Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на смешанно-ориентированные рефлексивные циклы

Н. П. Корчагин[1]

Для графа $\mathcal{H}$ в задаче Surj-Hom($\mathcal{H}$) по данному графу $\mathcal{G}$ требуется определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. В данной работе мы изучаем сложность задачи Surj-Hom для графов, которые получаются из неориентированных циклов добавлением ориентации некоторым рёбрам, и в которых каждая вершина содержит петлю.

Мы рассматриваем задачу Surj-Hom как частный случай массовой задачи сюръективного удовлетворения ограничениям SCSP. Мы вводим свойство, которое позволяет определять сложность SCSP с помощью сведения. Мы используем это свойство и определяем сложность Surj-Hom для всех рассматриваемых циклов, кроме трёх циклов длины 4, 5 и 6.

Ключевые слова: сюръективный гомоморфизм графов, сложность вычислений, удовлетворение ограничениям, полиморфизм.

1. Введение

Для графа $\mathcal{H}$ задача о существовании сюръективного гомоморфизма Surj-Hom($\mathcal{H}$) это массовая задача, в которой по данному графу $\mathcal{G}$ требуется определить, существует ли сюръективное отображение из вершин $\mathcal{G}$ на вершины $\mathcal{H}$, которое сохраняет отношение смежности в графе.

Массовые задачи, связанные с сюръективными гомоморфизмами графов, привлекли внимание исследователей ещё в конце прошлого века, и с тех пор стали объектом множества работ [1, 3]. Несмотря на то, что определение сложности подобных задач представляет в первую очередь теоретический интерес, задача Surj-Hom имеет практические корни, поскольку тесно связана с алгоритмами поиска различных свойств в графе [4]. Несложно заметить, что эта задача лежит в NP. Более того, существует предположение, что она всегда либо решается за полиномиальное

[1] *Корчагин Никита Павлович* — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kolkor92@gmail.com.

Korchagin Nikita Pavlovich. — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

время, либо является NP-полной [11, 18]. В связи с этим, большой интерес представляет вопрос определения сложности Surj-Hom($\mathcal{H}$) для всех графов $\mathcal{H}$. Для некоторых классов графов сложность задачи известна. Так, эта задача решается за полиномиальное время, если каждая связная компонента $\mathcal{H}$ – полный граф с петлями или полный двудольный граф без петель [6]. Задача является NP-полной для связных графов, содержащих ровно две петли у несмежных вершин [7]. В случае, если $\mathcal{H}$ – дерево с петлями, задача Surj-Hom($\mathcal{H}$) решается за полиномиальное время, если вершины с петлями образуют полный подграф, и является NP-полной иначе [8]. Однако, полная классификация сложности задачи остается недостижимой.

Одним из самых простых классов графов, для которых сложность Surj-Hom ещё не определена, являются *рефлексивные циклы* – графы, которые получаются из неориентированных циклов путём добавления ориентации некоторым рёбрам, и в которых каждая вершина содержит петлю. Известно, что Surj-Hom является NP-полной для неориентированного рефлексивного цикла длины 4 [2]. Также известна сложность задачи для всех рефлексивных циклов, содержащих три вершины [9]. В предыдущих работах автора была определена сложность задачи для всех неориентированных рефлексивных циклов [10] и рефлексивных циклов, в которых каждое ребро ориентировано ровно в одну сторону [16], кроме нескольких циклов длины 5, 6. В данной статье же речь пойдет о *смешанно-ориентированных рефлексивных циклах*, в которых часть рёбер ориентирована в одну сторону, а часть – в две.

1.1. Основные результаты

Главным результатом данной статьи является доказательство того, что для любого смешанно-ориентированного рефлексивного цикла $\mathcal{C}$, содержащего больше трёх вершин и не изоморфного ни одному из графов $\mathcal{C}_4$ (см. Рис. 1, а), $\mathcal{C}_5$ (Рис. 1, б) и $\mathcal{C}_6$ (Рис. 1, в), задача Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-трудной:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин и не изоморфный $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ или $\mathcal{C}_6$. Тогда задача* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

