

Распознавание односвязных цифр автоматом

Б. Стаматович

Показывается, что лабиринты, задающие цифру два, распознаваемы автоматом. Отмечается, что эта техника может быть распространена на случай других односвязных цифр 1, 3, 4, 5 и 7.

1. Основные понятия и результаты

Основные обозначения и понятия, такие как конечный автомат, лабиринт и пешка, взяты из [1, 2, 3]. Обозначим через $e = (1, 0)$, $n = (0, 1)$, $w = (-1, 0)$, $s = (0, -1)$ единичные векторы евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^2$ и через $0 = (0, 0)$ — нулевой вектор.

Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ — произвольные элементы множества $\mathbb{Z}^2$. Говорим, что a и b (слабо) *соседние*, если $(\|a - b\| < 2)$ $\|a - b\| = 1$, где $\|a - b\| = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{1/2}$. Последовательность $a = p_0, p_1, \dots, p_m = b$ в $\mathbb{Z}^2$ называется (слабой) *цепью*, связывающей точки a и b , если точки p_{i-1} и p_i являются (слабо) соседними для любого i , $1 \leq i \leq m$. Множество V , $V \subseteq \mathbb{Z}^2$, называется (слабо) *связным*, если для любых $a, b \in V$ существует (слабая) цепь в V , связывающая их. Компонентой (слабой) *связности* множества V называется любое максимальное (слабо) связанное подмножество множества V .

π -*лабиринтом* называется любое отображение $c : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E^2$, ($E^2 = \{1, 0\}$) такое, что $P_c = c^{-1}(\{1\})$ является связным множеством. Если p_0 — произвольная точка в P_c , то пара (c, p_0) называется π -лабиринтом с началом p_0 . π -лабиринт называется (конечным)

бесконечным, если множество P_c является (конечным) бесконечным. Далее под π -лабиринтом будем понимать конечный π -лабиринт. Дырой π -лабиринта c называется произвольная компонента слабой связности множества $Z^2 \setminus P_c$.

Пусть c - произвольный π -лабиринт. Рассмотрим граф $G_c = (P_c, X_c)$, у которого P_c - множество вершин, X_c - множество дуг и $\langle p_1, p_2 \rangle \in X_c$ тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 - соседние точки ($p_1, p_2 \in P_c$).

Обозначим $D = \{e, n, w, s\}$.

Пусть $V = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$ - упорядоченный набор различных ненулевых элементов из Z^2 и $A = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ - произвольный инициальный автомат такой, что $B = V'$, $V' \subseteq \{0, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$ и $A = (E^2)^k$. Пару (A, V) назовем пешкой, V - полем зрения этой пешки. Пешка (A, V) называется *регулярной*, если функция ψ такова, что для произвольных $q \in Q$ и $a = (a_1, \dots, a_k) = (1, a_2, \dots, a_k) \in (E^2)^k$ из того, что $\psi(q, a) = p_i$, для некоторого i , $0 \leq i \leq k-1$, следует, что $a_{i+1} = 1$; $p_0 = 0$.

Пусть даны регулярная пешка (A, V) и π -лабиринт (c, p_0) ; $V = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$, $A = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$. Набор V определяет для каждого $z \in Z^2$ набор $V(z) = (z, z + p_1, z + p_2, \dots, z + p_{k-1})$. Тогда поведением пешки (A, V) в π -лабиринте (c, p_0) называется последовательность $\pi(A, V; c, p_0) : (z_0, q_0, a_0, b_0), (z_1, q_1, a_1, b_1), \dots$, где $z_0 = p_0$, $z_{i+1} = z_i + b_i$, $q_{i+1} = \varphi(q_i, a_i)$, $a_i = c[V(z_i)] = (c(z_i), c(z_i + p_1), \dots, c(z_i + p_{k-1}))$ и $b_i = \psi(q_i, a_i)$. Ясно, что если пешка (A, V) регулярна, то $z_t \in P_c$ для любого t , $t = 0, 1, \dots$.

Пусть $\text{Int}(A, V; c, p_0) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{z_i\}$. Множество $\text{Fr}(A, V; c, p_0) = P_c \setminus \text{Int}(A, V; c, p_0)$ называется краем для пешки (A, V) в π -лабиринте (c, p_0) . Если $\text{Fr}(A, V; c, p_0) = \emptyset$, то говорим, что пешка (A, V) *обходит* π -лабиринт (c, p_0) .

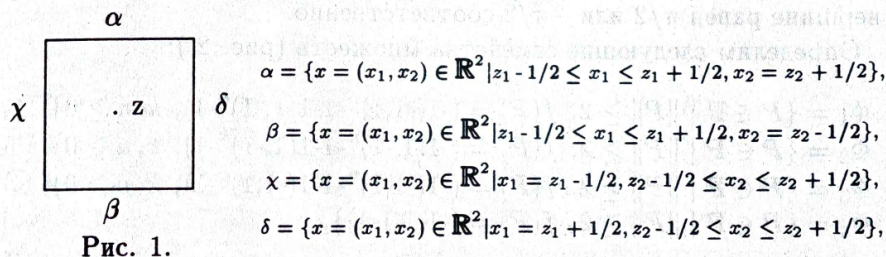
В дальнейшем будем рассматривать только регулярные пешки, для которых $V = ((1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, -1), (0, 1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1))$ и $B = D \cup \{0\}$.

