \sum_{i \in I_B \setminus I_A} \text{pr}_{b_i} \geq \sum_{i \in I_A} \text{pr}_{a_i} = \text{Pr}(A)$.

Если $a_i = b_i$, $i \in I_A = I_B$, то, очевидно, $\text{Pr}(A) = \text{Pr}(B)$ при любых $\text{pr}_1 \geq \text{pr}_2 \geq \dots$.

Необходимость. Пусть нарушено первое условие (7), то есть пусть $I_A \supset I_B$, $I_A \neq I_B$. Множество I_B в таком случае конечно, $i_B < \infty$, $I_A \cap I_B = I_B$ и $I_A \setminus I_B \neq \emptyset$. Покажем, что при таком условии неравенство $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ не может быть выполнено при всех

⁸ I – множество чисел натурального ряда; если $i_A = \infty$, то $I_A = I$, если $I_A \subset I$, $I_A \neq I$, то I_A – конечное подмножество I .

значениях вероятностей, ограниченных лишь условием (3). Выберем в силу условия (3) $\text{pr}_j = q = \text{const}$ для $j = 1, 2, \dots, a_{i_B}$, причем так, чтобы $q \cdot \text{pr}_{a_{i_B}} < 1$, тогда $\text{pr}_{a_i} = \text{pr}_{b_i} = q$ для $i = 1, 2, \dots, i_B$, ибо $b_i \leq a_i, i \in I_B$. При таком выборе вероятностей $\text{Pr}(A) - \text{Pr}(B) = \sum_{i \in I_B} (\text{pr}_{a_i} - \text{pr}_{b_i}) + \sum_{i \in I_A \setminus I_B} \text{pr}_{a_i} = \sum_{i \in I_A \setminus I_B} \text{pr}_{a_i} > 0$. Последнее неравенство будет выполнено, если выбрать $\text{pr}_{a_{i_B+1}} > 0$, возможность такого выбора следует из условий $I_A \setminus I_B \neq \emptyset$ и $q \cdot \text{pr}_{a_{i_B}} < 1$. Итак, в этом случае неравенство $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ не может быть выполнено для всех $\text{pr}_1 \geq \text{pr}_2 \geq \dots$.

Пусть теперь $I_A \subset I_B$, то есть $I_A = \{1, 2, \dots, i_A\} \subset \{1, 2, \dots, i_B\} = I_B$, где $i_A \leq i_B$, причем, возможно, $i_A = \infty$ и (или) $i_B = \infty$, но второе условие (7) нарушено: $a_i \geq b_i, i = 1, \dots, k-1, a_k < b_k, a_i \geq b_i, i = k+1, \dots, i_A$. Покажем, что и в этом случае неравенство $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ не выполняется для некоторых значений вероятностей $\text{pr}_1 \geq \text{pr}_2 \geq \dots$. Выберем вероятности следующим образом: $\text{pr}_i = q = \text{const}$ для $i = 1, 2, \dots, a_{k-1}$, $\text{pr}_{a_k} \geq \text{pr}_{b_k} + \delta, \delta > 0, \sum_{i > b_k} \text{pr}_i < \varepsilon, \varepsilon > 0$ ($a_{k-1} < a_k < b_k < b_{k+1} \leq a_{k+1}!$). При этом $\text{Pr}(A) \leq 1, \text{Pr}(B) \leq 1$, если $q \cdot \text{pr}_{a_{k-1}} + \text{pr}_{a_k} \leq 1 - \varepsilon - \delta$, и

$$\text{Pr}(A) - \text{Pr}(B) = \sum_{i \in I_A} (\text{pr}_{a_i} - \text{pr}_{b_i}) - \sum_{i \in I_B \setminus I_A} \text{pr}_{b_i} = \sum_{i=1}^{k-1} (\text{pr}_{a_i} - \text{pr}_{b_i}) + (\text{pr}_{a_k} - \text{pr}_{b_k}) + \sum_{i=k+1}^{i_A} (\text{pr}_{a_i} - \text{pr}_{b_i}) - \sum_{i > i_A} \text{pr}_{b_i} \geq \delta - \varepsilon > 0, \text{ если выбрать}$$

$\delta > \varepsilon$, ибо слагаемое $\sum_{i=1}^{k-1} (\text{pr}_{a_i} - \text{pr}_{b_i})$ равно нулю, $\text{pr}_{a_k} - \text{pr}_{b_k} \geq \delta$, а все остальные слагаемые не меньше $-\varepsilon$ (δ можно выбирать $> \varepsilon$, ибо $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым).

Наконец, если $\text{Pr}(A) = \text{Pr}(B)$ при любых $\text{pr}_1 \geq \text{pr}_2 \geq \dots$, то, очевидно, должны быть выполнены условия $a_i = b_i, i \in I_A = I_B$.

Замечание. Лемма 1 в данной формулировке верна при любой упорядоченности $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots$, получаемой из (3) путем замены « \leq » на произвольную комбинацию « \leq » и « $<$ ».

Чтобы убедиться в этом, достаточно изменить доказательство

необходимости лишь в той части, где использованы равенства $\text{pr}_j = q = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots$, а именно, равенства следует заменить на неравенства $\text{pr}_1 > \text{pr}_2 > \dots > \text{pr}_k$ и воспользоваться тем, что разность $\text{pr}_1 - \text{pr}_k > 0$ может быть сделана сколь угодно малой.

Для дальнейшего существенна лишь та часть леммы 1, которая относится к необходимости. Сформулируем ее следующим образом: если $\text{Pr}(A) \leq \text{Pr}(B)$ при любых значениях pr_i , $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию (3), то $i(A) \triangleq \min_{\omega_i \in A} i = a_1 \geq b_1 = \min_{\omega_i \in B} i \triangleq i(B)$.

Необходимость этого условия легко видеть, не обращаясь к Лемме 1. Действительно, если $a_1 < b_1$, то, выбрав в согласии с (3) $\text{pr}_1 = \dots = \text{pr}_{a_1} = 1/a_1$, $\text{pr}_{a_1+1} = \text{pr}_{a_1+2} = \dots = 0$, найдем: $\text{Pr}(A) \geq \text{pr}_{a_1} = 1/a_1 > 0 = \text{Pr}(B)$.

Теорема 1. Если $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $\text{pr}_i \triangleq \text{Pr}(\{\omega_i\})$, $p_i \triangleq P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, и выполнены условия (3) и (5), то неравенство $\text{Pr}(A) \triangleq \sum_{i: \omega_i \in A} \text{pr}_i \leq \sum_{i: \omega_i \in B} \text{pr}_i \triangleq \text{Pr}(B)$ для вероятностей исходов A и B , верное при любых значениях вероятностей $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots$, удовлетворяющих условию (3), влечет неравенство $P(A) \triangleq \sup_{i: \omega_i \in A} p_i \leq \sup_{i: \omega_i \in B} p_i \triangleq P(B)$ для возможностей A и B при любых значениях возможностей p_1, p_2, \dots , удовлетворяющих условию (5).

Доказательство. $\sup_{i: \omega_i \in A} p_i = p_{i(A)} \leq p_{i(B)} = \sup_{i: \omega_i \in B} p_i$.

Итак, класс \mathbb{P} возможностей, определенных формулой (4), согласован с классом \mathbb{Pr} вероятностей, определенных формулой (1), теоретико-возможностная модель $\exists \mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}\}$ согласована с его теоретико-вероятностной моделью $\mathcal{Pr} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr}), \text{Pr} \in \mathbb{Pr}\}$, требования упорядоченности (3) и (5) являются условиями согласованности.

Замечание. Не следует думать, что согласованность \mathbb{P} с \mathbb{Pr} определяет соответствие $\text{Pr}(\cdot) \rightarrow P(\cdot)$ $\text{Pr}(\cdot) \in \mathbb{Pr}$, $P(\cdot) \in \mathbb{P}$, при котором возможность $P(A)$ соответствует вероятности $\text{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Согласованность \mathbb{P} с \mathbb{Pr} определяет соответствие упорядоченностей (6), согласно которому (см. теорему 1) правилу суммирования вероятностей (1) соответствует правило «суммирования» возможно-

стей⁹ (4).