Для графов $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$ сложность остаётся неизвестной. Заметим, что вместе с уже полученными результатами [9, 2, 16, 10], данная теорема позволяет описать сложность задачи Surj-Hom для всех рефлексивных циклов кроме конечного числа графов:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}$ – рефлексивный цикл, не изоморфный ни одному из циклов, изображённых на Рис. 1. Если $\mathcal{C}$ изоморфен одному из* *циклов, изображённых на Рис. 2, то задача* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *решается за полиномиальное время. Иначе она является* NP*-полной.*

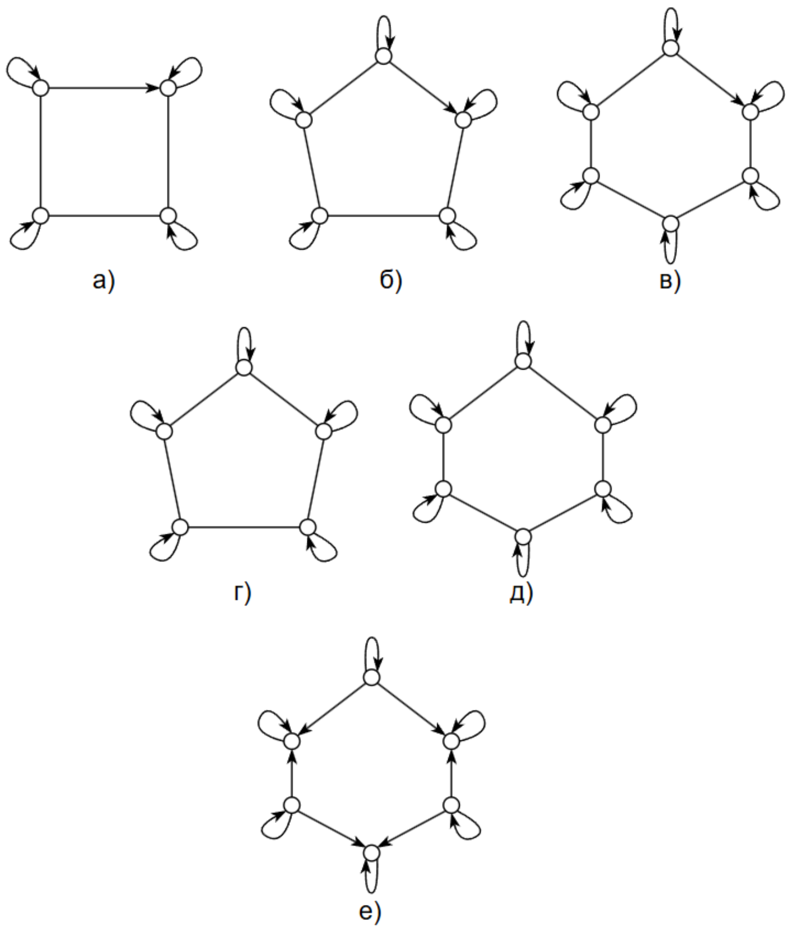

Рис. 1. Циклы, для которых ещё не определена сложность Surj-Hom.

Примечательно, что все циклы, для которых сложность задачи не определена, имеют длину от 4 до 6.

Дальнейшее изложение структурировано следующим образом. В разделе 2 приводятся основные понятия, которые используются в статье. В разделе 3.1 рассматриваются смешанно-ориентированные рефлексивные циклы с большим количеством ориентированных рёбер. Раздел 3.2 посвящен циклам с маленьким числом ориентированных рёбер. Наконец, в разделе 3.3 подробнее рассматриваются циклы $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$, для которых не удалось определить сложность задачи Surj-Hom.

