К вопросу о древовидности оптимальных информационных сетей включающего поиска*

Э.Э. Гасанов, А.В. Косолапов

В статье показано существование в общем случае таких задач включающего поиска, для которых оптимальные информационные сети недревовидны. Для более узкого класса информационных сетей, так называемых бесповторных, доказана древовидность оптимальных сетей включающего поиска.

1. Введение

В практике информационного поиска большое место занимают задачи, в которых отношения поиска являются отношениями частичного порядка. Такие задачи поиска встречаются практически во всех системах баз данных и в зависимости от интерпретации носят название включающего поиска [1], дескрипторного поиска [2, 3], поиска по ключевым словам, задачи о доминировании [4, 5] и т. п. Наиболее интересным примером задачи включающего поиска на булевом кубе является задача поиска с естественным отношением частичного порядка, задаваемом на булевом кубе, отношением "не меньше по-компонентно". Приведем наиболее распространенную интерпретацию задачи включающего поиска.

Предположим, что мы осуществляем поиск в дескрипторных автоматизированных информационно-поисковых системах [3, 6], то есть информационный массив состоит из документов, каждый документ описывается множеством дескрипторов (ключевых слов), запрос задает неко-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00597)

торую совокупность дескрипторов, и необходимо перечислить в информационном массиве все документы, содержащие в своем описании все дескрипторы, входящие в запрос. Занумеруем некоторым образом множество всех дескрипторов (*тезаурус*). Каждому документу сопоставим запись, представляющую собой булев вектор длины, равной мощности тезауруса, в i-ой компоненте которого стоит 0 (ноль) в том и только в том случае, когда i-ый дескриптор входит в описание данного документа. Запросы будем описывать аналогичными векторами, то есть в i-ой компоненте запроса будет стоять 0, если i-ый дескриптор входит в запрос. При поиске если в i-ой компоненте запроса стоит 0 (то есть i-ый дескриптор входит в запрос), то в i-ой компоненте искомой записи тоже должен стоять 0 (то есть запись должна содержать i-ый дескриптор), то есть каждая компонента запроса должна быть не меньше соответствующей компоненты записи. Таким образом, мы имеем задачу поиска на булевом кубе с отношением поиска "не меньше по-компонентно".

В общем случае включающий поиск встречается всегда, когда элементы информационного массива задаются множеством свойств (в частности, в дескрипторных автоматизированных информационно-поисковых системах — свойствами наличия дескриптора в описании документа) и необходимо перечислить в этом массиве элементы с определенным набором свойств, задаваемым запросом.

Исследование задачи включающего поиска в данной статье проводится с помощью информационных сетей с переключателями (ИСП), которые представляют собой многополюсные ориентированные сети, вершины и ребра которых имеют некоторую нагрузку. Нагрузка полюсов — это есть множество исходных данных. Граф сети отражает структуризацию данных. А нагрузка ребер и внутренних вершин задает набор средств ориентации в данных. Случай, когда граф сети является деревом, удобен и интересен тем, что структуры данных, соответствующие деревьям, практичны и их гораздо проще реализовать на ЭВМ, кроме того в классе древовидных структур гораздо легче получать нижние оценки сложности алгоритмов. Наиболее известной моделью, используемой для исследования сложности алгоритмов, является *алгебраическое дерево вычислений* [7, 8, 9, 10]. Разновидностью алгебраического дерева вычислений является так называемое (алгебраическое) *дерево решений порядка d* [11]. В случае когда d равно 1, получается *линейное дерево решений*, с использованием которого получены доказательства ряда ниж них оценок сложности [8, 9, 12]. Как видим, все эти структуры древовидны. Сетевые структуры, используемые в теории алгоритмов, такие, как стандартные схемы программы [13] или сети Петри [14, 15], применяются в основном для исследования качественных вопросов, таких как эквивалентность программ, проблемы безопасности, ограниченности, консервативности, устойчивости, достижимости и т. п. Тогда как авторов интересуют количественные характеристики программ, такие как время работы и объем памяти. Чтобы понять насколько оправдано использование древовидных структур в качестве моделей вычислений представляет интерес выявить такие типы задач информационного поиска, которые имели бы древовидные оптимальные информационные сети. Ранее опубликованные результаты одного из авторов [16] говорили в пользу того, для задач включающего поиска наиболее вероятной является древовидность оптимальной сети. Но в данной работе эта гипотеза опровергнута. Были найдены такие задачи включающего поиска, для которых оптимальные информационные сети не являются древовидными. С другой стороны был найден такой подкласс информационных сетей, в котором для любой задачи включающего поиска оптимальная сеть древовидна. Этот подкласс получил название бесповторных сетей, поскольку в нем вдоль любой ориентированной цепи, ведущей из корня, не могут дважды встречаться символы одной и той же нагрузочной функции.

Авторы выражают благодарность В.Б.Кудрявцеву и А.С.Подколзину за поддержку в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [17]. Напомним понятие информационной сети с переключателями (ИСП) и другие необходимые понятия из [17].

Пусть X — множество запросов, причем на X определено вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X, $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ; Y — множество записей (объектов поиска); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска; тройку $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или пятерку $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, если мы хотим подчеркнуть какое именно вероятностное пространство над X используется) будем называть *типом* или иногда более развернуто *типом задач информационного поиска*; тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y, в дальнейшем называемое *библиотекой*, будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или ЗИП, принадлежащей типу S, и обозначать $I \in S$), и будем считать, что задача $I = \langle X, V, \rho \rangle$ состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей из V, которые находятся в отношении ρ с запросом x, т.е. удовлетворяют запросу x; $O(y, \rho) = \{x \in X : x\rho y\}$ — тень записи $y \in Y$; $N_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$, где f — одноместный предикат, определенный на X, т.е. $f : X \to \{0, 1\}$; $\chi_{y,\rho} : X \to \{0, 1\}$ такая, что $N_{\chi_{y,\rho}} = O(y, \rho)$ — характеристическая функция записи y; F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X, называемое базовым множеством предикатов; G — множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X. Под переключателями будем понимать функции, областью значений которых являются конечные подмножества натурального ряда.

Пару $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ назовем базовым множеством.