На рис. 1, 2, 3 условия (3) и (5) проиллюстрированы на примере, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. На рис. 1 $\mathbb{P}_\Gamma^{123} \equiv \mathbb{P}_\Gamma = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3, p_1 + p_2 + p_3 = 1, 1 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0\}$, $\mathbb{P}^{123} \equiv \mathbb{P} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3, 1 = p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0\}$. \mathbb{P}_Γ – один из шести¹⁰ «треугольников вероятностей» $\mathbb{P}_\Gamma^{ijk} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3, p_1 + p_2 + p_3 = 1, 1 \geq p_i \geq p_j \geq p_k \geq 0\}, i \neq j \neq k \neq i, i, j, k = 1, 2, 3$, образующих покрытие «треугольника всех вероятностей» $\mathbb{P}_\Gamma^* \triangleq \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3, p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0\} = \bigcup_{\substack{i, j, k=1, 2, 3 \\ i \neq j \neq k \neq i}} \mathbb{P}_\Gamma^{ijk}$. Каждому «треугольнику вероятностей»

\mathbb{P}_Γ^{ijk} условия согласованности упорядоченностей распределений, аналогичные (3) и (5), ставят в соответствие «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3, 1 = p_i \geq p_j \geq p_k \geq 0\}, i \neq j \neq k \neq i, i, j, k = 1, 2, 3$. В частности, треугольнику $\mathbb{P}_\Gamma = \mathbb{P}_\Gamma^{123}$ условиями (3), (5) сопоставлен треугольник $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$. «Треугольники возможностей» образуют «покрытие класса всех возможностей» $\mathbb{P}^* = \bigcup_{\substack{i, j, k=1, 2, 3 \\ i \neq j \neq k \neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$.

2. Согласованность теоретико-возможностной независимости со стохастической независимостью

Рассмотрим вопрос о связи между теоретико-вероятностным и теоретико-возможностным аспектами понятия независимости. Стандартной теоретико-вероятностной моделью двух экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$ является вероятностное пространство

$${}^9 \text{В [2]} P(A) = \sup_{i: \omega_i \in A} p_i \triangleq \bigoplus_{i: \omega_i \in A} p_i.$$

¹⁰В рассматриваемом примере здесь и всюду далее вероятность \mathbb{P}_Γ (возможность P) для упрощения формулировок «отождествляется» с точкой $p_\Gamma \triangleq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}_\Gamma^* \subset \mathcal{R}_3$ (с точкой $p \triangleq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}^* \subset \mathcal{R}_3$), определяющей ее распределение, треугольник \mathbb{P}_Γ (\mathbb{P}) и его подмножества обозначают как множества распределений вероятностей (возможностей), так и соответствующие множества вероятностей (возможностей).

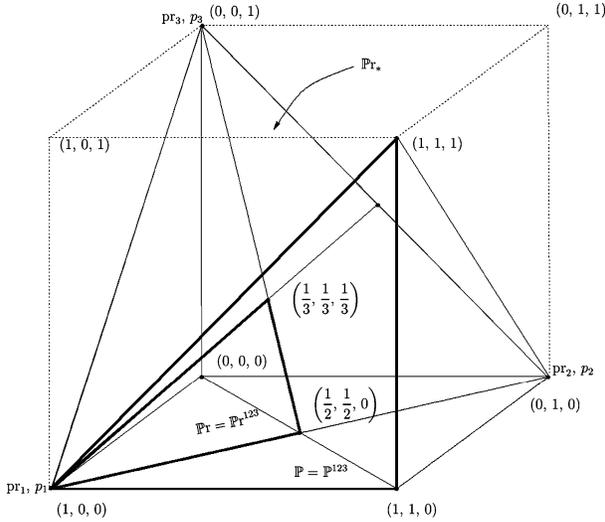


Рис. 1. Классы (распределений) вероятностей $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_r^{123}$ и возможностей $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$ в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $1 = p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$.

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_r) = (\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}), \mathbb{P}_r), \quad (8)$$

определенное как произведение вероятностных пространств $(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \mathbb{P}_r^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \mathbb{P}_r^{(2)})$, являющихся теоретико-вероятностными моделями $\mathcal{E}^{(1)}$ и $\mathcal{E}^{(2)}$ соответственно. Эксперимент, выполнение которого означает выполнение $\mathcal{E}^{(1)}$ и $\mathcal{E}^{(2)}$, обозначим $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)} \times \mathcal{E}^{(2)}$. В его модели (8) $\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ – множество всех упорядоченных пар $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})$, определяющих элементарные исходы \mathcal{E} , отвечающие элементарным исходам $\omega_{i_1}^{(1)} \in \Omega^{(1)}$, $\omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}$ экспериментов $\mathcal{E}^{(1)}$ и соответственно $\mathcal{E}^{(2)}$, где i_λ пробегает конечное или бесконечное множество значений $I_{(\lambda)} = \{1, 2, \dots\}$, $\lambda = 1, 2$. $\mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})$ – класс всех подмножеств $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})$, представляющих все мыслимые исходы \mathcal{E} .

Определим вероятность \mathbb{P}_r ее значениями на элементарных исходах \mathcal{E} равенствами

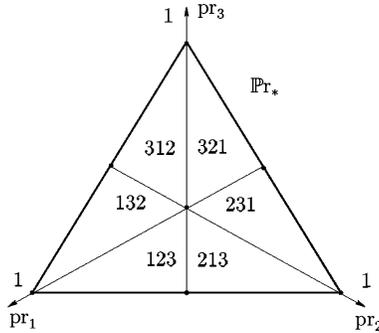


Рис. 2. «Треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}_{r*} = \bigcup_{\substack{i, j, k \\ i \neq j \neq k \neq i}} \mathbb{P}_{r^{ijk}}$, тройка ijk обозначает упорядоченность $pr_i \geq pr_j \geq pr_k$, определяющую «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}_{r^{ijk}}$.

$$\begin{aligned} pr_{i_1, i_2} &\triangleq \Pr(\{\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}\}) = pr_{i_1}^{(1)} \cdot pr_{i_2}^{(2)} \triangleq \\ &\triangleq (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(\{\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}\}), \quad i_\lambda \in I(\lambda), \quad \lambda = 1, 2, \quad (9) \end{aligned}$$

где $pr_{i_\lambda}^{(\lambda)} \triangleq \Pr^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\})$ – вероятность элементарного исхода $\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)} \in \Omega^{(\lambda)}$ эксперимента $\mathfrak{E}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. При этом вероятность любого исхода $A \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ эксперимента \mathfrak{E} определится формулой

$$\Pr(A) = \sum_{\substack{(i_1, i_2): \\ (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in A}} pr_{i_1}^{(1)} \cdot pr_{i_2}^{(2)}. \quad (10)$$

Согласно равенствам (9) эксперименты $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$, составляющие \mathfrak{E} , стохастически независимы в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ (8), (ср. с (2)), [1]. Действительно, для любого исхода $C = A^{(1)} \times A^{(2)} \triangleq \{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \subset \Omega^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)} \subset \Omega^{(2)}\}$ эксперимента \mathfrak{E} , представляющего исходы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$,

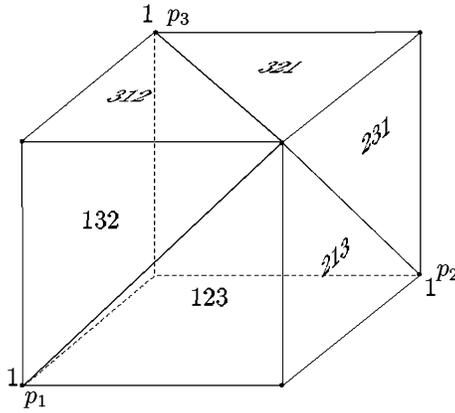


Рис. 3. «Треугольники возможностей», тройка ijk обозначает упорядоченность $1 = p_i \geq p_j \geq p_k$, определяющую «треугольник возможностей» \mathbb{P}^{ijk} , $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$; $\mathbb{P}_* = \bigcup_{\substack{i, j, k \\ i \neq j \neq k \neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$ – класс всех возможностей.

$$\begin{aligned}
 \Pr(C) &\triangleq (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(C) \triangleq \sum_{\substack{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \\ i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}}} \Pr_{i_1}^{(1)} \cdot \Pr_{i_2}^{(2)} = \\
 &= \left(\sum_{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}} \Pr_{i_1}^{(1)} \right) \cdot \left(\sum_{i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}} \Pr_{i_2}^{(2)} \right) = \Pr^{(1)}(A^{(1)}) \cdot \Pr^{(2)}(A^{(2)}).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

С другой стороны исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$ соответствуют исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента \mathfrak{E} , причем (см. рис. 5)

$$\Pr(C_1) = (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(C_1) = \sum_{\substack{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \\ i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}}} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} = \Pr^{(1)}(A^{(1)}),$$

$$\Pr(C_2) = \Pr^{(2)}(A^{(2)}). \quad (12)$$

А поскольку $C = A^{(1)} \times A^{(2)} = (A^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times A^{(2)}) = C_1 \cap C_2$, то согласно (11), (12)

$$\Pr(C_1 \cap C_2) = \Pr(C_1) \cdot \Pr(C_2), \quad (13)$$

то есть исходы C_1 и C_2 эксперимента \mathfrak{E} , представляющие соответственно исходы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$ в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, стохастически независимы.