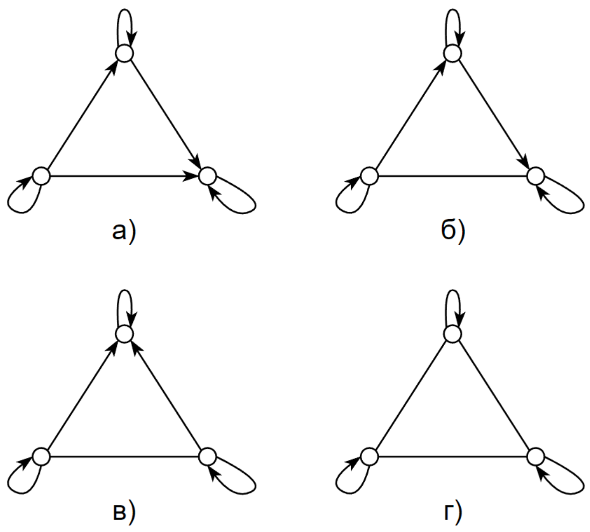

Рис. 2. Циклы, для которых Surj-Hom лежит в P

2. Основные понятия

2.1. Графы

Формально определим понятия, введённые выше. *Графом* $\mathcal{H} = (V, E)$ будем называть пару из множества V и множества $E \subseteq V \times V$ упорядоченных пар из V. Множество V будем называть *множеством вершин*, а множество E – *множеством рёбер*. Двуместное отношение E будем также называть *отношением смежности* $\mathcal{H}$. Для вершин $v, w \in V$ пару $(v, w) \in E$ будем называть *ребром из* v *в* w и обозначать как $v \to w$ или $w \leftarrow v$. Будем говорить, что в $\mathcal{H}$ *существует ориентированное ребро из* v *в* w, если $(v, w) \in E$ и $(w, v) \notin E$. В противном случае будем говорить, что существует *неориентированное ребро между* v *и* w. Будем обозначать такие рёбра как $v \leftrightarrow w$. *Петлёй* в $\mathcal{H}$ будем называть ребро вида $(v, v), v \in V$. Для удобства изложения далее в тексте мы часто будем отождествлять граф и отношение смежности на множестве его вершин.

Граф $\mathcal{H} = (V, E)$ называется *строго ориентированным*, если все его рёбра, кроме петель, ориентированные, и *неориентированным*, если все его рёбра неориентированны. Граф будем называть *смешанно-ориентированным*, если он содержит как ориентированные рёбра, так и неориентированные рёбра, не являющиеся петлями. Граф называется *рефлексивным*, если каждая вершина в нём содержит петлю.

Через V^k при $k \geq 1$ будем называть множество всех наборов вида $\overline{v} = (v^1, \ldots, v^k)$, где $v^i \in V$. Элементы V^k будем называть *векторами*, для вектора $\overline{v} \in V^k$ через v^i будем обозначать i-ую компоненту этого вектора. Будем говорить, что существует ребро $\overline{v}\, e\, \overline{w}, e \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, если для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ верно $v^i\, e\, w^i$.

Определим *ориентированный путь* π *длины* s как последовательность вида $v_0\, e_0\, v_1\, e_1 \dots v_{s-1}\, e_{s-1}\, v_s$, где $v_i \in V$ и $e_i \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ – ориентации рёбер такие, что в $\mathcal{H}$ существует ребро $v_i\, e_i\, v_{i+1}$. Для $k \geq 1$ ориентированный путь Π длины s на V^k определяется аналогичным образом.

2.2. Смешанно-ориентированные циклы

Определим цикл формально: *цикл* $\mathcal{C}$ *длины* n – это граф с множеством вершин $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}, n \geq 3$, в котором для каждой вершины $v \in Z_n$ есть ребро $v\, e\, (v+1 \pmod n)$, $e \in \{\leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, и нет других рёбер кроме, может быть, петель.

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ длины n. Пусть v, w – его вершины. Ориентированный путь из v в w, в котором все рёбра ориентированы как $\leftrightarrow$, будем обозначать как $v \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow w$. Аналогично, через $v \rightarrow \cdots \rightarrow w$ и $v \leftarrow \cdots \leftarrow w$ будем обозначать ориентированные пути из v в w, в которых все рёбра ориентированы как $\rightarrow$ и $\leftarrow$ соответственно.

Подмножество вершин $V \subseteq Z_n$ будем называть *неориентированной компонентой*, если для любых $v, w \in V$ существует ориентированный путь вида $v \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow w$. Несложно заметить, что отношение принадлежности одной и той же неориентированной компоненте это отношение эквивалентности. Отсюда, множество вершин Z_n разбивается на $m \leq n$ неориентированных компонент, соединённых между собой ориентированными рёбрами. Заметим, что количество неориентированных компонент в $\mathcal{C}$ равно количеству ориентированных рёбер.