Кроме инициального состояния q_0 автомата $A_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$

можно ввести множество заключительных состояний $Q_F \subseteq Q$. Пусть $Q_F = \{q_{F_0}, q_{F_1}\}$. Будем говорить, что автомат A_{q_0} распознает лабиринт L_ν , если при его запуске в лабиринт L_ν происходит переход в заключительное состояние q_{F_1} , а при его запуске в лабиринт $L'_\nu \neq L_\nu$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0} . Пусть C – класс инициальных лабиринтов. Говорим, что автомат A_{q_0} распознает класс C , если при его запуске в любой лабиринт L_ν происходит переход в заключительное состояние q_{F_1} тогда и только тогда, когда $L_\nu \in C$ и для любого лабиринта $L_\nu \notin C$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0} .

Пусть $P = \{K \subseteq \mathbb{Z}^2 \mid K \text{ – связное конечное множество такое, что множество } \mathbb{Z}^2 \setminus K \text{ – связное}\}$.

Если $K \in P$, то границей ∂K множества K будем называть множество $\{z \in K \mid \text{существует точка } z'' \text{ в } \mathbb{Z}^2 \setminus K \text{ такая, что } z \text{ и } z'' \text{ слабо соседние}\}$. Вокруг каждой точки $z = (z_1, z_2) \in \partial K$ рассмотрим квадрат kv_z с длиной сторон 1. Его стороны обозначим через $\alpha, \beta, \chi, \delta$ (рис. 1):



Стороны $\alpha, \beta, \chi, \delta$ квадрата kv_z , $z \in K$, имеют свойство "сторона находится между точками множества K и множества $\mathbb{Z}^2 \setminus K$ ", если соответственно точки $(z_1, z_2 + 1)$, $(z_1, z_2 - 1)$, $(z_1 - 1, z_2)$, $(z_1 + 1, z_2)$, не принадлежат множеству K .

Пусть st_z – множество сторон квадрата kv_z , для которых "сторона находится между точками множества K и множества $\mathbb{Z}^2 \setminus K$ ". Фигура $F_K = \bigcup_{z \in \partial K} st_z$ представляет собой прямоугольный полигон.

Пусть $K \subset \mathbb{Z}^2$ – конечное связное множество. Самая нижняя и самая правая точка (НП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$

такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$, $z_2 < a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 > a_1$. Самая нижняя и самая левая точка (НЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$, $z_2 < a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 < a_1$. Самая верхняя и самая правая точка (ВП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$, $z_2 > a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 > a_1$. Самая верхняя и самая левая точка (ВЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$, $z_2 > a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 < a_1$.

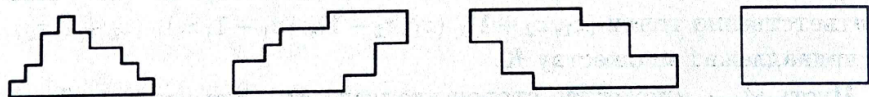
Самая правая и самая нижняя точка (ПН) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K$, $z_1 > a_1$ или, если $z_1 = a_1$, тогда $z_2 < a_2$.

Пусть $(S)^*$ - множество всех слов $\alpha = \alpha(1)\alpha(2) \dots \alpha(k)$, $k \geq 4$, над алфавитом $S = \{-1, 1\}$. Определим отображение $f: P \rightarrow (S)^*$ следующим образом. Пусть $P \in P$. Обходя полигон F_P в положительном направлении, начиная с самой нижней и самой правой точки, перенумеруем вершины полигона F_P , сопоставив им -1 или 1 , если угол в вершине равен $\pi/2$ или $-\pi/2$ соответственно.

Определим следующие семейства множеств (рис. 2):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \{P \in P \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(-1,1)^n - 1(1,-1)^k - 1), k, n \geq 0\} \\ \Phi_2 &= \{P \in P \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(1,-1)^n - 1(1,-1)^k - 1), k, n \geq 0\} \\ \Phi_3 &= \{P \in P \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1(-1,1)^n - 1(-1,1)^k - 1), k, n \geq 0\} \\ \Phi_4 &= \{P \in P \mid \|P\| \geq 2, f(P) = (-1-1-1-1)\},\end{aligned}$$

где $(a, b)^n = \underbrace{(ab)(ab) \dots (ab)}_n, n \in N$.



$$(-1(-1,1)^4 - 1(1,-1)^3 - 1) \quad (-1(1,-1)^2 - 1(1,-1)^3 - 1) \quad (-1(-1,1)^2 - 1(-1,1)^2 - 1) \quad (-1-1-1-1)$$

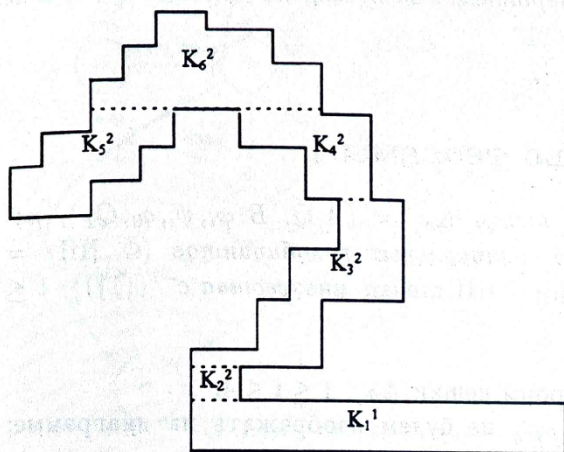
рис. 2.