Пусть теперь моделями $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$ являются не конкретные вероятностные пространства $(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \Pr^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \Pr^{(2)})$, а классы

$$\mathcal{P}_r^{(1)} = \{(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \Pr^{(1)}), \Pr^{(1)} \in \mathbb{P}_r^{(1)}\},$$

$$\mathcal{P}_r^{(2)} = \{(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \Pr^{(2)}), \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(2)}\},$$

где $\mathbb{P}_r^{(\lambda)}$ – класс вероятностей, удовлетворяющих условиям (3) $\text{pr}_1^{(\lambda)} \geq \text{pr}_2^{(\lambda)} \geq \dots \geq 0$, $\text{pr}_1^{(\lambda)} + \text{pr}_2^{(\lambda)} + \dots = 1$, $\lambda = 1, 2$, а моделью $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(1)} \times \mathfrak{E}^{(2)}$ является класс $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_r^{(1)} \times \mathcal{P}_r^{(2)} \triangleq \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}), \Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)}), \Pr \in \mathbb{P}_r \triangleq \mathbb{P}_r^{(1)} \times \mathbb{P}_r^{(2)}\}$, где включение $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(1)} \times \mathbb{P}_r^{(2)}$ означает по определению, что $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}_r^{(1)}$, $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(2)}$.

Тогда для любых исходов $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента \mathfrak{E} , соответствующих исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$, как в (13),

$$\Pr(C_1 \cap C_2) = \Pr(C_1) \cdot \Pr(C_2)$$

для любой вероятности $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(1)} \times \mathbb{P}_r^{(2)}$. Такие эксперименты $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$ составляющие $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(1)} \times \mathfrak{E}^{(2)}$, также назовем *стохастически независимыми*.

Следующая лемма позволит установить связь между так определенной стохастической независимостью и ее теоретико-возможностным аналогом.

Лемма 2. *Если при любых вероятностях $\text{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, удовлетворяющих условиям*

$$\text{pr}_1^{(\lambda)} \geq \text{pr}_2^{(\lambda)} \geq \dots \geq 0, \quad \text{pr}_1^{(\lambda)} + \text{pr}_2^{(\lambda)} + \dots = 1, \quad \lambda = 1, 2, \quad (14)$$

для некоторых $A, B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$,

$$\text{Pr}(A) \triangleq \sum_{i_1, i_2 \in I(A)} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} \leq \sum_{i_1, i_2 \in I(B)} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} \triangleq \text{Pr}(B), \quad (15)$$

где $I(C) \triangleq \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in C\}$, $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, то при любых $\text{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющих условиям (14), для этих A, B :

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\text{pr}_{i_1}^{(1)}, \text{pr}_{i_2}^{(2)}) \leq \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min(\text{pr}_{i_1}^{(1)}, \text{pr}_{i_2}^{(2)}), \quad (16)$$

Доказательство. Покажем, что если существуют вероятности $\text{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющие условиям (15), такие, что

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\text{pr}_{i_1}^{(1)}, \text{pr}_{i_2}^{(2)}) > \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min(\text{pr}_{i_1}^{(1)}, \text{pr}_{i_2}^{(2)}), \quad (17)$$

то $\text{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, можно выбрать так, чтобы выполнялись условия (14) и (17) и при этом нарушалось условие (15), то есть выполнялось неравенство $\text{Pr}(A) > \text{Pr}(B)$. Действительно, пусть для некоторых вероятностей, удовлетворяющих условиям (14), выполнено неравенство (17). Поскольку, в силу (14), точные верхние грани в (17) достигаются, существует пара индексов $(i_1(A), i_2(A)) \in I_{(1)} \times I_{(2)}$, для которой

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\text{pr}_{i_1}^{(1)}, \text{pr}_{i_2}^{(2)}) = \min(\text{pr}_{i_1(A)}^{(1)}, \text{pr}_{i_2(A)}^{(2)}),$$

и, следовательно, согласно (17), (14) при любых $(i_1, i_2) \in I(B)$

$$\max(i_1, i_2) > \max(i_1(A), i_2(A)) \triangleq d(A).$$

Определим следующие подмножества $I_{(1)} \times I_{(2)}$, показанные на рис. 4:

$$J^{(1)}(A) \triangleq \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \max(i_1, i_2) \leq d(A)\},$$

$$J^{(2)}(A) \triangleq (I_{(1)} \times I_{(2)}) \setminus J^{(1)}(A) = \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \max(i_1, i_2) > d(A)\}.$$

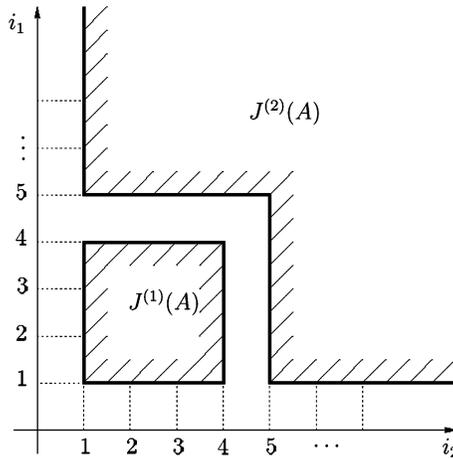


Рис. 4. Множества $J^{(1)}(A)$, $J^{(2)}(A)$ при $d(A) = 4$.

Выберем $\text{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, так, чтобы

$$\begin{aligned} \text{pr}_{i_1}^{(1)} &= \text{pr}_{i_2}^{(2)} = 1/d(A), \text{ если } (i_1, i_2) \in J^{(1)}(A); \\ \text{pr}_{i_1}^{(1)} &= \text{pr}_{i_2}^{(2)} = 0, \text{ если } i_1 > d(A), i_2 > d(A), \\ \text{то есть чтобы } \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} &= 0, \text{ если } (i_1, i_2) \in J^{(2)}(A). \end{aligned}$$

При этом условия (14) выполнены, а поскольку $I(A) \cap J^{(1)}(A) \neq \emptyset$ и $I(B) \subset J^{(2)}(A)$, то выполнено условие (17) и

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \sum_{(i_1, i_2) \in I(A)} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} \geq \sum_{(i_1, i_2) \in (I(A) \cap J^{(1)}(A))} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} > 0, \\ \Pr(B) &= \sum_{(i_1, i_2) \in I(B)} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} \leq \sum_{(i_1, i_2) \in J^{(2)}(A)} \text{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \text{pr}_{i_2}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

то есть $\Pr(A) > \Pr(B) = 0$.

Пусть $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ – класс возможностей $P^{(\lambda)}$, $P^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\}) = p_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, согласованный с классом вероятностей $\Pr^{(\lambda)}$, определенным условиями (14), то есть пусть

$$1 = p_1^{(\lambda)} \geq p_2^{(\lambda)} \geq \dots \geq 0, \quad (18)$$

$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \{(\Omega^{(\lambda)}, \mathcal{P}(\Omega^{(\lambda)}), P^{(\lambda)}), P^{(\lambda)} \in \mathbb{P}^{(\lambda)}\}$ –согласованная с $\mathcal{P}r^{(\lambda)}$ теоретико-возможностная модель $\mathfrak{E}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. Теоретико-возможностную модель \mathcal{P} эксперимента $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(1)} \times \mathfrak{E}^{(2)}$ определим равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \triangleq \mathcal{P}^{(1)} \times \mathcal{P}^{(2)} \triangleq \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}), P = P^{(1)} \times P^{(2)}), \\ P^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)}, P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}\}, \quad (19) \end{aligned}$$

в котором возможность $P \in \mathbb{P} \triangleq \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ задана на элементарных исходах $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})$ эксперимента \mathfrak{E} равенствами

$$\begin{aligned} P(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}) \triangleq P(\{(\omega_{i_1}^{(1)}) \times (\omega_{i_2}^{(2)})\}) = \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}), \\ (i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \quad (20) \end{aligned}$$

определяющими теоретико-возможностную P -независимость элементарных исходов \mathfrak{E} [2]. Для любого $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ согласно формулам (4) и (20)

$$P(C) = \sup_{(i_1, i_2) \in I(C)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}). \quad (21)$$

Согласно определению (21) для любых исходов $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(1)} \times \mathfrak{E}^{(2)}$, соответствующих исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$,

$$P(C_1) = \sup_{\substack{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}, \\ i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = P^{(1)}(A^{(1)}), \quad P(C_2) = P^{(2)}(A^{(2)}),$$

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= \sup_{\substack{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}, \\ i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = \min\left(\sup_{i_1: \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}} p_{i_1}^{(1)}, \sup_{i_2: \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}} p_{i_2}^{(2)}\right) = \\ &= \min(P^{(1)}(A^{(1)}), P^{(2)}(A^{(2)})) = \min(P(C_1), P(C_2)). \quad (22) \end{aligned}$$

Следовательно, *исходы* C_1 и C_2 P -независимы при любой возможности $P = P^{(1)} \times P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$, [2].