Пусть в $\mathcal{C}$ содержится m неориентированных компонент. Обозначим их как $V_0, \dots, V_{m-1}$, обходя граф по часовой стрелке, начиная с произвольной компоненты. Строго ориентированный цикл $\mathcal{C}^s$ с m вершинами будем называть *остовным циклом для* $\mathcal{C}$, если для любых $i, j \in Z_m, i \neq j$ верно

$$i \rightarrow j \iff \exists v \in V_i, w \in V_j : v \rightarrow w.$$

Иными словами, остовный цикл получается из оригинального путем стягивания неориентированных компонент в одну вершину. В этом случае между неориентированными компонентами $\mathcal{C}$ и вершинами $\mathcal{C}^s$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Будем говорить, что вершина i цикла $\mathcal{C}^s$ и компонента V_i цикла $\mathcal{C}$ *соответствуют* друг другу.

Пример 2.1. *Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл длины четыре, содержащий три ориентированных ребра (см. Рис.*

3, а). Этот граф содержит три неориентированные компоненты $V_0 = \{0,3\}$, $V_1 = \{1\}$ *и* $V_2 = \{2\}$. *Его остовный цикл содержит три вершины* $0, 1, 2$ *и изображен на Рис. 3, б.*

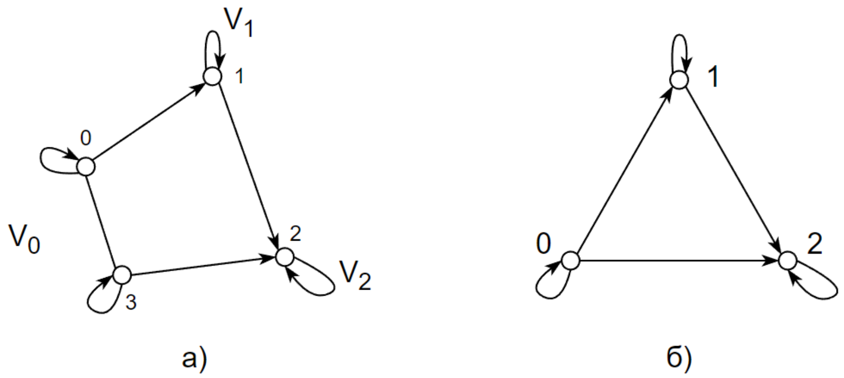

Рис. 3. Смешанно-ориентированный цикл с четырьмя вершинами и его остовной цикл.

2.3. Задача о существовании гомоморфизма графа

Рассмотрим граф $\mathcal{H} = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством рёбер E и граф $\mathcal{G} = (V', E')$ с вершинами V' и рёбрами E'. *Гомоморфизм* графа $\mathcal{G}$ на граф $\mathcal{H}$ – это отображение $f : V' \to V$ такое, что для любого ребра $(v, w) \in E'$ верно $(f(v), f(w)) \in E$. Гомоморфизм f из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$ будем называть *сюръективным*, если f сюръективно. Для фиксированного графа $\mathcal{H}$ задача о существовании сюръективного гомоморфизма Surj-Hom($\mathcal{H}$) – это массовая задача, в которой по данному графу $\mathcal{G}$ требуется проверить, существует ли сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$.

Задача о существовании гомоморфизма является частным случаем более общей задачи удовлетворения ограничениям.

2.4. Задача удовлетворения ограничениям

В задаче об удовлетворении ограничениям *Constraint Satisfaction Problem* (CSP) необходимо определить, существует ли подстановка, удовлетворяющая определённому набору ограничений. Определим эту задачу формально.