Если $z_j = (x_j, y_j) \in Z^2$, $j = 1, 2, 3, 4$, такие что $y_2 = y_3$, $y_1 = y_4$ и $y_1 \leq y_2$, то обозначим $A_{\Phi_i}^{z_1, z_2, z_3, z_4} = \{K \in \Phi_i \mid z_1, z_2, z_3, z_4 - \text{НЛ, ВП,}$

ВЛ, НЛ точки множества K соответственно}, $i \in \{1, \dots, 4\}$.

Определим класс π -лабиринтов, которые представляют собой цифру два.

Пусть $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1, 2, \dots, 17$, имеют свойства:



$$\left\{ \begin{array}{l} x_{16} \leq x_3 < x_2, \\ x_9 \leq x_{11} < x_{13} - 1, \\ x_{13} \leq x_6, \\ y_4 - 1 > y_3, \\ y_5 > y_4, \\ y_6 > y_5, \\ y_{16} = y_3 = y_2, \\ y_9 = y_{11} = y_{13} = y_6 \end{array} \right. \quad (2)$$

Тогда,

$$K_2^{\{z_i\}_{i=\overline{1,17}}} = \{K \in \mathbf{P} | K = K_1^2 \cup K_2^2 \cup K_3^2 \cup K_4^2 \cup K_5^2 \cup K_6^2\},$$

$$K_1^2 \in A_{\Phi_4}^{z_1, z_2, z_{16}, z_{17}}, K_2^2 \in A_{\Phi_4}^{z_3, z_4, z_{15}, z_{16}}, K_3^2 \in A_{\Phi_2}^{z_4, z_5, z_{14}, z_{15}},$$

$$K_4^2 \in A_{\Phi_3}^{z_5, z_6, z_{13}, z_{14}}, K_5^2 \in A_{\Phi_2}^{z_{11}, z_{12}, z_9, z_{10}}, K_6^2 \in A_{\Phi_1}^{z_6, z_7, z_8, z_9},$$

$$(z_5 + (0, 1) \notin K_4^2 \wedge z_5 + (0, -1) \notin K_3^2) \Rightarrow (z_5 + (-1, -1) \in K_3^2 \vee z_5 + (-1, 1) \in K_4^2),$$

$$z_{15} + (0, 1) \notin K_3^2, (x_7 = x_8) \Rightarrow (z_7 + (1, -1) \in K_6^2 \wedge z_7 + (-1, -1) \in K_6^2)\}$$

Определим класс π -лабиринтов C_2 :

$$C_2 = \{c : \mathbb{Z}^2 \rightarrow E^2 | c^{-1}(\{1\}) = K \in K_2^{\{z_i\}_{i=\overline{1,17}}}, z_i \in \mathbb{Z}^2, i = \overline{1,17} \text{ и выполнено условие (2)}\}.$$

Если рассматриваются только регулярные пешки, то можно воспользоваться более короткой записью: входным алфавитом считаем множество $A = \{0, 1, \dots, 255\}$, а множество $(E^2)^9$ рассматриваем как множество чисел $\sum_{i=1}^8 a_i 2^{i-1}$, являющихся кодами векторов $(1, a_1, \dots, a_8) \in (E^2)^9$.

Теорема 1. Существует пешка $A_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2, q_0, Q_F)$, которая распознает класс инициальных π -лабиринтов $(C_2, \Pi) = \{(c, r_{\Pi}) | c \in C_2, r_{\Pi} - \text{самая правая и самая нижняя точка множества } c^{-1}(\{1\})\}$, имеет 37 состояний и обходящая любой лабиринт из класса (C_2, Π) с n вершинами за время, не меньшее $n + 4$ и не большее $\begin{cases} 17, & n \leq 11, \\ 5n - 37, & n \geq 12. \end{cases}$

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Существует пешка $A_{\Phi_i} = (A, Q_i, B, \varphi_i, \psi_i, q_0, Q_F)$, которая распознает класс инициальных π -лабиринтов $(\Phi_i, \Pi) = \{(c, r_{\Pi}) | c^{-1}(\{1\}) \in \Phi_i, r_{\Pi} - \text{НП точка множества } c^{-1}(\{1\})\}$, $1 \leq i \leq 4$.