Исходы C_1 и C_2 называются N -независимыми [2], если

$$N(C_1 \cup C_2) = \max(N(C_1), N(C_2)),$$

где $N(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ —необходимость, связанная с возможностью $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ равенством $N(A) \triangleq \theta * P(\Omega \setminus A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, в котором $\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ —непрерывная строго монотонно убывающая функция, такая, что $\theta * \theta(a) = a$, $a \in [0, 1]$. Исходы C_1 и C_2 называются независимыми, если они P - и N -независимы.

Проверим, что в модели (19), (20) и (21) любые исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ N -независимы. Действительно, воспользовавшись равенством (22), найдем (см. рис. 5)

$$\begin{aligned} N(C_1) &\triangleq \theta * P((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1) = \theta * P((\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}) = \\ &\theta * P^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \triangleq N^{(1)}(A^{(1)}); \quad N(C_2) = N^{(2)}(A^{(2)}) \quad \text{и} \\ N(C_1 \cup C_2) &\triangleq \theta * P((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus (C_1 \cup C_2)) = \\ &\theta * P([\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}] \times \Omega^{(2)} \cup [\Omega^{(1)} \times (\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})]) = \\ &\theta * \min(P^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}), P^{(2)}(\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})) = \\ &\max(N^{(1)}(A^{(1)}), N^{(2)}(A^{(2)})) = \max(N(C_1), N(C_2)). \end{aligned}$$

Итак, в модели \mathcal{P} , определенной равенствами (19), (20) и (21), любые исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ независимы.

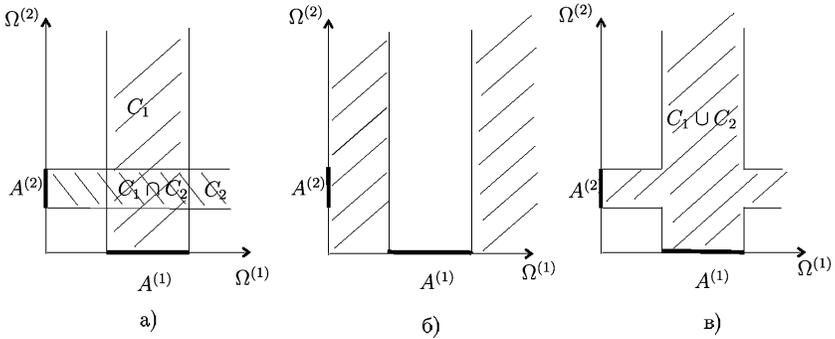


Рис. 5. Заштрихованы: а) цилиндрические множества C_1 и C_2 и их пересечение $C_1 \cap C_2$; б) дополнение $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1 = (\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}$ множества $C_1 \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(1)}$; в) объединение $C_1 \cup C_2$ множеств C_1 и C_2 ;

Определение 5. Класс $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей, определенных формулой (21), назовем согласованным с классом $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_r^{(1)} \times \mathbb{P}_r^{(2)}$ вероятностей, определенных в (10), если для любых $A, B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, таких, что неравенство

$$\Pr(A) \triangleq (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(A) \leq (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(B) \triangleq \Pr(B), \quad (23)$$

верное для всех вероятностей $\Pr \in \mathbb{P}_r$ (то есть для всех $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}_r^{(1)}$ и $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(2)}$), влечет неравенство

$$P(A) = (P^{(1)} \times P^{(2)})(A) \leq (P^{(1)} \times P^{(2)})(B) = P(B) \quad (24)$$

для всех возможностей $P \in \mathbb{P}$ (то есть для всех $P^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)}$ и $P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}$).

Как следствие леммы 2 получаем следующий результат.

Теорема 2. Если $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ – класс возможностей, согласованный с классом $\mathbb{P}_r^{(\lambda)}$ вероятностей, $\lambda = 1, 2$, то класс $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей, определенных в (21), согласован с классом $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_r^{(1)} \times \mathbb{P}_r^{(2)}$ вероятностей, определенных в (10).

Доказательство. Действительно, если неравенство (15) выполнено для всех вероятностей $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)}$, $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}_r^{(1)}$, $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}_r^{(2)}$,

то, поскольку в силу леммы 2 для любых $\text{Pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, выполняется неравенство (16), то для всех возможностей $p_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I(\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющих условию (18), будет выполнено неравенство

$$P(A) = \sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) \leq \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = P(B).$$

Итак, согласно теореме 2, согласованность класса $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей (21) с классом $\mathbb{Pr} = \mathbb{Pr}^{(1)} \times \mathbb{Pr}^{(2)}$ вероятностей (10), означающая соответствие упорядоченности (24) упорядоченности (23), определяет соответствие правила «суммирования» возможностей (21), означающего теоретико-возможностную независимость¹¹ $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$, правилу суммирования вероятностей (10), означающему стохастическую независимость $\mathfrak{E}^{(1)}$ и $\mathfrak{E}^{(2)}$; наконец, соответствие теоретико-возможностной независимости независимости стохастической определяет соответствие правилу умножения вероятностей стохастически независимых элементарных исходов в (10): $\text{Pr}(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv \text{Pr}((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \text{Pr}(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cdot \text{Pr}(\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})$ операции \min как «операции умножения возможностей» P - независимых элементарных исходов в (20): $P(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv P((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \min(P(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}), P(\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}))$. Эти факты в совокупности составляют то, что можно назвать *согласованностью теоретико-возможностной независимости со стохастической независимостью*.

3. Экспериментальное построение теоретико-возможностной модели \mathfrak{E}

В этом параграфе задача экспериментального оценивания распределения возможностей сведена к задаче проверки статистических

¹¹В [2] $P(C) = \sup_{\substack{(i_1, i_2) \\ (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}) \in C}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) \triangleq \bigoplus_{\substack{(i_1, i_2) \\ (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}) \in C}} (p_{i_1}^{(1)} \bullet p_{i_2}^{(2)}).$

гипотез о классах эквивалентных распределений возможностей, каждый из которых определен той или иной упорядоченностью значений возможностей элементарных исходов эксперимента. Эти классы, образующие разбиение класса \mathbb{P}_* «всех возможностей» на классы эквивалентных возможностей, в свою очередь определяют разбиение класса $\mathbb{P}\Gamma_*$ «всех вероятностей» на соответствующие классы вероятностей, причем так, что в этих разбиениях между классами возможностей и вероятностей установлено взаимно однозначное соответствие, согласно которому каждый класс эквивалентных возможностей максимально согласован [2] с соответствующим классом вероятностей (и с каждой вероятностью из этого класса).

Тем самым задача экспериментального определения теоретико-возможностной модели эксперимента, *эквивалентная задаче выбора одного из классов эквивалентных возможностей, образующих разбиение \mathbb{P}_** , сводится к задаче проверки статистических гипотез, в которой на основе наблюдения исходов эксперимента требуется принять решение о принадлежности распределения вероятностей, контролирующего наблюдения, к одному из классов вероятностей, образующих разбиение $\mathbb{P}\Gamma_*$.

3.1. Классы \mathbb{P} и $\mathbb{P}\Gamma$ и их когерентные разбиения

Далее, если не оговорено противное, предполагается, что в определении 3 согласованности P с Γ ($\Gamma \sim > P$) и максимальной согласованности P с Γ ($\Gamma \approx > P$) вероятность $\Gamma \in \mathbb{P}\Gamma$, то есть распределение Γ удовлетворяет условию (3). В таком случае распределение любой согласованной с Γ возможности удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} 1 = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq 0, \\ p\Gamma_i = p\Gamma_{i+1}, \Rightarrow p_i = p_{i+1}, \quad p\Gamma_i = 0, \Rightarrow p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5^*)$$

а для максимальной согласованности дополнительно требуется, чтобы в (5*) было максимальное число строгих неравенств при каждом конкретном распределении $\Gamma \in \mathbb{P}\Gamma$ [2].

Напомним, что $\mathbb{P}(\Gamma)$ -класс всех возможностей, максимально согласованных с $\Gamma \in \mathbb{P}\Gamma$ (см. введение).