Если n — натуральное число, а $g(x)$ — некий переключатель, то через $\xi_g^n(x)$ обозначим предикат, определенный на X , такой, что

$$N_{\xi_g^n} = \{x \in X : g(x) = n\}.$$

Обозначим

$$\widehat{G} = \{\xi_g^n : g \in G, n \in \mathbf{N}\}.$$

Определение понятия ИСП разбивается на два этапа. На первом этапе раскрывается структурная (схемная) часть этого понятия, на втором — функциональная.

Определение ИСП с точки зрения ее структуры.

Пусть нам дана ориентированная многополюсная сеть.

Выделим в ней один полюс и назовем его *корнем*, а остальные полюса назовем *листьями*.

Выделим в сети некоторые вершины и назовем их *точками переключения* (полюса могут быть точками переключения).

Если β — вершина сети, то через ψ_β обозначим *полустепень исхода* вершины β .

Каждой точке переключения β сопоставим некий символ из G, такой, что максимальное значение переключателя, соответствующего этому символу, не превышает ψ_β. Это соответствие назовем нагрузкой точек переключения.

Для каждой точки переключения β ребрам, из нее исходящим, поставим во взаимно однозначное соответствие числа из множества $\{\overline{1, \psi_\beta}\}$. Эти ребра назовем переключательными, а это соответствие — нагрузкой переключательных ребер.

Ребра, не являющиеся переключательными, назовем *предикатными*.

Каждому предикатному ребру сети сопоставим некоторый символ из множества F. Это соответствие назовем *нагрузкой предикатных ребер*.

Сопоставим каждому листу сети некоторую запись из множества Y. Это соответствие назовем *нагрузкой листьев*.

Полученную нагруженную сеть назовем *информационной сетью с переключателями* над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G\rangle$.

Определение функционирования ИСП.

Пусть нам дана ИСП U .

Последовательность ориентированных ребер сети (α_1, α_2), (α_2, α_3), $\ldots$, (α_{m-1}, α_m) назовем *ориентированной цепью* от вершины α_1 к вершине α_m.

Если c ребро сети, то через $[c]$ обозначим его нагрузку.

Проводимостью ребра (α, β) назовем предикат, равный $[(\alpha, \beta)]$, если ребро предикатное и $\xi_g^{[(\alpha,\beta)]}$, если ребро переключательное, где g — переключатель, соответствующий вершине α.

Проводимостью ориентированной цепи назовем конъюнкцию проводимостей ребер цепи.

Если зафиксировать запрос x, то цепь, проводимость которой на запросе x равна 1, назовем *проводящей цепью* на запросе x.

В ИСП по аналогии с контактными схемами введем для каждой пары вершин α и β *функцию проводимости* $f_{\alpha\beta}$ от вершины α к вершине β следующим образом:

- если $\alpha = \beta$, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 1$ $(x \in X)$;

- если $\alpha \neq \beta$ и не существует в ИСП ориентированных цепей от α к β, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$;
- если $\alpha \neq \beta$ и множество ориентированных цепей от α к β не пусто, то $f_{\alpha\beta}(x)$ равно дизъюнкции проводимостей всех ориентированных цепей от α к β.

Функцию проводимости от корня ИСП к некоторой вершине β ИСП назовем *функцией фильтра* вершины β и обозначим $\varphi_\beta(x)$.

Через $\mathcal{R}(U), \mathcal{P}(U), \mathcal{L}(U)$ (или просто $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$) обозначим множества вершин, точек переключения и листьев сети U соответственно.

Пусть $\mathcal{N}$ — некоторая подсеть (т.е. произвольное подмножество вершин и ребер) ИСП U. Через $\langle \mathcal{N} \rangle$ обозначим множество записей, соответствующих листьям этой подсети (в частности, если α — некоторый лист сети U, то под $\langle \alpha \rangle$ будем понимать запись, соответствующую листу α).

Будем говорить, что ИСП U реализует функцию $\mathcal{J} : X \to 2^Y$, называемую функцией ответа сети U и определяемую соотношением :

$$\mathcal{J}(x) = \langle \{\alpha \in \mathcal{L}(U) : \varphi_\alpha(x) = 1\} \rangle.$$

Понятие ИСП полностью определено.

В случае, когда базовое множество переключателей G пусто, т.е. в сетях нет переключателей, то ИСП называются *информационными сетями с дублированием листьев* (ИСД).

В данной статье мы будем в основном исследовать именно ИСД.

Скажем, что ИСП U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если для $\forall x \in X$

$$\mathcal{J}(x) = \{y \in V : x\rho y\}.$$

Сложностью ИСП U на запросе x назовем число

$$T(U, x) = b \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \cdot \varphi_\beta(x) + a \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \varphi_\beta(x),$$

где константа a характеризует сложность вычисления одного переключателя, а константа b — одного предиката.

Далее всюду будем предполагать, что мы находимся в условиях леммы 1 из [17], т.е. будем считать, что алгебра σ содержит все множества N_f, где $f \in F \cup \widehat{G}$.

При этих условиях $T(U,x)$ — случайная величина по x, и можно ввести понятия сложности сети и сложности ребра сети.

Сложностью ИСП U назовем математическое ожидание величины $T(U,x)$, т.е. число

$$T(U) = \mathbf{M}\, T(U,x).$$

Если (β,α) — ребро ИСП, то *сложностью этого ребра* назовем число

- $b \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})$ — если (β,α) — предикатное ребро;
- $a \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})/\psi_\beta$ — если это ребро переключательное.

Легко видеть, что сложность ИСП равна сумме сложностей ребер ИСП, т.е.

$$T(U) = b \cdot \sum_{\beta\in\mathcal{R}\setminus\mathcal{P}} \psi_\beta \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}) + a \cdot \sum_{\beta\in\mathcal{P}} \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}).$$

Далее всюду будем предполагать, что $a = b = 1$.

Пусть нам дана некая ЗИП I. *Сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$* назовем число

$$T(I,\mathcal{F}) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}(I,\mathcal{F})\},$$

где $\mathcal{U}(I,\mathcal{F})$ — множество всех ИСП над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающих ЗИП I.

Скажем, что базовое множество $\mathcal{F}$ полно для типа S, если для любой ЗИП I типа S $\mathcal{U}(I,\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Если существует такая ИСП $U \in \mathcal{U}(I,\mathcal{F})$, что $T(U) = T(I,\mathcal{F})$, то ИСП U будем называть *оптимальной* для ЗИП I.