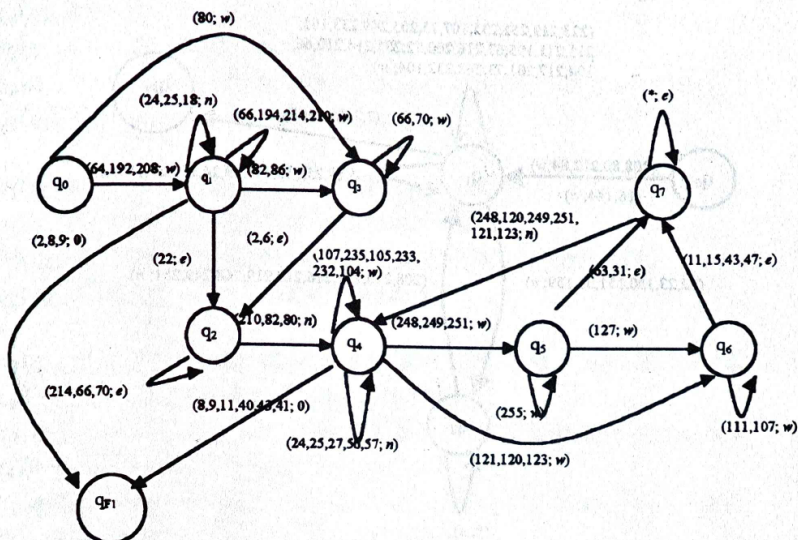
Доказательство. Построим пешки A_{Φ_i} , $1 \leq i \leq 4$.

Переход в состояние q_F не будем изображать на диаграмме; предполагаем, что это он осуществляется для каждого $a \in A$, которое не записано как вход какого-либо состояния. Используя обозначение $(*, w)$, где $w \in D$, предполагаем, что автомат движется в направлении w для каждого $a \in A$, которое не записано как вход этого состояния.

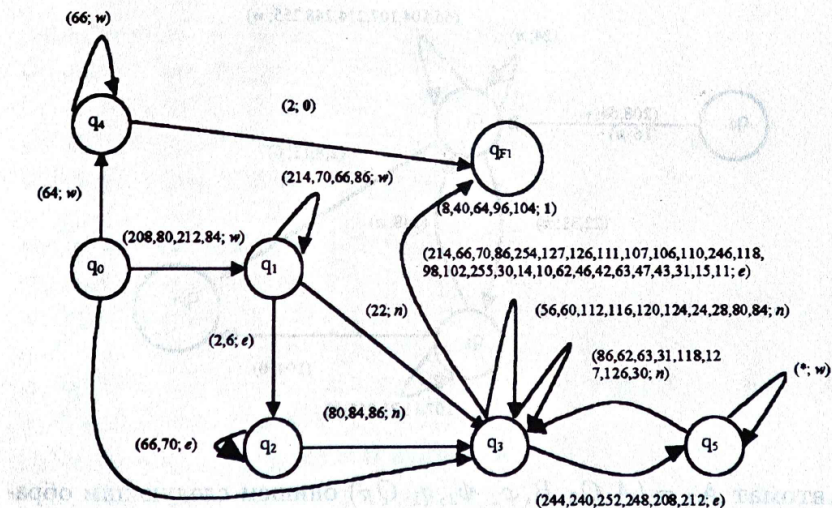
Из определения класса C_2 следует, что если $c \in C_2$, то множество $c^{-1}(\{1\})$ можно горизонтальными отрезками разделить на подмножества C_j , $j \in (1, \dots, 6)$, так что для каждого $j \in \{1, \dots, 6\}$ существует $l \in \{1, \dots, 4\}$ такое, что $C_j \in \Phi_l$.

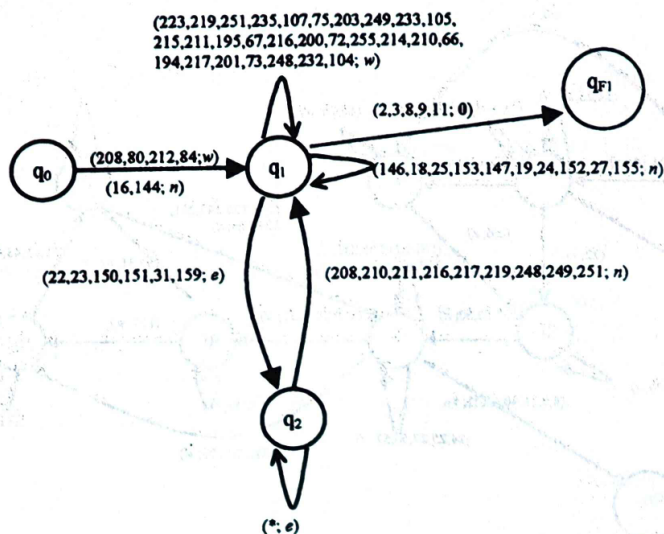
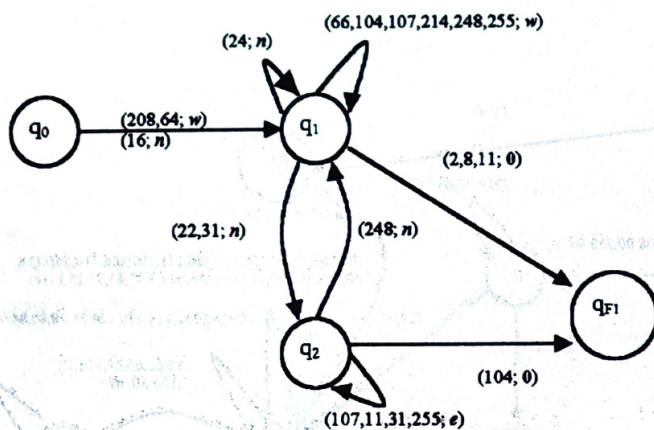
Построим пешку A_2 . В описании автомата предполагаем существование "приоритета" между входными буквами некоторого состояния, определенного через понятие "описан раньше".