В монографии [2] показано, что любая возможность $P \in \mathbb{P}(\text{Pr})$, максимально согласованная с вероятностью $\text{Pr} \in \mathbb{Pr}$, может быть задана распределением

$$p_i = g(\text{pr}_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где $g(\cdot)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{G}(\text{Pr}) \subset \tilde{\Gamma}$ монотонно неубывающих функций $g(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, непрерывных на $(0, 1]$, принимающих постоянные значения p_i на каждом интервале $\Delta_i = [\text{pr}_i, 1 - \text{pr}_1 - \dots - \text{pr}_{i-1}]$, строго монотонно возрастающих всюду вне интервалов Δ_i , $i = 1, 2, \dots$, и таких, что $p_i < p_{i-1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i-1} = \emptyset$, $p_i = p_{i-1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i-1} \neq \emptyset$, $p_1 = g(\text{pr}_1) = g(x) = 1$, $x \in [\text{pr}_1, 1]$, $g(0) = 0$; при этом для возможности P , определяемой распределением (25), в силу непрерывности $g(\cdot)$ согласно (4) $P(A) = g(\text{Pr}(A))$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Выберем произвольно возможности P и \tilde{P} из $\mathbb{P}(\text{Pr})$, пусть $p_i = g(\text{pr}_i)$, $\tilde{p}_i = \tilde{g}(\text{pr}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, – их распределения, где $g(\cdot)$ и $\tilde{g}(\cdot)$ – функции из $\mathbb{G}(\text{Pr})$. Так как для любых $g(\cdot)$ и $\tilde{g}(\cdot)$ из $\mathbb{G}(\text{Pr})$ можно указать функцию $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, такую, что¹² $g(\text{pr}_i) = \gamma(\tilde{g}(\text{pr}_i)) \triangleq (\gamma \circ \tilde{g})(\text{pr}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, то согласно определению (4) для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = (\gamma * \tilde{P})(A)$, ибо $\gamma(\cdot)$ – строго монотонно возрастает и непрерывна на $[0, 1]$. Следовательно, $\mathbb{P}(\text{Pr})$ – класс эквивалентных возможностей $P \in \mathbb{P}$, или, иначе говоря, $\mathbb{P}(\text{Pr})$ – класс эквивалентности в \mathbb{P} . Пусть P – любая возможность из $\mathbb{P}(\text{Pr})$, тогда $\mathbb{P}(\text{Pr}) = \{\gamma * P, \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$ и, следовательно, класс $\mathbb{P}(\text{Pr})$ инвариантен относительно любого преобразования $\gamma * : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} : \gamma * \mathbb{P}(\text{Pr}) = \mathbb{P}(\text{Pr})$, $\gamma * \in \Gamma *$.

Проверим, что любые два класса эквивалентности $\mathbb{P}(\text{Pr})$ и $\mathbb{P}(\tilde{\text{Pr}})$, как подмножества \mathbb{P} , либо не имеют общих элементов, либо совпадают. Действительно, если $P \in \mathbb{P}(\text{Pr}) \cap \mathbb{P}(\tilde{\text{Pr}})$, то $\mathbb{P}(\text{Pr}) = \{\gamma * P, \gamma * \in \Gamma * \} = \mathbb{P}(\tilde{\text{Pr}})$.

Наконец, убедимся, что класс \mathbb{P} можно представить в виде объединения попарно непересекающихся классов эквивалентности $\mathbb{P}(\text{Pr})$, $\text{Pr} \in \mathbb{Pr}$:

¹²Если $g(\cdot)$ – некоторая функция из $\mathbb{G}(\text{Pr})$, то $\mathbb{G}(\text{Pr}) = \{(\gamma \circ g)(\cdot), \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$.

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\Pr \in \Pr^\circ} \mathbb{P}(\Pr), \quad (26)$$

где \Pr° – множество тех вероятностей $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$, которым отвечают попарно различные классы $\mathbb{P}(\Pr) : \mathbb{P}(\Pr) \cap \mathbb{P}(\widetilde{\Pr}) = \emptyset$, если $\Pr, \widetilde{\Pr} \in \Pr^\circ$ и $\Pr \neq \widetilde{\Pr}$. Действительно, пусть для некоторых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\Pr(A) \leq \Pr(B)$ для любой вероятности $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$ и P – произвольная возможность из $\bigcup_{\Pr \in \Pr^\circ} \mathbb{P}(\Pr)$. Тогда при некоторой вероятности $\Pr \in \Pr^\circ \subset \mathbb{P}_\Gamma$ $P \in \mathbb{P}(\Pr)$ и, следовательно, можно указать функцию $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\Pr)$ такую, что для любого $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(C) = g(\Pr(C))$. Поэтому $P(A) = g(\Pr(A)) \leq g(\Pr(B)) = P(B)$, то есть выполнены условия (6), $P \in \mathbb{P}$, и, следовательно, $\bigcup_{\Pr \in \Pr^\circ} \mathbb{P}(\Pr) \subset \mathbb{P}$.

С другой стороны, как показано в [5], для любой возможности $P \in \mathbb{P}$ можно указать вероятность $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$, для которой $P \in \mathbb{P}(\Pr)$. Следовательно, $\mathbb{P} \subset \bigcup_{\Pr \in \Pr^\circ} \mathbb{P}(\Pr)$ и поэтому $\mathbb{P} = \bigcup_{\Pr \in \Pr^\circ} \mathbb{P}(\Pr)$ – разбиение \mathbb{P} на классы эквивалентности.

Определим класс вероятностей $\mathbb{P}_\Gamma(P) = \{\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma, P \in \mathbb{P}(\Pr)\}$, $P \in \mathbb{P}$. Если $\mathbb{P}(\Pr)$ рассматривать как значение в точке $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$ многозначного отображения $\mathbb{P}(\cdot) : \mathbb{P}_\Gamma \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$, то $\mathbb{P}_\Gamma(P)$ – значение в точке $P \in \mathbb{P}$ многозначного отображения $\mathbb{P}_\Gamma(\cdot) : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$, обратного к $\mathbb{P}(\cdot)$.

Так как для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\Gamma(\gamma^*P) &= \{\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma, \gamma^*P \in \mathbb{P}(\Pr)\} = \{\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma, P \in \gamma^{-1} * \mathbb{P}(\Pr)\} = \\ &= \{\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma, P \in \mathbb{P}(\Pr)\} = \mathbb{P}_\Gamma(P), \quad P \in \mathbb{P}, \end{aligned}$$

то $\mathbb{P}_\Gamma(P)$ можно рассматривать как образ при отображении $\mathbb{P}_\Gamma(\cdot) : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$ класса эквивалентности в \mathbb{P} , содержащего возможность P . А поскольку включения $P \in \mathbb{P}(\Pr)$ и $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma(P)$, $P \in \mathbb{P}$, $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma$, эквивалентны, то $\Pr \in \mathbb{P}_\Gamma(P) \cap \mathbb{P}_\Gamma(\widetilde{P}) \Leftrightarrow (P \in \mathbb{P}(\Pr) \& (\widetilde{P} \in \mathbb{P}(\Pr)))$ и, следовательно, $\mathbb{P}_\Gamma(P) = \mathbb{P}_\Gamma(\widetilde{P})$, ибо возможности P и \widetilde{P} эквивалентны. Итак, классы $\mathbb{P}_\Gamma(P)$, $P \in \mathbb{P}$, либо не имеют общих элементов

в \mathbb{P}_Γ , либо совпадают, то есть являются классами эквивалентности в \mathbb{P}_Γ – образами классов эквивалентности $\mathbb{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$, $\mathbb{P}_\Gamma \in \mathbb{P}_\Gamma^\circ$, в \mathbb{P} при отображении $\mathbb{P}_\Gamma(\cdot) : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$, и аналогично разбиению (26)

$$\mathbb{P}_\Gamma = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^\circ} \mathbb{P}_\Gamma(P), \quad (27)$$

где \mathbb{P}° – множество всех попарно неэквивалентных возможностей $P \in \mathbb{P}$ (которым отвечают попарно различные классы вероятностей: $\mathbb{P}_\Gamma(P) \cap \mathbb{P}_\Gamma(\tilde{P}) = \emptyset$, если $P, \tilde{P} \in \mathbb{P}^\circ$, $P \neq \tilde{P}$). Иначе говоря, в разбиении (27) множества \mathbb{P}_Γ на классы $\mathbb{P}_\Gamma(P)$, $P \in \mathbb{P}^\circ$, \mathbb{P}° – множество всех возможностей, выбранных по одной из каждого класса эквивалентных возможностей $\mathbb{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$, $\mathbb{P}_\Gamma \in \mathbb{P}_\Gamma^\circ$.