Скажем, что некая вершина ИСП *достижима из корня* или просто *достижимая*, если функция фильтра этой вершины не равна тождественному нулю, в противном случае вершину называем *недостижимой.*

Скажем, что ребро ИСП *несущественное*, если выполняется хотя бы одно из следующих условий

- оно исходит из недостижимой вершины,
- оно является предикатным и входит в корень или в недостижимую вершину,

- оно является переключательным, и число, приписанное этому ребру, больше максимального возможного значения переключателя, соответствующего началу этого ребра,

- начало и конец ребра совпадают.

В противном случае ребро называем *существенным*.

Легко заметить, что удаление несущественных ребер из сети не изменяет функционирования сети и не увеличивает ее сложность. Поэтому всегда в дальнейшем мы будем рассматривать ИСП с точностью до несущественных ребер, а точнее будем считать, что все ребра в ИСП — существенные.

Теорема 1 (о существовании оптимальных сетей). *Пусть* $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P}\rangle$ *— такой тип, что множество запросов* X *конечно,* σ *— множество всех подмножеств* X, $\mathbf{P}$ *— такая вероятностная мера, что для любого* $B \subseteq X$ $\mathbf{P}(B) > 0$. *Тогда, если базовое множество* $\mathcal{F} = \langle F, G\rangle$ *полно для типа* S, *и множество* $F \cup \widehat{G}$ *конечно, то для любой ЗИП* I *типа* S *существует оптимальная ИСП.*

Рассмотрим тип задач включающего поиска:

$$S_b = \langle B^n, B^n, \overset{b}{\succeq}, \sigma, \mathbf{P}\rangle,$$

где B^n — *единичный n-мерный куб*, то есть

$$B^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n):\ \alpha_i \in \{0,1\}\ (i = \overline{1,n})\},$$

$\overset{b}{\succeq}$ — отношение поиска на $B^n \times B^n$, определяемое следующим соотношением

$$(x_1, \ldots, x_n)\overset{b}{\succeq}(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_i \geq y_i,\ i = \overline{1,n},$$

σ — алгебра подмножеств B^n, представляющая собой множество всех подмножеств B^n, $\mathbf{P}$ — равномерная вероятностная мера на σ, то есть такая мера, что для $\forall x \in B^n$ $\mathbf{P}(x) = 1/2^n$ и $\forall A \subseteq B^n$ $\mathbf{P}(A) = |A|/2^n$.

Напомним, что в соответствии с терминологией [18] формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$, где & - знак конъюнкции, $\sigma_k \in \{0,1\}$, $x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k = 1, 2, \ldots, r$ ($r \geq 1$ и $n \geq 1$), называется *конъюнкцией над множеством переменных* $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Если $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $j \neq k$, то конъюнкция называется *элементарной*. Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. Множество элементарных монотонных конъюнкций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{K}^n$.

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов α и β из B^n таких, что $\alpha \overset{b}{\succeq} \beta$, имеет место неравенство $f(\alpha) \geq f(\beta)$. Дизъюнкция элементарных монотонных конъюнкций есть монотонная функция. Множество монотонных булевых функций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{M}^n$.

Рассмотрим произвольную запись $y \in B^n$. Пусть $\{i_1, \ldots, i_k\}$ есть множество номеров координат вектора y, которые равны 1. Нетрудно заметить, что

$$\chi_{y,\overset{b}{\succeq}}(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \& x_{i_2} \& \ldots \& x_{i_k},$$

т.е. характеристическая функция записи y является элементарной монотонной конъюнкцией.

Отсюда согласно [17, теорема 1] сеть, разрешающая некоторую задачу включающего поиска, представляет собой сеть, реализующую некоторую систему элементарных монотонных конъюнкций. Откуда согласно [19, теорема 2] следует, что каждое из базовых множеств $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ и $\langle X^n, \emptyset \rangle$ является полным для типа S_b.

Легко видеть, что тип включающего поиска и любое из базовых множеств $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ и $\langle X^n, \emptyset \rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и значит для любой задачи включающего поиска существует оптимальная информационная сеть.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $n > 9$ и базовое множество есть множество переменных $\langle X^n, \emptyset \rangle$, то существует такая ЗИП типа S_b, для которой оптимальная ИСД над $\langle X^n, \emptyset \rangle$ не является деревом.*

Теорема 3. *Если $n > 26$ и базовое множество есть множество элементарных монотонных конъюнкций $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, то существует такая ЗИП типа S_b, для которой оптимальная ИСД над $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ не является деревом.*

Вопрос о древовидности оптимальных сетей для базового множества $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$ монотонных булевых функций остается открытым из-за громоздкости вычислений, которые надо произвести при доказательстве.

Будем говорить, что две элементарные монотонные конъюнкции пересекаются по переменным, если в формулах, описывающих эти конъюнкции, встречаются одинаковые переменные.

Под *бесповторными сетями* будем понимать ИСД над базовым множеством $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ или над базовым множеством $\langle X^n, \emptyset \rangle$, в которых для любой цепи нагрузки любых двух различных ребер этой цепи не пересекаются по переменным.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F}$ одно из двух базовых множеств $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ или $\langle X^n, \emptyset \rangle$, тогда для любой ЗИП I типа S_b сеть над базовым множеством $\mathcal{F}$, являющаяся оптимальной в классе бесповторных сетей для задачи I, имеет вид дерева.*

Пусть M некоторое множество. Через $|M|$ обозначим число элементов во множестве M, называемое мощностью множества M.

3. Существование оптимальных сетей

В данном разделе доказывается теорема 1

Возьмем произвольную ЗИП I типа S. Поскольку $\mathcal{F}$ полно для типа S, то существует ИСП U' над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающая ЗИП I. Очевидно, что

$$T(I, \mathcal{F}) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F})\} = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}'\},$$

где $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F}) : T(U) \leq T(U')\}$.

Для доказательства существования оптимальной сети для ЗИП I нам достаточно показать конечность множества $\mathcal{U}'$.