Автомат A_{Φ_1} :



Автомат A_{Φ_2} :



Автомат A_{Φ_3} :Автомат A_{Φ_4} :

Автомат $A_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2, q_1, Q_F)$ опишем следующим образом:

$$Q_2 = \{q_i | i \in \{1, 2, \dots, 35\}\} \cup Q_F$$

$\varphi_2(q_1, a) = q_2, \psi_2(q_1, a) = w$ для $a = 208$,
 $\varphi_2(q_1, a) = q_4, \psi_2(q_1, a) = w$ для $a = 192$,
 $\varphi_2(q_1, a) = q_8, \psi_2(q_1, a) = w$ для $a = 64$,
 $\varphi_2(q_1, a) = q_3, \psi_2(q_1, a) = w$ для $a \in \{80, 96, 112, 224, 240\}$,
 $\varphi_2(q_1, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_1, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_2, a) = q_2, \psi_2(q_2, a) = w$ для $a = 214$,
 $\varphi_2(q_2, a) = q_7, \psi_2(q_2, a) = n$ для $a = 22$,
 $\varphi_2(q_2, a) = q_3, \psi_2(q_2, a) = w$ для $a \in \{86, 118, 246\}$,
 $\varphi_2(q_2, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_2, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_3, a) = q_3, \psi_2(q_3, a) = w$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_3 = 0, a_6 = 1\}$,
 $\varphi_2(q_3, a) = q_3, \psi_2(q_3, a) = s$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_3 = 1, a_0 = 0\}$,
 $\varphi_2(q_3, a) = q_5, \psi_2(q_3, a) = s$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 0, a_0 = 1\}$,
 $\varphi_2(q_3, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_3, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_4, a) = q_9, \psi_2(q_4, a) = n$ для $a = 22$,
 $\varphi_2(q_4, a) = q_8, \psi_2(q_4, a) = n$ для $a = 18$,
 $\varphi_2(q_4, a) = q_4, \psi_2(q_4, a) = w$ для $a \in \{210, 214\}$,
 $\varphi_2(q_4, a) = q_3, \psi_2(q_4, a) = w$ для $a \in \{118, 246, 86, 242\}$,
 $\varphi_2(q_4, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_4, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_5, a) = q_6, \psi_2(q_5, a) = w$ для $a = 208$,
 $\varphi_2(q_5, a) = q_8, \psi_2(q_5, a) = w$ для $a \in \{64, 192\}$,
 $\varphi_2(q_5, a) = q_5, \psi_2(q_5, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1, a_2 = 0\}$,
 $\varphi_2(q_5, a) = q_5, \psi_2(q_5, a) = s$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 0, a_3 = 1\}$,
 $\varphi_2(q_5, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_5, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_6, a) = q_6, \psi_2(q_6, a) = w$ для $a \in \{214, 248, 255\}$,
 $\varphi_2(q_6, a) = q_7, \psi_2(q_6, a) = n$ для $a \in \{22, 31\}$,

$$\varphi_2(q_6, a) = q_8, \psi_2(q_6, a) = w \text{ для } a \in \{104, 232\}, \\ \varphi_2(q_6, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_6, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_7, a) = q_7, \psi_2(q_7, a) = e \text{ для } a \in \{27, 31, 107, 235, 251, 255\}, \\ \varphi_2(q_7, a) = q_6, \psi_2(q_7, a) = n \text{ для } a = 248, \\ \varphi_2(q_7, a) = q_8, \psi_2(q_7, a) = w \text{ для } a \in \{104, 232\}, \\ \varphi_2(q_7, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_7, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_8, a) = q_8, \psi_2(q_8, a) = w \text{ для } a \in \{66, 107, 194, 210, 235, 251, 255, \\ 248, 214\}, \\ \varphi_2(q_8, a) = q_8, \psi_2(q_8, a) = n \text{ для } a \in \{18, 24, 25, 27, 28, 29\}, \\ \varphi_2(q_8, a) = q_9, \psi_2(q_8, a) = n \text{ для } a \in \{22, 31\}, \\ \varphi_2(q_8, a) = q_{11}, \psi_2(q_8, a) = e \text{ для } a \in \{10, 14\}, \\ \varphi_2(q_8, a) = q_{10}, \psi_2(q_8, a) = w \text{ для } a \in \{124, 252\}, \\ \varphi_2(q_8, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_8, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_9, a) = q_9, \psi_2(q_9, a) = e \text{ для } a \in \{31, 255\}, \\ \varphi_2(q_9, a) = q_8, \psi_2(q_9, a) = n \text{ для } a \in \{248, 249\}, \\ \varphi_2(q_9, a) = q_{10}, \psi_2(q_9, a) = w \text{ для } a \in \{252, 253\}, \\ \varphi_2(q_9, a) = q_{11}, \psi_2(q_9, a) = e \text{ для } a \in \{11, 15\}, \\ \varphi_2(q_9, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_9, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_{10}, a) = q_{11}, \psi_2(q_{10}, a) = e \text{ для } a \in \{11, 15\}, \\ \varphi_2(q_{10}, a) = q_{10}, \psi_2(q_{10}, a) = w \text{ для } a \in \{107, 111, 127, 255\}, \\ \varphi_2(q_{10}, a) = q_{11}, \psi_2(q_{10}, a) = n \text{ для } a = 31, \\ \varphi_2(q_{10}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{10}, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_{11}, a) = q_{11}, \psi_2(q_{11}, a) = e \text{ для } a \in \{66, 70, 86, 98, 106, 107, 102, \\ 110, 111, 118, 126, 127, 214, 246, 254, 255, 11, 15\}, \\ \varphi_2(q_{11}, a) = q_{12}, \psi_2(q_{11}, a) = w \text{ для } a \in \{208, 212, 240, 244, 252, 253\}, \\ \varphi_2(q_{11}, a) = q_{13}, \psi_2(q_{11}, a) = n \text{ для } a \in \{80, 84, 112, 116, 124, 125\}, \\ \varphi_2(q_{11}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{11}, a) = 0 \text{ иначе};$$