Пусть A – конечное множество (*область значений*), Γ – конечное множество отношений на A. *Конъюнктивной формулой на множестве* Γ будем называть формулу, в которую входят отношения из Γ, свободные переменные из X, конъюнкции и равенства, где X – множество переменных. *Решением конъюнктивной формулы* $\mathcal{I}$ будем называть подстановку $f : X \to A$ в переменные этой формулы, которая выполняет её. Решение f будем называть сюръективным, если $f(X) = A$. Тогда задача удовлетворения ограничениям, также обозначаемая как CSP(Γ) – это задача, в которой по набору переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и формуле $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} : R_1(x_{i_{1,1}}, \dots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \dots \wedge R_s(x_{i_{s,1}}, \dots, x_{i_{s,n_s}}),$$

где $R_1, \dots, R_s$ – отношения из Γ и $i_{1,1}, \dots, i_{1,n_1}, \dots, i_{s,1}, \dots, i_{s,n_s} \in \{1, \dots, n\}$, необходимо определить, выполнима ли она. Данная формула вместе с набором переменных называется *экземпляром* $\mathcal{I}$ задачи CSP(Γ), а решение $f : X \to A$ формулы $\mathcal{I}$ – *решением* экземпляра.

Функция p от n переменных называется *полиморфизмом* m-местного отношения R, если для любых n наборов $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_n^1, \dots, a_n^m)$ из R верно, что набор $(p(a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, p(a_1^m, \dots, a_n^m))$ тоже из R (говорят также, что p *сохраняет* R). p – полиморфизм множества отношений Γ, если p – полиморфизм каждого отношения из Γ. Множество полиморфизмов Γ обозначается как Pol(Γ). Множество сюръективных полиморфизмов Γ обозначается как SPol(Γ).

Отметим важнейшее свойство полиморфизмов графов, которое следует из их определения. Пусть $\mathcal{H} = (V, E)$ – граф, p – k-местный полиморфизм $\mathcal{H}$ и существует ориентированный путь Π в V^k вида:

$$\Pi = \overline{v_0}\, e_0\, \overline{v_1}\, e_1 \dots \overline{v_{s-1}}\, e_{s-1}\, \overline{v_s}.$$

Тогда образы элементов этого пути образуют путь π в V:

$$\pi = p(\overline{v_0})\, e_0\, p(\overline{v_1})\, e_1 \dots p(\overline{v_{s-1}})\, e_{s-1}\, p(\overline{v_s}),$$

ориентации рёбер в котором совпадают с ориентациями рёбер в Π. Иными словами, полиморфизмы $\mathcal{H}$ сохраняют ориентации рёбер в ориентированных путях.

Функция f от n переменных называется *существенно-унарной*, если она существенно зависит не более, чем от одной переменной. Иными словами, f – существенно унарна тогда и только тогда, когда существуют $i \in \{1, \dots, n\}$ и g – функция от одной переменной такие, что $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = g(x_i)$.

Пусть f – n-местная функция, определенная на множестве A. Элементы вида $(a, \dots, a), a \in A$ будем называть *диагональными*, а множество $\{f(a, \dots, a) \mid a \in A\}$ – *диагональю функции* f.

В задаче *Surjective Constraint Satisfaction Problem* (SCSP) помимо выполнимости формулы также требуется сюръективность решения. Эта задача определяется так. Пусть Γ – конечное множество отношений на множестве A. В задаче SCSP(Γ) по набору переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и данной формуле $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} : R_1(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n_1}}) \wedge \cdots \wedge R_s(x_{i_{s,1}}, \ldots, x_{i_{s,n_s}}),$$

где $R_1, \ldots, R_s$ – отношения из Γ и $i_{1,1}, \ldots, i_{1,n_1}, \ldots, i_{s,1}, \ldots, i_{s,n_s} \in \{1, \ldots, n\}$, необходимо определить, существует ли решение $f : X \to A$ формулы $\mathcal{I}$ такое, что $f(X) = A$.

Несложно убедиться, что для графа $\mathcal{H}$ задача Surj-Hom($\mathcal{H}$) эквивалентна SCSP(E), где E – бинарное отношение смежности $\mathcal{H}$. В самом деле, пусть множество вершин графа имеет вид $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Возьмём произвольный граф $\mathcal{G} = (V', E')$, где $V' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ и $E' = \{(w_{i_1}, w_{j_1}), (w_{i_2}, w_{j_2}) \ldots, (w_{i_h}, w_{j_h})\}$, где $i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_h, j_h \in \{1, \ldots, n\}$. Возьмём множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и построим конъюнктивную формулу $\mathcal{I}$ над E следующего вида:

$$\mathcal{I} : E(x_{i_1}, x_{j_1}) \wedge E(x_{i_2}, x_{j_2}) \wedge \cdots \wedge E(x_{i_h}, x_{j_h}).$$