Пусть $|F \cup \widehat{G}| = n$ Пусть M — множество всех отличных от тождественного нуля предикатов, полученных из предикатов множества $F \cup \widehat{G}$ с помощью операций конъюнкция и дизъюнкция. Понятно, что $|M| \leq 2^{2^n}$. Пусть $\min\limits_{f \in M} \mathbf{P}(N_f) = r$. Согласно условию теоремы $r > 0$

Пусть m — максимально возможное значение переключателей из G. Поскольку для любой ИСП над $\mathcal{F}$ функции фильтров вершин, из которых исходят какие либо ребра, принадлежат множеству M, то сложность любого предикатного ребра сети над $\mathcal{F}$ не меньше, чем r, а сложность любого переключательного ребра не меньше, чем r/m. Отсюда в любой ИСП из множества $\mathcal{U}'$ число ребер не больше, чем $T(U')\cdot m/r$. Поскольку из конечности множества $F\cup\widehat{G}$ следует конечность числа различных нагрузок сетей, то, значит, множество $\mathcal{U}'$ конечное.

Что и доказывает теорему.

4. О недревовидности оптимальных информационных сетей включающего поиска

Прежде чем доказывать теоремы 2 и 3, докажем два полезных свойства.

Свойство 1. *Пусть U произвольная ИСД над базовым множеством $\langle\mathcal{M}^n,\emptyset\rangle$, $\langle\mathcal{K}^n,\emptyset\rangle$ или $\langle X^n,\emptyset\rangle$, разрешающая некоторую задачу типа S_b. Тогда любое (существенное) ребро сети U имеет сложность, не меньшую, чем 2^{-n}.*

Доказательство. Поскольку любая функция из множеств X^n, $\mathcal{K}^n$ и $\mathcal{M}^n$ принимает значение 1 на запросе вида $(1,1,\ldots,1)$, то запрос $(1,1,\ldots,1)$ пройдет в любую вершину сети U. Следовательно, сложность любого ребра сети U не меньше, чем 2^{-n}. Что и требовалось доказать.

Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F}=\langle\mathcal{M}^n,\emptyset\rangle$. Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F}$. Подмножество $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ вершин сети U назовем *характерным*, если существует такая запись $a\in X$, что $\bigvee\limits_{i=1}^{m}\varphi_{\beta_i}=K_a$.

Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F}=\langle\mathcal{M}^n,\emptyset\rangle$. Пусть $\mathcal{B}=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ — характерное подмножество вершин сети U такое, что $\bigvee\limits_{i=1}^{m}\varphi_{\beta_i}=K_a$. Если в сети U существует такая цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $\mathcal{B}$, что проводимость этой цепи равна K_a, то эту цепь назовем *главной цепью характерного множества* $\mathcal{B}$.

Как показано в [16], справедливы следующие теорема и следствие.

Теорема 5 (о существовании главных цепей). *Пусть U — произвольная ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное характерное подмножество вершин сети U. Тогда в сети U существует главная цепь множества $\mathcal{B}$.*

Следствие 1. *Пусть $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ — ЗИП типа S_b. Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, разрешающая ЗИП I. Тогда для любой записи $y \in V$ такой, что $O(y, \overset{b}{\succeq}) \neq \emptyset$, в сети U существует цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $L_U(y)$, такая, что проводимость этой цепи равна $\chi_{y, \overset{b}{\succeq}}$.*

Свойство 2. *Пусть U произвольная ИСД над базовым множеством $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ или $\langle X^n, \emptyset \rangle$, разрешающая некоторую задачу I типа S_b и имеющая вид дерева, в некоторой главной цепи записи которой встречается два разных ребра, которым приписан один и тот же символ. Тогда сеть U не может быть оптимальной для задачи I.*

Доказательство. Согласно условию сеть U содержит фрагмент, изображенный на рисунке 1, то есть U содержит главный путь некоторой записи, в котором встречаются два ребра, которым приписан один и тот же символ f. Обозначим первое ребро, которому приписан символ f, (на рисунке 1 — нижнее) через c_1, а второе ребро, которому приписан символ f, (на рисунке 1 — верхнее) — через c_2.

Так как сеть U древовидная, то к каждой вершине ведет только одно ребро (с учетом того, что в сети нет несущественных ребер). Поэтому все цепи, проходящие через ребро c_2, проходят и через ребро c_1. Следовательно, выбрасывание ребра c_2 не изменит функций проводимости цепей, которые проходили через c_2. Отсюда следует, что если заменить фрагмент, изображенный на рисунке 1, на фрагмент, изображенный на рисунке 2, то функционирование сети U не изменится, а сложность согласно свойству 1 уменьшится. Это означает, что сеть U не могла быть оптимальной. Что и требовалось доказать.

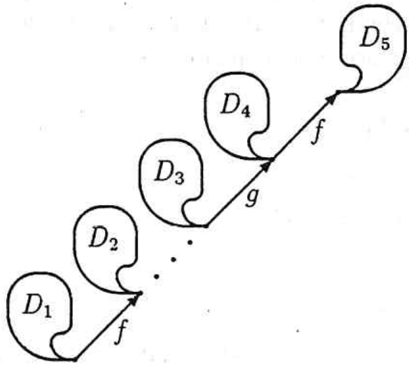

Рис. 1. Фрагмент сети U

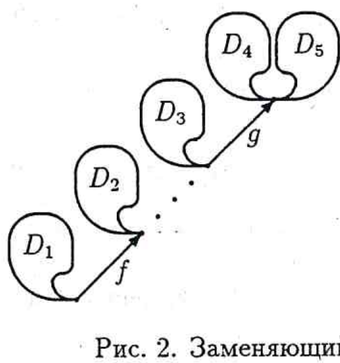

Рис. 2. Заменяющий фрагмент

4.1. Базовое множество переменных

В этом подпункте мы приведем доказательство теоремы 2.

Договоримся обозначать запись $y \in B^n$ через ее характеристическую функцию, то есть представлять ее в виде конъюнкции переменных, номера которых совпадают с номерами разрядов вектора y, в которых стоят 1.

Рассмотрим библиотеку $V_1 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, такую, что

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 K_1, \\ y_2 &= x_2 K_2, \\ y_3 &= x_3 x_4 K_1 K_3, \\ y_4 &= x_5 x_6 K_2 K_3, \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 — элементарные монотонные конъюнкции, состоящие из l переменных, K_3 — элементарная монотонная конъюнкция длины m $(l, m > 0)$, K_1, K_2, K_3 не пересекаются по переменным и не содержат $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Покажем, что для ЗИП $I_1 = \langle B^n, V_1, \overset{b}{\succeq} \rangle$ при надлежащем подборе параметров l и m оптимальная ИСД над базовым множеством $\langle X^n, \emptyset \rangle$ не является деревом.