$$\varphi_2(q_{12}, a) = q_{13}, \psi_2(q_{12}, a) = n \text{ для } a \in \{30, 31, 62, 63, 86, 118, 126, 127\}, \\ \varphi_2(q_{12}, a) = q_{12}, \psi_2(q_{12}, a) = w \text{ для } a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 +$$

$$a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\},$$

$$\varphi_2(q_{12}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{12}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{13}, \psi_2(q_{13}, a) = e \text{ для } a \in \{43, 47, 107, 111, 127, 255, 254, 126, 246, 214, 63, 31, 62, 46, 42, 11, 15, 30, 14, 10, 106, 110, 66, 70, 98, 102, 118, 86\},$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{13}, \psi_2(q_{13}, a) = n \text{ для } a \in \{56, 60, 184, 24, 28, 152, 120, 124, 112, 116, 80, 84\},$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{14}, \psi_2(q_{13}, a) = e \text{ для } a \in \{26, 27, 58, 59, 154, 155, 158, 159, 186, 187, 190, 191, 210, 242, 250, 251\},$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{12}, \psi_2(q_{13}, a) = w \text{ для } a \in \{208, 212, 240, 244, 248, 252\},$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{16}, \psi_2(q_{13}, a) = w \text{ для } a \in \{72, 200, 216\},$$

$$\varphi_2(q_{13}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{13}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$$\varphi_2(q_{14}, a) = q_{14}, \psi_2(q_{14}, a) = e \text{ для } a \in \{106, 107, 210, 214, 234, 235, 242, 246, 250, 251, 254, 255\},$$

$$\varphi_2(q_{14}, a) = q_{15}, \psi_2(q_{14}, a) = w \text{ для } a \in \{104, 105, 96, 208, 192, 224, 232, 233\},$$

$$\varphi_2(q_{14}, a) = q_{16}, \psi_2(q_{14}, a) = n \text{ для } a \in \{240, 248, 249\},$$

$$\varphi_2(q_{14}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{14}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$$\varphi_2(q_{15}, a) = q_{16}, \psi_2(q_{15}, a) = n \text{ для } a \in \{26, 27, 58, 59, 154, 155, 186, 187, 210, 242, 250, 251\},$$

$$\varphi_2(q_{15}, a) = q_{15}, \psi_2(q_{15}, a) = w \text{ для } a \in \{106, 107, 234, 235\},$$

$$\varphi_2(q_{15}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{15}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$$\varphi_2(q_{16}, a) = q_{16}, \psi_2(q_{16}, a) = w \text{ для } a \in \{214, 66, 194, 210, 216, 200, 72, 107, 235, 75, 203, 215, 255, 223, 251, 219, 217, 201, 73, 67, 195, 211, 248, 232, 104, 249, 233, 105\},$$

$$\varphi_2(q_{16}, a) = q_{16}, \psi_2(q_{16}, a) = n \text{ для } a \in \{18, 19, 24, 25, 27, 146, 147, 152, 153, 155\},$$

$$\varphi_2(q_{16}, a) = q_{17}, \psi_2(q_{16}, a) = e \text{ для } a \in \{22, 23, 31, 63, 150, 151, 159\},$$

$$\varphi_2(q_{16}, a) = q_{18}, \psi_2(q_{16}, a) = w \text{ для } a \in \{99, 227, 95, 127, 83, 115, 242, 243, 87, 247, 119, 91, 123, 98, 226, 82, 114, 86, 118, 246\},$$

$$\varphi_2(q_{16}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{16}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$\varphi_2(q_{17}, a) = q_{16}$, $\psi_2(q_{17}, a) = n$ для $a \in \{248, 249, 251, 210, 211, 216, 217, 219\}$,

$\varphi_2(q_{17}, a) = q_{17}$, $\psi_2(q_{17}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,