В получившейся формуле каждой переменной x_s из X соответствует вершина w_s из $\mathcal{G}$, а каждому вхождению ограничения $E(x_{i_l}, x_{j_l})$ в $\mathcal{I}$ – ребро (w_{i_l}, w_{j_l}). Тогда каждый гомоморфизм $f : V' \to V$ задаёт подстановку $g : X \to V$: для $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим $g(x_i) = f(w_i)$. При этом по построению полученная подстановка будет решением $\mathcal{I}$, и если гомоморфизм f сюръективен, то и g сюръективна. Аналогично, каждое сюръективное решение $g : X \to V$ формулы $\mathcal{I}$ задаёт отображение $f : V' \to V$, которое также будет являться сюръективным гомоморфизмом из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. Иными словами, полученный экземпляр Surj-Hom($\mathcal{H}$) имеет решение тогда и только тогда, когда построенный экземпляр SCSP(E) имеет решение.

В отличие от задачи Surj-Hom($\mathcal{H}$), задача удовлетворения ограничениям имеет классификацию сложности, которая была впервые сформулирована в [11], и позже независимо доказана в [12, 13]. Эта классификация формулируется в терминах полиморфизмов: если для набора отношений Γ на множестве A существует полиморфизм $p \in \mathrm{Pol}(\Gamma)$ такой, что $\forall x, y \in A : p(y, x, \ldots, x) = p(x, y, x, \ldots, x) = \cdots = p(x, x, \ldots, x, y)$, то CSP($\Gamma$) решается за полиномиальное время; иначе, она является NP-полной. Также известно, что если Γ – набор отношений на множестве A, то SCSP(Γ) можно свести к CSP($\Gamma \cup \{x = d \mid d \in A\}$)[5]. Более того, если все полиморфизмы Γ являются существенно-унарными, то SCSP(Γ) является NP-полной [14]. Несмотря на это, было показано, что сложность SCSP нельзя определить только с помощью полиморфизмов [15].

2.5. Свойство наследования сюръективности

В дальнейшем изложении мы будем активно пользоваться свойством, которое для набора отношений Γ позволяет связать сложность задачи SCSP(Γ) со структурой его полиморфизмов. Пусть Γ – конечное множество отношений на множестве A, $|A| > 1$. Сперва сформулируем два вспомогательных свойства. Пусть $k \geq 1$, $p_1, \dots, p_k$ – набор трёхместных полиморфизмов Γ.

- Набор $p_1, \dots, p_k$ является *совместно сюръективным*, если для каждого элемента $a \in A$ существуют $i \in \{1, \dots, k\}, b_1, b_2, b_3 \in A$ такие, что $p_i(b_1, b_2, b_3) = a$.
- Набор $p_1, \dots, p_k$ *диагонально согласован*, если для всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$ и всех $a \in A$ верно $p_i(a, a, a) = p_j(a, a, a)$.

Будем говорить, что *полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе трёхместных полиморфизмов Γ найдётся сюръективная функция. Иными словами, это свойство требует, чтобы в каждом наборе трёхместных полиморфизмов Γ, который принимает в совокупности все значения из A и совпадает на диагонали, найдётся сюръективная функция.

Сформулируем ещё одно вспомогательное свойство. Пусть R – двуместное отношение из Γ, $p_1, \dots, p_k$ – набор его трёхместных полиморфизмов. Будем говорить, что набор $p_1, \dots, p_k$ *имитирует проекции*, если для любой пары $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}, i_1 \neq i_2$, выполняется ограничение $R(p_{i_1}(\overline{a}), p_{i_2}(\overline{b}))$, где $\overline{a}, \overline{b}$ – векторы из A^3 такие, что для всех $h, l \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a^h, b^l)$. В общем случае это свойство формулируется следующим образом: набор трёхместных полиморфимзов Γ *имитирует проекции*, если для каждых:

- n-местного отношения $R \in \Gamma$,
- отображения $h : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$ и
- набора векторов $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} \in A^3$ такого, что для всех $j_1, \dots, j_k \in \{1, 2, 3\}$ верно $R(a_1^{j_{h(1)}}, a_2^{j_{h(2)}}, \dots, a_n^{j_{h(n)}})$,

выполняется $R(p_{h(1)}(\overline{a_1}), p_{h(2)}(\overline{a_2}), \dots, p_{h(n)}(\overline{a_n}))$.