Рассмотрим сеть U_0, разрешающую ЗИП I_1, которая изображена на рисунке 3. Здесь и далее всюду в данном подпункте ребром с приписанной ему конъюнкцией обозначается цепочка ребер, которым приписаны переменные, входящие в эту конъюнкцию.

Если K' и K'' — элементарные монотонные конъюнкции, то справедливы следующие простые соотношения

$$|N_{K'} \cup N_{K''}| = |N_{K'}| + |N_{K''}| - |N_{K'K''}|, \ |N_{K'}| = 2^{n-k},$$

где k — длина конъюнкции K'. Последнее соотношение следует из того, что $N_{K'}$ — $(n-k)$-мерная грань куба B^n.

Воспользовавшись этими соотношениями, легко можно подсчитать сложность сети U_0.

$$\begin{aligned} T(U_0) &= 2 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{l-1}}) + 4 \cdot \frac{1}{2^l} + \\ &+ (\frac{2}{2^{l+1}} - \frac{1}{2^{2l+2}}) \cdot (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}) + \end{aligned}$$

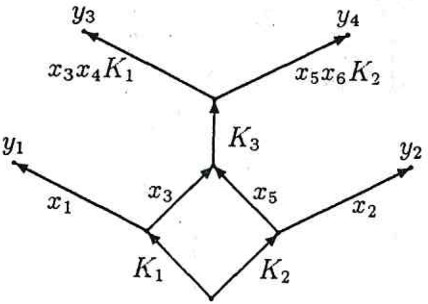

Рис. 3. Сеть U_0

$$+2\Big(\frac{2}{2^{l+m+1}} - \frac{1}{2^{2l+m+2}}\Big) + 2\cdot\Big(\frac{2}{2^{l+m+2}} - \frac{1}{2^{2l+m+3}}\Big) +$$

$$+\frac{2}{2^{m+1}}\cdot\Big(\underbrace{\Big(\frac{1}{2^{l+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{l+1}}\Big)}_{l} +$$

$$+\frac{1}{2^{l+1}}\cdot\Big(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{l}}\Big) - -\underbrace{\Big(\frac{1}{2^{2l+2}} - \cdots - \frac{1}{2^{2l+2}}\Big)}_{l}\Big) =$$

$$= \ 4 + \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{2l+1}} + \frac{l+3}{2^{m+l+1}} - \frac{l+3}{2^{2l+m+2}}.$$

Покажем, что можно так подобрать параметры l и m, что любая сеть, разрешающая ЗИП I_1 и имеющая вид дерева, будет иметь сложность большую, чем $T(U_0)$.

Согласно следствию 1 из теоремы 5 будем рассматривать деревья, состоящие только из четырех главных цепей записей, при этом, согласно свойству 2 не имеет смысла рассматривать деревья, в которых дублируются вхождения переменных. Таким образом, возможны только следующие случаи, изображенные на рисунке 4, которые схематически отображают отношения (в смысле пересечения) главных цепей.

На рисунке 4 и далее цифра внутри схематического изображения дерева означает число листьев в дереве.

Сразу отметим, что деревья вида (4) и (5), изображенные на рисунке 4, не могут разрешать ЗИП I_1, так как нет переменной, которая бы входила в три записи из библиотеки V_1 одновременно и, следовательно,

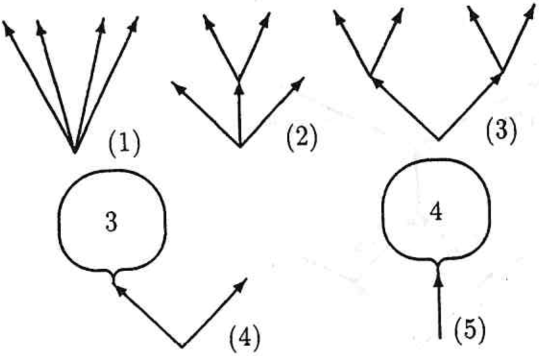

Рис. 4. Возможные случаи пересечения главных цепей

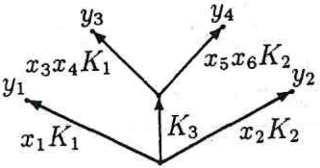

Рис. 5. Сеть U_1

не существует ни одного ребра, которое принадлежало бы трем главным цепям одновременно. Рассмотрим оставшиеся случаи.

Если имеет место случай (1), то объединяя главные цепи записей y_1 и y_2, например, по ребрам, соответствующим переменным из K_1, мы получим дерево меньшей сложности. Тем самым, дерево вида (1) не может быть оптимальным.

Если главные цепи пересекаются, как в случае (2) с рисунка 4, то единственный кандидат на оптимальное дерево имеет вид, изображенный на рисунке 5. Это дерево обозначим через U_1.

Подсчитаем сложность дерева U_1.

$$\begin{aligned} T(U_1) &= 2\cdot(2-\frac{1}{2^l})+2-\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}\cdot 2\cdot(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{l+1}}) = \\ &= 6-\frac{1}{2^{l-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^{l+m}}. \end{aligned}$$

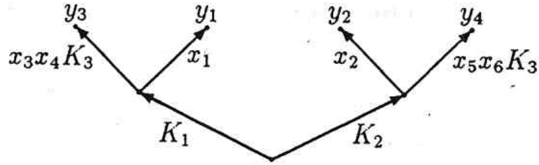

Рис. 6. Сеть U_2

Тогда

$$T(U_1)-T(U_0) = \frac{1}{2^{2l+m+2}}\cdot(2^{2l+m+3}-2^{l+m+4}+2^{2l+3}+ +2^{m+1}+l+3-(l+5)\cdot 2^{l+1}).$$

Таким образом, $T(U_1)>T(U_0)$, например, при выполнении следующих неравенств: $2l+m+3\geq l+m+4$ и $l>\log_2(l+5)-2$. Первое и второе неравенства справедливы при любых $m,l>0$.

Если главные цепи пересекаются, как в случае (3) с рисунка 4, то единственный кандидат на оптимальное дерево имеет вид, изображенный на рисунке 6. Это дерево обозначим через U_2.