$\varphi_2(q_{17}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{17}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{18}, a) = q_{18}$, $\psi_2(q_{18}, a) = w$ для $a \in \{66, 67, 75, 98, 99, 102, 107, 70, 71, 103, 79, 111\}$,

$\varphi_2(q_{18}, a) = q_{19}$, $\psi_2(q_{18}, a) = s$ для $a \in \{10, 14, 42, 46, 106, 110, 122, 126, 62, 30, 234, 250, 254\}$,

$\varphi_2(q_{18}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{18}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{19}$, $\psi_2(q_{19}, a) = w$ для $a \in \{66, 98, 255, 127, 254, 126, 214, 86, 246, 252, 244, 212, 124, 84, 116, 111, 110, 102, 70, 120, 112, 80, 107, 106, 240, 248, 208, 118\}$,

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{19}$, $\psi_2(q_{19}, a) = s$ для $a \in \{30, 62, 10, 42, 28, 60, 46, 14, 24, 56\}$,

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{21}$, $\psi_2(q_{19}, a) = e$ для $a \in \{2, 6, 22\}$,

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{20}$, $\psi_2(q_{19}, a) = e$ для $a \in \{31, 63, 43, 47, 11, 15\}$,

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{21}$, $\psi_2(q_{19}, a) = n$ для $a \in \{16, 20\}$,

$\varphi_2(q_{19}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{19}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{20}, a) = q_{19}$, $\psi_2(q_{20}, a) = s$ для $a \in \{106, 110, 120, 124, 126, 248, 252, 254\}$,

$\varphi_2(q_{20}, a) = q_{20}$, $\psi_2(q_{20}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,

$\varphi_2(q_{20}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{20}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{21}, a) = q_{22}$, $\psi_2(q_{21}, a) = e$ для $a \in \{215, 87, 71, 67, 83, 211, 195, 115, 243, 227, 247, 119, 103, 99\}$,

$\varphi_2(q_{21}, a) = q_{21}$, $\psi_2(q_{21}, a) = n$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 0, a_4 = 1\}$,

$\varphi_2(q_{21}, a) = q_{21}$, $\psi_2(q_{21}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,

$\varphi_2(q_{21}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{21}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{22}, a) = q_{23}$, $\psi_2(q_{22}, a) = w$ для $a \in \{200, 201, 232, 233, 216, 217, 248, 249\}$,

$\varphi_2(q_{22}, a) = q_{28}$, $\psi_2(q_{22}, a) = w$ для $a \in \{72, 73, 104, 105\}$,

$\varphi_2(q_{22}, a) = q_{22}$, $\psi_2(q_{22}, a) = e$ для $a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,

$\varphi_2(q_{22}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{22}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{23}$, $\psi_2(q_{23}, a) = w$ для $a \in \{210, 211, 242, 243, 219, 251, 214, 246, 255, 223, 247, 215\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{24}$, $\psi_2(q_{23}, a) = w$ для $a \in \{91, 95, 82, 83, 115, 86, 87, 119, 114, 118\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{30}$, $\psi_2(q_{23}, a) = e$ для $a \in \{30, 62\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{26}$, $\psi_2(q_{23}, a) = w$ для $a \in \{122, 126\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{25}$, $\psi_2(q_{23}, a) = w$ для $a \in \{123, 127\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{27}$, $\psi_2(q_{23}, a) = w$ для $a \in \{250, 254\}$,

$\varphi_2(q_{23}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{23}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{24}, a) = q_{24}$, $\psi_2(q_{24}, a) = w$ для $a \in \{66, 67, 70, 71, 98, 99, 102, 103\}$,

$\varphi_2(q_{24}, a) = q_{26}$, $\psi_2(q_{24}, a) = w$ для $a \in \{106, 110\}$,

$\varphi_2(q_{24}, a) = q_{30}$, $\psi_2(q_{24}, a) = e$ для $a \in \{10, 14, 42, 46\}$,

$\varphi_2(q_{24}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{24}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{25}, a) = q_{25}$, $\psi_2(q_{25}, a) = w$ для $a \in \{107, 111\}$,

$\varphi_2(q_{25}, a) = q_{24}$, $\psi_2(q_{25}, a) = w$ для $a \in \{75, 79\}$,

$\varphi_2(q_{25}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{25}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{26}, a) = q_{26}$, $\psi_2(q_{26}, a) = w$ для $a \in \{107, 111\}$,

$\varphi_2(q_{26}, a) = q_{30}$, $\psi_2(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 43, 47\}$,

$\varphi_2(q_{26}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{26}, a) = 0$ иначе;

$\varphi_2(q_{27}, a) = q_{27}$, $\psi_2(q_{27}, a) = w$ для $a \in \{251, 255\}$,

$\varphi_2(q_{27}, a) = q_{26}$, $\psi_2(q_{27}, a) = w$ для $a \in \{123, 127\}$,

$\varphi_2(q_{27}, a) = q_{30}$, $\psi_2(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{31, 63\}$,

$\varphi_2(q_{27}, a) = q_{F_0}$, $\psi_2(q_{27}, a) = 0$ иначе;