Будем говорить, что *полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность в слабой форме*, если в каждом совместно сюръективном диагонально согласованном наборе его трёхместных полиморфизмов, который имитирует проекции, найдётся сюръективная функция. Верно, что если полиморфизмы Γ наследуют сюръективность, то они наследуют сюръективность в слабой форме. Выполняется следующая теорема:

Теорема 3. *[16] Пусть* Γ *– конечное множество отношений на множестве* A, $|A| > 1$. *Пусть выполняются следующие условия:*

- *Все сюръективные полиморфизмы* Γ *являются существенно унарными.*
- *Полиморфизмы* Γ *наследуют сюръективность в слабой форме.*

Тогда задача $\mathrm{SCSP}(\Gamma)$ *является* NP*-полной.*

Свойство наследования сюръективности было впервые описано в [10] и позже обобщено до слабой формы в [16]. В этих статьях свойство используется для анализа сложности задачи Surj-Hom в классах неориентированных и строго ориентированных рефлексивных циклов. Данное свойство представляет интерес, поскольку позволяет анализировать сложность $\mathrm{SCSP}(\Gamma)$ исключительно посредством полиморфизмов Γ. При этом существуют отношения, полиморфизмы которых наследуют сюръективность, но для которых задача SCSP лежит в P. К ним относится, например, отношение смежности цикла, изображённого на Рис. 3, б [16]. Тем не менее, свойство наследования сюръективности остается крайне сильным инструментом для анализа сложности SCSP для целых классов отношений.

3. Сложность задачи для смешанно ориентированных графов

В данном разделе рассматривается сложность задачи Surj-Hom для смешанно-ориентированных рефлексивных циклов. Раздел 3.1 посвящен циклам $\mathcal{C}$, для остовных циклов $\mathcal{C}^s$ которых задача Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) является NP-трудной. В разделе 3.2 рассматриваются циклы $\mathcal{C}$, у которых нет остовных циклов или для которых не определена NP-трудность Surj-Hom($\mathcal{C}^s$). Наконец, в разделе 3.3 рассматриваются циклы $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ и $\mathcal{C}_6$ (см. Рис. 1, а, б, в), для них обосновывается, почему к ним не применимы схемы определения сложности Surj-Hom, которые используются для остальных циклов в данной статье.

3.1. Случай большого числа ориентированных рёбер

Рассмотрим n-местное отношение R на множестве A, $|A| > 1$. Пусть S – n-местное отношение на множестве $B, |B| > 1$. Будем говорить, что R *сюръективно интерпретирует* S, если существуют отображения $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to A$ и $n + k$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над R, для которых выполняются следующие условия:

1) $\forall b \in B : \varphi(\psi(b)) = b$.

2) $\forall (b_1, \ldots, b_n) \in S\ \exists c_1, \ldots, c_k \in A$:

$$(\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n), c_1, \ldots, c_k) \in Q$$

и $\{\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n), c_1, \ldots, c_k\} = \varphi^{-1}(\{b_1, \ldots, b_n\})$.

3) $\forall (a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_k) \in Q$:

$$(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \in S,$$

и $\varphi(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \varphi(\{a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_k\})$.

Иными словами, первые n переменных отношения Q моделируют отношение S. Согласно первому условию, отображение φ разбивает A на блоки, соответствующие разным элементам B, а отображение ψ сопоставляет каждому элементу B элемент A из его блока. Согласно второму условию, образы любого набора $(b_1, \ldots, b_n)$ из S можно дополнить элементами A до набора из Q, причём выбранные элементы будут полностью покрывать блоки, соответствующие $b_1, \ldots, b_n$. Наконец, третье условие гласит, что для любого набора из Q образы первых n членов этого набора образуют набор из S, а последние k членов лежат в тех же блоках, что и первые n.