Подсчитаем сложность дерева U_2.

$$T(U_2) = 2\cdot(2-\frac{1}{2^{l-1}})+2\cdot\frac{1}{2^l}+\frac{1}{2^l}\cdot(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{m+1}})) = = 4+\frac{1}{2^{l-1}}-\frac{1}{2^{l+m}}.$$

Тогда

$$T(U_2)-T(U_0)=\frac{1}{2^{2l+m+2}}\cdot(2^{m+1}+l+3-(l+5)\cdot 2^{l+1}).$$

Таким образом, $T(U_2)>T(U_0)$, например, при выполнении неравенства $m+1\geq l+1+\log_2(l+5)$, то есть при $m\geq\log_2(l+5)+l$.

Таким образом, если взять $m\geq\log_2(l+5)+l$ и $l>0$ (а при $n>9$ это можно сделать), то для любого дерева, разрешающего ЗИП I_1, его сложность будет больше сложности сети U_0, что и доказывает недревовидность оптимальной сети для ЗИП I_1.

4.2. Базовое множество элементарных монотонных конъюнкций

В этом подпункте мы приведем доказательство теоремы 3.

Докажем два полезных свойства.

Свойство 3. *Пусть U произвольная ИСД над базовым множеством $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, разрешающая некоторую задачу типа S_b, такая, что в ней есть две главные цепи, которые не пересекаются ни с какими другими цепями и которые соответствуют записям, имеющим по крайней мере две общие переменные. Тогда сеть U не может быть оптимальной.*

Доказательство. Пусть C_1 и C_2 — упомянутые в условии главные цепи записей y_1 и y_2 соответственно. Пусть $y_1 = K_1$ и $y_2 = K_2$. Поскольку цепи C_1 и C_2 не пересекаются ни с какими другими, то сложность, вно- симая цепями C_1 и C_2 в сложность сети U, не меньше, чем 2 (она равна двум, когда каждая из цепей представляет собой ребро с приписанной ему конъюнкцией). Заменим в сети U цепи C_1 и C_2 на три ребра, пер- вое, исходящее из корня, которому приписана конъюнкция $K_1 \& K_2$, и два, исходящих из конца первого ребра, которым приписаны конъюнк- ции K_1' и K_2' соответственно, где K_i' есть конъюнкция, состоящая из переменных, оставшихся от конъюнкции K_i после удаления переменных конъюнкции $K_1 \& K_2$, $(i = 1, 2)$. Сложность этих трех ребер будет не больше, чем $1 + 2 \cdot 2^{-2} = 3/2 < 2$, так как по условию длина конъюнкции $K_1 \& K_2$ не меньше, чем 2. Следовательно сложность сети, полученной после такой замены, будет меньше сложности сети U, что и доказывает неоптимальность сети U.

Свойство 4. *Пусть U произвольная ИСД над базовым множеством $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, разрешающая некоторую задачу типа S_b, такая, что в ней есть вершина, отличная от корня, с полустепенью исхода 1. Тогда сеть U не может быть оптимальной.*

Доказательство. Пусть β — вершина сети U, отличная от корня, с полустепенью исхода 1. Пусть c_1 — ребро, входящее в β, а c_2 — ребро, исходящее из β. Пусть K_1 и K_2 — конъюнкции, приписанные ребрам c_1 и c_2 соответственно. Тогда припишем ребру c_1 конъюнкцию $K_1 K_2$

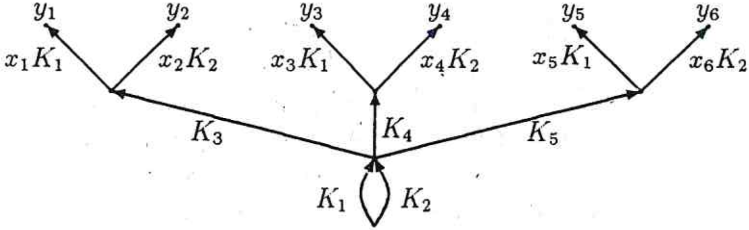

Рис. 7. Сеть U_3

удалим ребро c_2. Тем самым, согласно свойству 1 получим более простую сеть, разрешающую исходную задачу. Следовательно, сеть U не была оптимальной, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.

Рассмотрим библиотеку $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, такую, что

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1K_1K_3, \\ y_2 &= x_2K_2K_3, \\ y_3 &= x_3K_1K_4, \\ y_4 &= x_4K_2K_4, \\ y_5 &= x_5K_1K_5, \\ y_6 &= x_6K_2K_5, \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 — элементарные монотонные конъюнкции, состоящие из l переменных, K_3, K_4, K_5 — элементарные монотонные конъюнкции длины m, и все K_i $(i = \overline{1,5})$ попарно не пересекаются по переменным и не содержат переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Покажем, что для ЗИП $I_2 = \langle B^n, V_2, \overset{b}{\succeq} \rangle$ при надлежащем подборе параметров l и m оптимальная ИСД над базовым множеством $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, не является деревом.

Рассмотрим сеть U_3, разрешающую ЗИП I_2, которая изображена на рисунке 7. Здесь и далее всюду в данном подпункте ребром с приписанной ему конъюнкцией обозначается именно ребро, а не цепочка ребер, как было ранее.

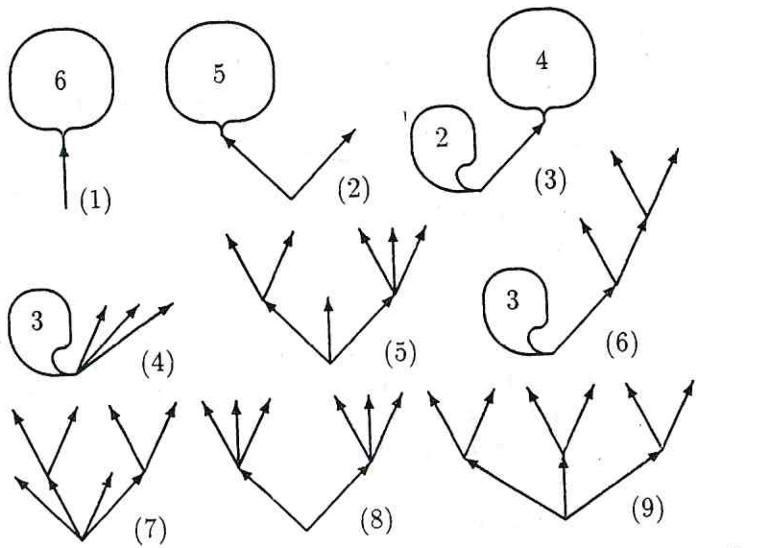

Рис. 8. Возможные случаи пересечения главных цепей

Подсчитаем сложность сети U_3.

$$
\begin{aligned}
T(U_3) &= 2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{2^l} - \frac{1}{2^{2l}}\right) + 6 \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{2}{2^l} - \frac{1}{2^{2l}}\right) = \\
&= \frac{1}{2^{m+2l}} \cdot \left(2^{2l+m+1} + 6 \cdot 2^{m+l} + 12 \cdot 2^l - 3 \cdot 2^m - 6\right).
\end{aligned}
$$

Покажем, что можно так подобрать параметры l и m, что любая сеть, разрешающая ЗИП I_2 и имеющая вид дерева, будет иметь сложность большую, чем $T(U_3)$.