Связь между разбиениями (26) и (27) можно охарактеризовать следующим образом. Пусть возможность $P_0 \in \mathbb{P}$ и вероятность $\mathbb{P}_{\Gamma_0} \in \mathbb{P}_\Gamma$ таковы, что $P_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0})$ и $\mathbb{P}_{\Gamma_0} \in \mathbb{P}_\Gamma(P_0)$. Тогда класс $\mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0})$ состоит из тех и только тех возможностей $P \in \mathbb{P}$, каждая из которых максимально согласована с теми и только теми вероятностями $\mathbb{P}_\Gamma \in \mathbb{P}_\Gamma$, которые составляют класс $\mathbb{P}_\Gamma(P_0)$, и соответственно класс $\mathbb{P}_\Gamma(P_0)$ состоит из тех и только тех вероятностей $\mathbb{P}_\Gamma \in \mathbb{P}_\Gamma$, с каждой из которых максимально согласованы те и только те возможности $P \in \mathbb{P}$, которые составляют класс $\mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0})$. Иначе говоря, эквивалентные включения $P_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0}) \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\Gamma_0} \in \mathbb{P}_\Gamma(P_0)$ определяют взаимно однозначное соответствие $\mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0}) \Leftrightarrow \mathbb{P}_\Gamma(P_0)$ между классами в разбиениях (26) и (27), при котором класс $\mathbb{P}(\mathbb{P}_{\Gamma_0})$ естественно назвать максимально согласованным с классом $\mathbb{P}_\Gamma(P_0)$. Для краткости так согласованную пару разбиений (27) и (26) назовем *когерентной*.

В свою очередь, каждый класс $\mathbb{P}(\mathbb{P}_\Gamma)$, $\mathbb{P}_\Gamma \in \mathbb{P}_\Gamma^\circ$, эквивалентных возможностей определяется свойственной всем принадлежащим ему возможностям P одной и той же «точной» упорядоченностью возможностей $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, элементарных исходов, которая, в отличие от «общей» упорядоченности (5), определяется только равенствами и строгими неравенствами¹³. В случае счетного $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ каждой «точной» упорядоченности взаимно

¹³Например, $1 = p_1 = p_2 = p_3 > p_4 = p_5 > \dots$; этой упорядоченности соответствует двоичное число 0.00101...

однозначно соответствует двоичное число, например, упорядоченности $1 = p_1 = p_2 > p_3 > p_4 = p_5 > \dots$ соответствует число $\text{ord} = 0.01101\dots \in [0, 1]$, в котором точка отделяет первый ноль отвечающий всегда верному равенству $1 = p_1$, а далее каждому равенству отвечает ноль, неравенству – единица. Отсюда следует, что множество всех «строгих» упорядоченностей, каждая из которых определяет один из классов эквивалентных возможностей в (26) и соответствующий ему класс вероятностей в (27), имеет мощность континуума. Следовательно, в случае счетного Ω множества \mathbb{P}° в (26) и \mathbb{P}° в (27) имеют мощность континуума.

Поскольку любое число из $[0, 1]$ можно представить в двоичной записи $\text{ord} = 0.e_1e_2\dots$, где e_i равно либо нулю, либо единице, $i = 1, 2, \dots$, а каждая такая запись выделяет один из классов $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$ эквивалентных возможностей в разбиении (26), определенных «точной» упорядоченностью значений p_1, p_2, \dots , соответствующей $\text{ord} \in [0, 1]$, разбиение (26) можно представить в следующем виде:

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\text{ord} \in [0, 1]} \mathbb{P}_{(\text{ord})}. \quad (26^*)$$

Здесь индекс (ord) в явном виде указывает на «точную» упорядоченность распределений $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, эквивалентных возможностей, образующих класс $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$. Равенство (26*) назовем разбиением класса \mathbb{P} на (неразложимые!) классы $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$, эквивалентных, «точно» упорядоченных возможностей. Соответственно вместо (27) получим

$$\mathbb{Pr} = \bigcup_{\text{ord} \in [0, 1]} \mathbb{Pr}_{(\text{ord})}. \quad (27^*)$$

Здесь индекс (ord) указывает на соответствие класса вероятностей $\mathbb{Pr}_{(\text{ord})}$ классу возможностей $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$, максимально с ним согласованных, $\text{ord} \in [0, 1]$. Пара разбиений (26*), (27*), по определению, является когерентной.

3.2. Классы \mathbb{P}_* , \mathbb{Pr}_* и их когерентные разбиения

Обратимся теперь к классу «всех возможностей» и уточним его структуру. Обозначим \mathbb{P}_* класс всех возможностей, распределение

каждой из которых может быть линейно упорядочено по невозрастанию путем перенумерации элементарных исходов ω_i , $i = 1, 2, \dots$. Точнее, пусть $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, – распределение возможности $P \in \mathbb{P}_*$, тогда существует такая биекция $j : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$, что $1 = p_{j_1} \geq p_{j_2} \geq \dots$. Это означает, что существуют максимальные элементы:

$$1 = p_{j_1} = \max_i p_i, \quad p_{j_2} = \max_{i: i \neq j_1} p_i, \quad p_{j_3} = \max_{i: i \neq j_1, i \neq j_2} p_i, \quad \dots$$

Класс \mathbb{P}_* не содержит, например, возможности, для распределений которых $\exists i_0 : \forall i \geq i_0 : p_i \leq p_{i+1} < p_{i+2} \leq \dots$, где строгих неравенств «<» бесконечно много¹⁴. С другой стороны, если Ω конечно, то \mathbb{P}_* – класс всех возможностей.

В этом случае класс \mathbb{P}_* может быть представлен в виде разбиения на классы $\mathbb{P}_{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$, эквивалентных возможностей

$$\mathbb{P}_* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}_{(\lambda)}, \quad (26^{**})$$

в котором каждый класс $\mathbb{P}_{(\lambda)}$ состоит из возможностей, распределения которых могут быть одинаково «точно» упорядочены согласно одному из условий, своему для каждого класса $\mathbb{P}_{(\lambda)}$, например, как $1 = p_{j_1} > p_{j_2} = p_{j_3} > \dots$, путем должной перестановки $i \rightarrow j_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, индексов элементарных исходов ω_i , $i = 1, \dots, n$.

Индекс λ в (26^{**}) отличает как число $\text{ord} \in [0, 1]$, характеризующее «точную» упорядоченность, так и зависящую от распределения p_1, p_2, \dots, p_n (упорядочивающую его) функцию j , причем один и тот же индекс λ сопоставлен числу ord и всем функциям j , отличающимся перестановками индексов элементарных исходов, возможности которых равны.

Разбиению (26^{**}) соответствует разбиение класса $\mathbb{P}\mathbb{r}_*$ всех вероятностей

$$\mathbb{P}\mathbb{r}_* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\mathbb{r}_{(\lambda)}, \quad (27^{**})$$

¹⁴Такой возможности должна соответствовать «вероятность», распределение которой не удовлетворяет условию нормировки.

образующее с (26**) когерентную пару.

В случае счетного Ω разбиения (26**) и (27**), образующие когерентную пару, остаются в силе, причем в (27**) $\mathbb{P}r_*$ – класс *всех* вероятностей.

Действительно, пусть pr_1, pr_2, \dots – произвольное распределение вероятностей. В силу условий $pr_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, pr_1 + pr_2 + \dots = 1$, во-первых, существует наименьший номер i_1 , для которого $pr_{i_1} > 0$, и, во-вторых, $pr_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $\exists n_1 \forall i > n_1 pr_i < pr_{i_1}$ и, следовательно, $\sup_i pr_i = \max_{i \leq n_1} pr_i = pr_{j_1}, 1 \leq j_1 < n_1$. Если i_2 – наименьший среди $i > i_1$ номер, для которого $pr_{i_2} > 0$, то $\exists n_2 \forall i > n_2 pr_i < pr_{i_2}$ и, следовательно, $\sup_{i, i \neq j_1} pr_i = \max_{i \leq n_2, i \neq j_1} pr_i = pr_{j_2} \leq pr_{j_1}$ и т.д.

3.3. Задача эмпирического определения теоретико-возможностной модели \mathcal{E} как задача проверки статистических гипотез

Рассмотрим задачу проверки статистических гипотез о распределении вероятности $Pr \in \mathbb{P}r_*$, определяющей стохастическую модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr)$ эксперимента \mathcal{E} , в которой на основе наблюдения исходов \mathcal{E} требуется принять решение в пользу одного из взаимоисключающих включений $Pr \in \mathbb{P}r_{(\lambda)}, \lambda \in \Lambda$. Если принимается гипотеза, согласно которой $Pr \in \mathbb{P}r_{(\lambda_0)}$, то наблюдаемые исходы \mathcal{E} свидетельствуют в пользу любой из эквивалентных теоретико-возможностных моделей $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}(\lambda_0)$, эксперимента.