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{28}, a) &= q_{28}, \psi_2(q_{28}, a) = w \text{ для } a \in \{66, 67, 75, 98, 99, 107\}, \\ \varphi_2(q_{28}, a) &= q_{23}, \psi_2(q_{28}, a) = w \text{ для } a \in \{194, 195, 203, 226, 227, 235\}, \\ \varphi_2(q_{28}, a) &= q_{29}, \psi_2(q_{28}, a) = w \text{ для } a = 106, \\ \varphi_2(q_{28}, a) &= q_{27}, \psi_2(q_{28}, a) = w \text{ для } a = 234, \\ \varphi_2(q_{28}, a) &= q_{F_1}, \psi_2(q_{28}, a) = 0 \text{ для } a \in \{10, 42\}, \\ \varphi_2(q_{28}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{28}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{29}, a) &= q_{29}, \psi_2(q_{29}, a) = w \text{ для } a = 107, \\ \varphi_2(q_{29}, a) &= q_{27}, \psi_2(q_{29}, a) = w \text{ для } a = 235, \\ \varphi_2(q_{29}, a) &= q_{F_1}, \psi_2(q_{29}, a) = 0 \text{ для } a \in \{11, 43\}, \\ \varphi_2(q_{29}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{29}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{30}, a) &= q_{31}, \psi_2(q_{30}, a) = n \text{ для } a \in \{82, 83, 91, 114, 115, 122, 123, \\ &210, 211, 216, 219, 217, 242, 248, 249, 250, 251, 243\}, \\ \varphi_2(q_{30}, a) &= q_{30}, \psi_2(q_{30}, a) = e \text{ для } a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \\ &a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}, \\ \varphi_2(q_{30}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{30}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{31}, a) &= q_{31}, \psi_2(q_{31}, a) = w \text{ для } a \in \{104, 105, 107, 232, 233, 235\}, \\ \varphi_2(q_{31}, a) &= q_{32}, \psi_2(q_{31}, a) = w \text{ для } a \in \{248, 249, 251\}, \\ \varphi_2(q_{31}, a) &= q_{31}, \psi_2(q_{31}, a) = n \text{ для } a = 123, \\ \varphi_2(q_{31}, a) &= q_{35}, \psi_2(q_{31}, a) = s \text{ для } a = 41, \\ \varphi_2(q_{31}, a) &= q_{F_1}, \psi_2(q_{31}, a) = 0 \text{ для } a \in \{11, 43\}, \\ \varphi_2(q_{31}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{31}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{32}, a) &= q_{34}, \psi_2(q_{32}, a) = e \text{ для } a \in \{31, 63\}, \\ \varphi_2(q_{32}, a) &= q_{32}, \psi_2(q_{32}, a) = w \text{ для } a = 255, \\ \varphi_2(q_{32}, a) &= q_{33}, \psi_2(q_{32}, a) = w \text{ для } a = 127, \\ \varphi_2(q_{32}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{32}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{33}, a) &= q_{34}, \psi_2(q_{33}, a) = e \text{ для } a \in \{11, 15, 31, 43, 47\}, \\ \varphi_2(q_{33}, a) &= q_{33}, \psi_2(q_{33}, a) = w \text{ для } a \in \{107, 111\}, \\ \varphi_2(q_{33}, a) &= q_{F_0}, \psi_2(q_{33}, a) = 0 \text{ иначе};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(q_{34}, a) &= q_{31}, \psi_2(q_{34}, a) = n \text{ для } a \in \{248, 249, 251\}, \\ \varphi_2(q_{34}, a) &= q_{34}, \psi_2(q_{34}, a) = e \text{ для } a \in \{b \in A | b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 +\end{aligned}$$

$$a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\},$$

$$\varphi_2(q_{34}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{34}, a) = 0 \text{ иначе;}$$

$$\varphi_2(q_{35}, a) = q_{35}, \psi_2(q_{35}, a) = w \text{ для } a \in \{66, 67, 75, 98, 99, 106, 107, 111, 110, 102, 103, 70, 71, 79, 82, 83, 122, 123, 114, 115, 91\},$$

$$\varphi_2(q_{35}, a) = q_{F_1}, \psi_2(q_{35}, a) = 0 \text{ для } a \in \{10, 11, 14, 15, 42, 43, 46, 47\},$$

$$\varphi_2(q_{35}, a) = q_{F_0}, \psi_2(q_{35}, a) = 0 \text{ иначе.}$$

Зная, как построенный автомат обходит лабиринт, для каждого $n \geq 11$ мы всегда можем построить лабиринты $L, L'' \in C_2$ такие, что $\|V(L)\| = \|V(L'')\| = n$, и время обхода для лабиринта L было минимально, а для лабиринта L'' — максимально.

Заметим в заключение, что аналогично можно определить односвязные цифры 1, 3, 4, 5, 7 и показать, что существует пешка, которая распознает эти цифры. В [4] показано, что для цифр с "дырой" не существует пешки, распознающей эти цифры.

Список литературы

- [1] Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2, вып. 1. С. 72-79.
- [2] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М. Наука. 1985.
- [3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М. Наука. 1985.
- [4] Стаматович Б. Распознавание лабиринтов автоматами // Дискретная математика. (в печати).