Согласно следствию 1 из теоремы 5 будем рассматривать деревья, состоящие только из шести главных цепей записей, причем в соответствии со свойством 4 будем считать, что в них нет вершин, кроме, может быть, корня, которые имели бы полустепень исхода 1. Возможны только следующие случаи, изображенные на рисунке 8, которые схематически отображают отношения (в смысле пересечения) главных цепей.

Напомним, что цифра внутри схематического изображения дерева означает число листьев в дереве.

Сразу отметим, что деревья вида (1), (2) и (3), изображенные на рисунке 8, не могут разрешать ЗИП I_2, так как нет переменной, ко торая бы входила в четыре записи из библиотеки V_2 одновременно и, следовательно, не существует ни одного ребра, которое принадлежало бы четырем главным цепям одновременно.

Так как из любых трех записей из V_2 всегда можно выбрать две записи, которые будут иметь по крайней мере две общие переменные (напомним, что $l, m > 1$), то деревья вида (4) подпадают под свойство 3, откуда следует, что они не могут быть оптимальными.

Рассмотрим случай (5) с рисунка 8. Так как через правое ребро, растущее из корня, проходит три главные цепи, то следовательно это цепи, соответствующие либо тройке записей y_1, y_3 и y_5, либо тройке записей y_2, y_4 и y_6. Без ограничения общности будем считать, что они соответствуют первой из троек. Тогда оставшиеся цепи соответствуют записям y_2, y_4 и y_6, которые имеют общими только переменные из конъюнкции K_2. Следовательно, левому ребру, растущему из корня (обозначим его через c, а его конец — через β), может соответствовать только конъюнкция, состоящие из переменных конъюнкции K_2. Но тогда мы можем приписать ребру c конъюнкцию K_2 и перебросить среднее ребро, растущее из корня в вершину β. Так как сложность вершины β меньше сложности корня, то дерево типа (5) не может быть оптимальным.

Рассмотрим случай (6) с рисунка 8. Так как через правое ребро, растущее из корня, (обозначим его через c_1, а его конец — через β) проходит три главные цепи, то без ограничения общности можно считать, что они соответствуют записям y_1, y_3 и y_5. Поскольку эти три записи имеют общими только переменные из конъюнкции K_1, то как ребру c_1, так и правому ребру, растущему из β (обозначим его через c_2), могут соответствовать только конъюнкции, состоящие из переменных конъюнкции K_1. Но тогда мы можем приписать ребру c_1 конъюнкцию K_1 и вообще выбросить ребро c_2. Следовательно, согласно свойству 1 дерево типа (6) не может быть оптимальным.

Рассмотрим случай (7) с рисунка 8. Так как две пары главных цепей пересекаются, то соответствующие им две пары записей пересекаются по переменным, но тогда однозначно оставшаяся пара записей также пересекается по переменным. Откуда следует, что оставшаяся пара главных цепей подпадает под свойство 3, и, значит дерево типа (7) не может быть оптимальным.

Если главные цепи пересекаются, как в случае (8) с рисунка 8, то единственный кандидат на оптимальное дерево имеет вид, изображен-

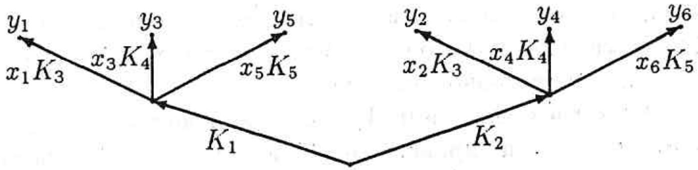

Рис. 9. Сеть U_4

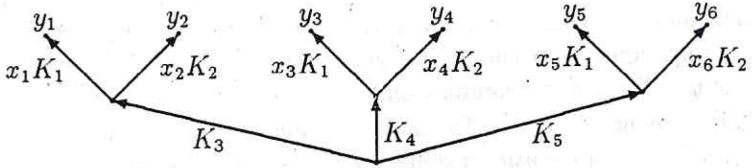

Рис. 10. Сеть U_5

ный на рисунке 9. Это дерево обозначим через U_4.

Подсчитаем сложность дерева U_4.

$$T(U_4) \;=\; = 2 + 6 \cdot \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{2l+m}} \cdot (2^{2l+m+1} + 6 \cdot 2^{m+l}).$$

Тогда

$$T(U_4) - T(U_3) \;=\; \frac{1}{2^{2l+m}} \cdot (2^m - 2^{l+2} + 2) \cdot 3.$$

Таким образом, при $m > l + 1$ будем иметь $T(U_4) > T(U_3)$.

Если главные цепи пересекаются, как в случае (9) с рисунка 8, то единственный кандидат на оптимальное дерево имеет вид, изображенный на рисунке 10. Это дерево обозначим через U_5.

Подсчитаем сложность дерева U_5.

$$T(U_5) \;=\; 3 + 6 \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{2l+m}} \cdot (3 \cdot 2^{2l+m} + 6 \cdot 2^{2l}).$$

Тогда

$$T(U_5) - T(U_3) = \frac{1}{2^{2l+m}} \cdot (2^{2l+m} + 6 \cdot 2^{2l} - 6 \cdot 2^{m+l} - 3 \cdot 2^{l+2} + 3 \cdot 2^m + 6).$$

Отсюда, например, при $l > 2$ имеем $T(U_5) > T(U_3)$.

Таким образом, если взять $l > 2$ и $m > l + 1$ (а при $n > 26$ это можно сделать), то для любого дерева, разрешающего ЗИП I_2, его сложность будет больше сложности сети U_3, что и доказывает недревовидность оптимальной сети для ЗИП I_2.