Заметим, что в то время как гипотеза $Pr \in \mathbb{P}r_{(\lambda_0)}$ определяет стохастическую модель \mathcal{E} как класс вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Pr), Pr \in \mathbb{P}r_{(\lambda_0)}$, и, вообще говоря, такая модель \mathcal{E} не позволяет использовать стандартный формализм теории вероятностей для анализа и интерпретации его исходов, все возможностные пространства $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}(\lambda_0)$, определяют, по существу, одну и ту же теоретико-возможностную модель эксперимента \mathcal{E} , поскольку результаты анализа и интерпретации его исходов для всех моделей $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P), P \in \mathbb{P}(\lambda_0)$ одинаковы [2].

Обратимся к примеру $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и рассмотрим один из

шести «треугольников возможностей» \mathbb{P}^{ijk} , $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, изображенных на рис. 2, например, $\mathbb{P}^{123} = \mathbb{P}$. Выделим в нем семь подмножеств, $\mathbb{P}(\text{ord})$, $\text{ord} \in [0, 1]$, образующих разбиение (26*) класса \mathbb{P} на классы эквивалентных возможностей. Это – три одно-точечных подмножества \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1, 0, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1, 1, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1, 1, 1)\},$$

содержащих вершины \mathbb{P} , три стороны \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(0.110)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}, 1 = p_1 > p_2 > p_3 = 0\}, \\ \mathbb{P}_{(0.011)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}, 1 = p_1 = p_2 > p_3 > 0\}, \\ \mathbb{P}_{(0.101)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}, 1 = p_1 > p_2 = p_3 > 0\}, \end{aligned}$$

и, наконец, множество

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}, 1 = p_1 > p_2 > p_3 > 0\},$$

внутренних точек \mathbb{P} .

Проверим, что каждое из множеств (распределений) $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ определяет класс эквивалентных возможностей, отличный от остальных. Если $p \triangleq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}$ и, по определению,

$$\gamma p \triangleq (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3)), \quad \gamma(\cdot) \in \Gamma, \quad (28)$$

то, как легко видеть, все выделенные множества $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ инвариантны относительно преобразований (28). Например, если $p \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, то есть $p = (p_1, p_2, p_3)$, где $1 = p_1 > p_2 > p_3 > 0$, то и $\gamma p = (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3)) \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, ибо $1 = \gamma(p_1) > \gamma(p_2) > \gamma(p_3) > 0$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

С другой стороны, поскольку каждой точке $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}$ соответствует¹⁵ возможность $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, определенная для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ равенством $P(A) = \max_{i: \omega_i \in A} p_i$, а преобразованной точке $\gamma p = (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3))$ соответствует эквивалентная $P(\cdot)$ возможность $(\gamma * P)(\cdot)$, $(\gamma * P)(A) = \max_{i: \omega_i \in A} \gamma(p_i) = \gamma(\max_{i: \omega_i \in A} p_i) = \gamma(P(A))$, то каждому множеству распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$

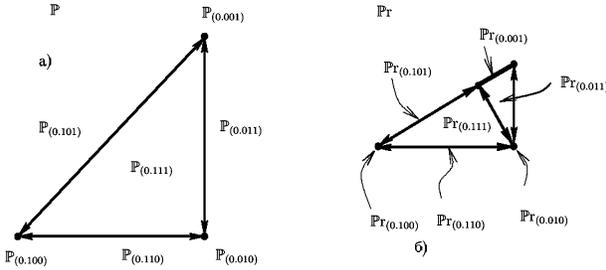


Рис. 6. а) «Треугольник возможностей» \mathbb{P} и семь классов распределений $\mathbb{P}_{(0,100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0,111)}$, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0,100)} \cup \mathbb{P}_{(0,010)} \cup \dots \cup \mathbb{P}_{(0,111)}$ (26*) и определяющих семь попарно различных классов $\mathbb{P}_{(0,100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0,111)}$ эквивалентных возможностей. б) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}_r^{123} = \mathbb{P}_r$ и семь его подмножеств-прообразов $\mathbb{P}_{(0,100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0,111)}$, образующих разбиение (27*). При этом $\mathbb{P}_{(0,100)} = \mathbb{P}(\mathbb{P}_r)$, $\mathbb{P}_r \in \mathbb{P}_{(0,100)}$, \dots , $\mathbb{P}_{(0,111)} = \mathbb{P}(\mathbb{P}_r)$, $\mathbb{P}_r \in \mathbb{P}_{(0,111)}$; $\mathbb{P}_{(0,100)} = \mathbb{P}(P)$, $P \in \mathbb{P}_{(0,100)}$, \dots , $\mathbb{P}_{(0,111)} = \mathbb{P}(P)$, $P \in \mathbb{P}_{(0,111)}$.

отвечает класс эквивалентных возможностей, которые обозначены теми же символами $\mathbb{P}_{(0,100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0,111)}$.

Рассмотрим теперь «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_r^{123}$ и выделим в нем подмножества, соответствующие подмножествам $\mathbb{P}_{(0,100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0,111)}$ «треугольника возможностей». Рассмотрим подмножество

$$\mathbb{P}_{r(0,111)} = \{(\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \mathbb{P}_r, 1 > \text{pr}_1 > 1/2 > \text{pr}_2 > \text{pr}_3 = 1 - \text{pr}_1 - \text{pr}_2 > 0\}. \quad (29)$$

Для каждой точки $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \mathbb{P}_{r(0,111)}$ интервалы $\Delta_1 = [\text{pr}_1, 1]$, $\Delta_2 = [\text{pr}_2, 1 - \text{pr}_1]$ и $\Delta_3 = [\text{pr}_3, 1 - \text{pr}_1 - \text{pr}_2 = \text{pr}_3] = \{\text{pr}_3\}$ не пересекаются, следовательно, отображение (25) $p_i = g(\text{pr}_i)$, $i = 1, 2, 3$, $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathbb{P}_r)$, $\mathbb{P}_r \in \mathbb{P}_{r(0,111)}$, каждой точке¹⁶ $\text{pr} \in \mathbb{P}_{r(0,111)}$

¹⁵Напомним, что в этом примере $\mathbb{P}_{(\text{ord})}$ обозначает как класс эквивалентных возможностей, так и множество их распределений в \mathcal{R} .

¹⁶Напомним, что в рассматриваемом примере вероятность $\mathbb{P}_r \in \mathbb{P}_r$ «отожде-

при любой фиксированной функции $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\text{Pr})$ ставит в соответствие точку множества $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$, а, когда $g(\cdot)$ пробегает все $\mathbb{G}(\text{Pr})$, точки $g\text{pr} \triangleq (g(\text{pr}_1), g(\text{pr}_2), g(\text{pr}_3))$ заполняют все множество $\mathbb{P}_{(0.111)}$ (при любой фиксированной точке $\text{pr} \in \text{Pr}_{(0.111)}$!), то есть

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \bigcup_{g(\cdot) \in \mathbb{G}(\text{Pr})} \{(g(\text{pr}_1), g(\text{pr}_2), g(\text{pr}_3))\},$$

$$\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}_{(0.111)}. \quad (30)$$

Равенство (30) определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot) : \text{Pr}_{(0.111)} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$, ставящее в соответствие каждой точке $\text{pr} \in \text{Pr}_{(0.111)}$ множество $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$.

Доопределим $\mathbb{P}(\cdot)$ на всем треугольнике вероятностей Pr . Для этого введем кроме подмножества $\mathbb{P}_{(0.111)}$ (29) еще шесть подмножеств Pr (см. рис. 6, б)) $\text{Pr}_{(0.100)} = \{(1, 0, 0)\}$ – вершина Pr , ей согласно правилу (25) отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1, 0, 0)\} \subset \mathbb{P}$, функция $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\text{Pr})$, $\text{Pr} \in \text{Pr}_{(0.100)}$ в (25): $g(1) = 1$, $g(0) = 0$; $\text{Pr}_{(0.010)} = \{(1/2, 1/2, 0)\}$ – вершина Pr , ей отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1, 1, 0)\} \subset \mathbb{P}$; $\text{Pr}_{(0.001)} = \{(\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}, 1/2 \geq \text{pr}_1 \geq \text{pr}_2 = \text{pr}_3 = 1 - \text{pr}_1 - \text{pr}_2\}$ – отрезок, соединяющий точки $\text{pr} = (1/2, 1/4, 1/4)$ и $\text{pr} = (1/3, 1/3, 1/3)$, содержащий эти точки. По правилу (25) ему соответствует одноточечное подмножество $\mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1, 1, 1)\} \subset \mathbb{P}$, ибо для всех точек отрезка $\text{Pr}_{(0.001)}$ $g(\text{pr}_1) = g(\text{pr}_2) = g(\text{pr}_3) = 1$; $\text{Pr}_{(0.110)} = \{(\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}, 1 > \text{pr}_1 > 1/2 > 1 - \text{pr}_1 = \text{pr}_2 > \text{pr}_3 = 0\}$ – нижняя сторона треугольника Pr без его вершин. Каждой точке $\text{pr} \in \text{Pr}_{(0.110)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.110)} \subset \mathbb{P}$: $\mathbb{P}_{(0.110)} = \{(g(\text{pr}_1), g(\text{pr}_2), g(\text{pr}_3)), g(\cdot) \in \mathbb{G}(\text{Pr})\}$, $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}_{(0.110)}$. $\text{Pr}_{(0.011)}$ – подмножество треугольника с вершинами $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/3, 1/3, 1/3)$, $(1/2, 1/4, 1/4)$ без этих вершин и без стороны, соединяющей вершины $(1/3, 1/3, 1/3)$ и $(1/2, 1/2, 0)$. Каждой точке $\text{Pr}_{(0.011)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.011)} \subset \mathbb{P}$: $\mathbb{P}_{(0.011)} = \{(g(\text{pr}_1), g(\text{pr}_2), g(\text{pr}_3)), g(\cdot) \in \mathbb{G}(\text{Pr})\}$, $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}_{(0.011)}$. Наконец, каждой точке подмножества $\text{Pr}_{(0.101)} = \{(\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in$

ствляется» с точкой $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) \in \text{Pr}$, координаты которой задают распределение Pr .