5. О древовидности оптимальных информационных сетей включающего поиска в классе бесповторных сетей

Предварительно докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если ИСД U над одним из трех базовых множеств $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset\rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset\rangle$, $\langle X^n, \emptyset\rangle$ является оптимальной для некоторой ЗИП типа S_b, то сети U в любую вершину, функция фильтра которой есть элементарная монотонная конъюнкция, входит не более одного ребра.*

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что в сети U существует вершина β, функция фильтра которой есть элементарная монотонная конъюнкция и в которую входит несколько ребер. Так как функция фильтра вершины β является элементарной монотонной конъюнкцией, то вершина β образует характерное подмножество, и, следовательно, согласно теореме 5 существует главная цепь (обозначим ее C_β) этой вершины. Пусть через вершину β проходит несколько главных цепей записей, которые обозначим $C_1, \ldots, C_m$. Понятно, что $m > 0$, так как иначе вершину β вместе с входящими в нее и исходящими из нее ребрами можно было бы выкинуть, а в силу оптимальности сети U из нее нельзя выкинуть ни одного ребра.

Пусть $C_i = C_i^1 C_i^2 (i = 1, \ldots, m)$, где C_i^1 - часть цепи C_i от корня до вершины β, а C_2^i - часть цепи C_i после вершины β до соответствующей записи.

Поскольку функция фильтра φ_β вершины β равна проводимости цепи C_β, то, следовательно, φ_β не зависит от проводимости цепей C_1^i $i = 1, \ldots, m$ Отсюда мы можем объявить вместо цепей C_i в качестве главных цепей цепи $C_i' = C_\beta C_i^2$ $(i = 1, \ldots, m)$ после чего, удалив ребра,

не принадлежащие новым главным цепям (в частности, удаляются все
ребра, входящие в вершину β, за исключением ребра, принадлежащего
цепи C_β), получим ИСД U_1, которая разрешает исходную ЗИП, и в со-
ответствии с леммой 1 $T(U_1) < T(U)$, что противоречит оптимальности
сети U, и тем самым доказывает лемму.

Лемма 2. *Если ИСД U над одним из двух базовых множеств $\langle K^n, \emptyset\rangle$, $\langle X^n, \emptyset\rangle$ является оптимальной в классе бесповторных сетей для не-
которой ЗИП типа S_b, то функция фильтра любой вершины сети U
является элементарной монотонной конъюнкцией.*

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Пусть
β — вершина, функция фильтра которой не есть элементарная моното-
ная конъюнкция. В силу оптимальности сети существует лист α, такой,
что существует ребро (или цепь ребер), соединяющее α и β (если су-
ществует цепь ребер, то без ограничения общности считаем, что β —
ближайшая к α вершина, функция фильтра которой не является элемен-
тарной монотонной конъюнкцией).

Обозначим функцию проводимости от β к α через K_1. Пусть φ_β =
$K_2 \vee \ldots \vee K_m$. Так как φ_α является элементарной монотонной конъюнк-
цией, то в силу леммы 1 и определения вершины β

$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \cdot K_1 = K_1 \cdot (K_2 \vee \ldots \vee K_m).$$

Но $K_1 \cdot (K_2 \vee \ldots \vee K_m$ не может быть элементарной монотонной конъ-
юнкцией, так как в силу бесповторности сети конъюнкция K_1 не может
содержать переменных, принадлежащих конъюнкциям $K_2, \ldots, K_m$.

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 4. Пусть U — оптимальная бесповтор-
ная сеть над базовым множеством $\mathcal{F}$ для задачи I. Согласно лемме
функция фильтра любой вершины сети U является элементарной моно-
тонной конъюнкцией, следовательно, в соответствии с леммой 1 в ка-
ждую вершину ИСД U входит не более одного ребра, что означает, что
сеть U имеет вид дерева.

Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Селтон Г. *Автоматическая обработка, хранение и поиск информации.* Сов. радио, Москва, 1973.

[2] Решетников В. Н. Алгебраическая теория информационного поиска. *Программирование* (1979), № 3, 68–74.

[3] Черный А. И. *Введение в теорию информационного поиска.* Наука, Москва, 1975.

[4] Ли Д., Препарата Ф. Вычислительная геометрия. Обзор. *Кибернетический сб.* (1987) **24**, 5–96.

[5] Преперата Ф., Шеймос М. *Вычислительная геометрия: Введение.* Мир, Москва, 1989.

[6] Аграев В. А., Бородин В. В., Кобрин Р. Ю., Майорова В. А., Шульц М. М. Дескрипторная информационно-поисковая система с позиционным кодированием "Компас–2". *Научно-техническая информация. Сер. 2. Информационные процессы и системы.* ВИНИТИ, Москва, (1971), № 2.

[7] Rabin M. O. Proving simultaneous positivity o linear forms. *J. Comput. Syst. Sci.* (1972) **6**, 639–650.

[8] Reingold E. M. On the optimality of some set algorithms. *J. ACM* (Oct. 1972) **19**, № 4, 649–659.

[9] Dobkin D. P., Lipton R. J. On the complexsity of computations under varying sets of primitives. *J. Comput. Syst. Sci.* (1979) **18**, 86–91.

[10] Ben-Or M. Lower bounds for algebraic computation trees. *Proc. 15th ACM Annu. Symp. Theory Comput.* (Apr. 1983) 80–86.

[11] Steele J. M., Yao A. C. Lower bounds for algebraic decision trees. *J. Algorith.* (1982) **3**, 1–8.

[12] Yao A. C., Rivest R. L. On the polyhedral decision problem. *SIAM J. Comput.* (1980) **9**, 343–347.

[13] Котов В. Е., Сабельфельд В. К. *Теория схем программ.* Наука, Москва, 1991.

[14] Petri C. A. Introduction of general net teori. *Lecture Notice in Computer Science.* Springer-Verlag, Berlin, (1980) **84**, 1–26.

[15] Котов В. Е. *Сети Петри.* Наука, Москва, 1984.

[16] Гасанов Э. Э. Нижняя оценка сложности информационных сетей для одного отношения частичного порядка. *Дискретная математика* (1996) **8**, N 4, 108-122.

[17] Гасанов Э. Э. Об одномерной задаче интервального поиска. *Дискретная математика* (1995) **7**, N 2, 40-60.

[18] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.* Наука, Москва, 1992.

[19] Гасанов Э. Э. Об одной математической модели информационного поиска. *Дискретная математика* (1991) **3**, N 2, 69-76.