$\mathbb{P}r, 1 > pr_1 > 1/2 > 1 - pr_1 > pr_2 = pr_3 > 0\}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.101)} \subset \mathbb{P}, \mathbb{P}_{(0.101)} = \{(g(pr_1), g(pr_2), g(pr_3)), g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathbb{P}r)\}, pr = (pr_1, pr_2, pr_3) \in \mathbb{P}r_{(0.101)}.$

На рис. 7 изображен «треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}r_*$, представленный в виде объединения двадцати пяти непересекающихся подмножеств, каждому из которых по правилу (25) сопоставлен класс возможностей, определенный условиями упорядоченности возможностей $p_i, i = 1, 2, 3,$ элементарных исходов $\mathcal{E},$ – всего 25 попарно различных классов эквивалентных возможностей.

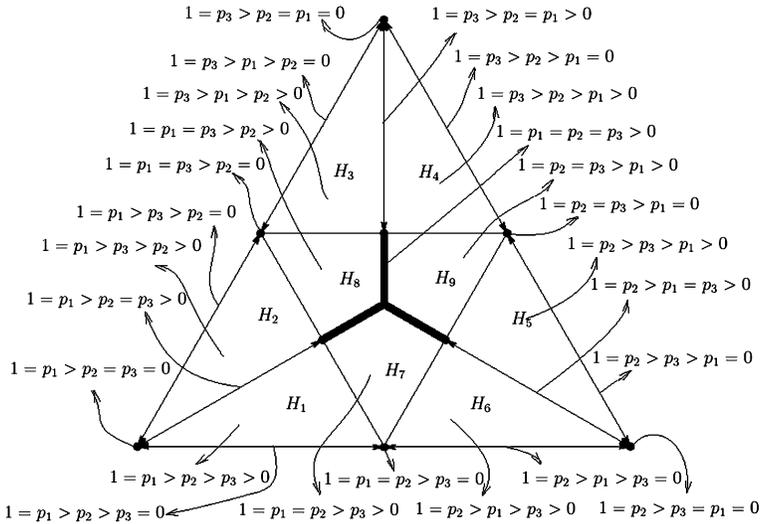


Рис. 7. Двадцать пять подмножеств $\mathbb{P}r_*$, образующих разбиение (27**), и соответствующие им условия упорядоченности возможностей $p_i, i = 1, 2, 3,$ определяющие различные классы эквивалентности возможностей в разбиении (26**). Среди двадцати пяти подмножеств девять, имеющих «положительную площадь», отмечены символами $H_1, H_2, \dots, H_9.$

Обратимся теперь к задаче экспериментального определения теоретико-возможностей модели \mathcal{E} на основе наблюдения его исходов. Общую схему решения разъясим на примере определения теоретико-возможностей модели стохастического эксперимента $\mathcal{E},$

в модели $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \mathcal{P}(\Omega), \text{Pr})$ которого на сей раз не только вероятности $\text{pr}_i = \text{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$, но и их упорядоченность неизвестны. Предположим, что \mathcal{E} может быть воспроизведен n раз при одних и тех же значениях вероятностей $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3$. В таком случае вероятность того, что при n независимых испытаниях исход ω_i реализуется k_i раз, $i = 1, 2, 3$, равна

$$\text{Pr}^{(n)}(k_1, k_2, k_3 | \text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} (\text{pr}_1)^{k_1} (\text{pr}_2)^{k_2} (\text{pr}_3)^{k_3},$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = n. \quad (31)$$

В равенстве (31) значения вероятностей $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3 = 1 - \text{pr}_1 - \text{pr}_2$ являются неизвестными значениями параметров полиномиального распределения, относительно которых, на основе наблюдения k_1, k_2, k_3 , надлежит принять одну из 25 гипотез, представленных на рис. 7. Эта задача проверки статистических гипотез эквивалентна задаче выбора одной из 25 теоретико-возможностных моделей \mathcal{E} на основе наблюдения значений k_1, k_2, k_3 , или, что то же самое, – на основе наблюдения частот $f_i = k_i/n$ исходов ω_i , $i = 1, 2, 3$.

При априори произвольных значениях $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3$ простейшим решением задачи определения распределения возможностей (и соответственно – теоретико-возможностной модели \mathcal{E}) состоит в том, что на основе наблюдаемого вектора частот $f \triangleq (f_1, f_2, f_3)$ выбирается упорядоченность возможностей p_1, p_2, p_3 , определяемая тем подмножеством $\mathbb{P}\Gamma_*$, в котором содержится¹⁷ f , см. рис. 7.

Проиллюстрируем решение рассматриваемой задачи в легко обозримой байесовской постановке. Допустим, что в (31) вектор вероятностей $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3)$ является значением случайного вектора $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, имеющего, например, распределение Дирихле с плотностью¹⁸

¹⁷Заметим, что $f = (f_1, f_2, f_3)$ является оценкой максимального правдоподобия $\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3)$.

¹⁸Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

$$d(\text{pr}|s) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2 + s_3)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_3)} \prod_{i=1}^3 (\text{pr}_i)^{s_i-1} \cdot \delta(\text{pr}_1 + \text{pr}_2 + \text{pr}_3 - 1),$$

$$\text{pr} = (\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3), \quad \text{pr}_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

локализованной на плоскости $\text{pr}_1 + \text{pr}_2 + \text{pr}_3 = 1$, $s = (s_1, s_2, s_3)$ – параметры распределения Дирихле, $s_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. В таком случае в (31) $q(k|\text{pr}) \triangleq \text{Pr}^{(n)}(k_1, k_2, k_3|\text{pr}_1, \text{pr}_2, \text{pr}_3)$ – условная вероятность значения $k = (k_1, k_2, k_3)$ случайного вектора $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ при условии $\pi = \text{pr}$ и, как нетрудно проверить, $d(\text{pr}|s + k)$ – условная плотность распределения π при условии, что исход ω_i в n испытаниях наблюдается k_i раз, $i = 1, 2, 3$, [4]. При этом отличными от нуля будут условные вероятности не всех 25, а лишь выделенных девяти гипотез H_1, H_2, \dots, H_9 :

$$\text{Pr}(\pi \in H_j|k) = \int_{\text{pr} \in H_j} d(\text{pr}|s + k) d\text{pr}_1 d\text{pr}_2 d\text{pr}_3, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

Байесовское решение, минимизирующее вероятность ошибки, предписывает при наблюдении $k = (k_1, k_2, k_3)$ принять гипотезу $H_{j(k)}$, где $j(k) = \arg \max_{1 \leq i \leq 9} \text{Pr}(\pi \in H_i|k)$, и соответствующий класс эквивалентных возможностных пространств считать теоретико-возможностной моделью Э. Средняя вероятность ошибки байесовского решения, равная $1 - \mathbf{E} \max_{1 \leq i \leq 9} \text{Pr}(\pi \in H_i|\varkappa)$, есть средняя вероятность ошибочного определения теоретико-возможностной модели Э. Здесь \mathbf{E} –символ математического ожидания по распределению π и \varkappa , [6].

В заключение мне приятно выразить признательность моим коллегам Г. Животникову, О. Жучко и О. Мондрус за обсуждение содержания статьи и помощь при ее оформлении.

Список литературы

- [1] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

- [2] Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [3] Дюбуа А., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.
- [4] Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
- [5] Пытьев Ю.П., Животников Г.С. Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ // Интеллектуальные системы. 2001. Т. 6. Вып. 1–4. С. 63–90.
- [6] Боровков А.Л. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.