Пример 3.1. *Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ длины 4 и его остовный цикл $\mathcal{C}^s$ из Примера 2.1 (см. Рис. 3). Рассмотрим отображения $\varphi : Z_4 \to Z_3$ и $\psi : Z_3 \to Z_4$:*

$$\varphi(x) = i, \text{ если } x \in V_i$$
$$\psi(x) = x$$

и 6-местное отношение Q задающееся формулой (см. Рис. 4):

$$Q(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4) = \mathcal{C}(x_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, x_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, y_2) \wedge \mathcal{C}(y_2, y_1) \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_2, y_3) \wedge \mathcal{C}(y_3, y_4) \wedge \mathcal{C}(y_4, y_3) \wedge \mathcal{C}(y_4, x_2) \wedge \mathcal{C}(x_2, y_4).$$

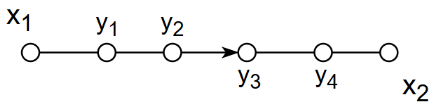

Рис. 4.

Покажем, что эти отображения вместе с формулой удовлетворяют условиям из определения сюръективного интерпретирования. Несложно *проверить, что* $\varphi(\psi(x)) = x$. *Теперь, возьмём ребро* $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^s$. *В зависимости от значений* b_1 *и* b_2 *выберем элементы* c_1, c_2 *(см. Табл. 1),* c_3 *и* c_4 *(см. Табл. 2):*

b_1	b_2	c_1	c_2
$\neq 0$	$\neq 1$	b_1	b_1
$\neq 0$	1	b_1	b_1
0	$\neq 1$	3	3
0	1	3	0

Табл. 1:

b_1	b_2	c_3	c_4
$\neq 1$	$\neq 0$	b_2	b_2
1	$\neq 0$	b_2	b_2
$\neq 1$	0	3	3
1	0	0	3

Табл. 2:

Тогда набор $(\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, c_2, c_3, c_4)$ *будет удовлетворять* Q *и* $\{\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, c_2, c_3, c_4\} = \varphi^{-1}(\{b_1, b_2\})$, *то есть второе условие будет выполняться. Наконец, возьмём произвольный набор* $(a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, c_4) \in Q$. *Нетрудно заметить, что* c_1, c_2 *лежат в одной неориентированной компоненте с* a_1, *а* c_3, c_4 *в одной компоненте с* a_2. *Значит,* $\varphi(\{a_1, a_2\}) = \varphi(\{a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, c_4\})$. *А так как выполняется* $\mathcal{C}(c_2, c_3)$, *то верно* $(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \in \mathcal{C}^s$. *Значит третье свойство тоже выполняется и* $\mathcal{C}$ *сюръективно интерпретирует* $\mathcal{C}^s$.

Теорема 4. *Пусть* R *–* n*-местное отношение на множестве* A. *Пусть* S *–* n*-местное отношение на множестве* B *такое, что* R *сюръективно интерпретирует* S. *Тогда* $\mathrm{SCSP}(S)$ *полиномиально сводится к* $\mathrm{SCSP}(R)$.

Доказательство. Рассмотрим отображения $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to A$ и $n + k$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над R, которые удовлетворяют условиям из определения сюръективного интерпретирования. Возьмём экземпляр задачи $\mathrm{SCSP}(S)$, задающийся набором переменных $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ и формулой $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} : S(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n}}) \wedge \cdots \wedge S(x_{i_{h,1}}, \ldots, x_{i_{h,n}}),$$

где $i_{j,s} \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, h\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$. Построим формулу $\mathcal{J}$ над Q с множеством переменных $X' = \{x_1, \ldots, x_l, y_{1,1}, \ldots, y_{1,k}, \ldots, y_{h,1}, \ldots, y_{h,k}\}$:

$$\mathcal{J} : Q(x_{i_{1,1}}, \ldots, x_{i_{1,n}}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,k}) \wedge \cdots \wedge Q(x_{i_{h,1}}, \ldots, x_{i_{h,n}}, y_{h,1}, \ldots, y_{h,k}).$$

Покажем, что $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ имеет сюръективное решение.

Пусть $\mathcal{I}$ обладает сюръективным решением $f : X \to B$. Построим подстановку $g : X' \to A$ в переменные $\mathcal{J}$ следующим образом:

- Для x_i положим $g(x_i) = \psi(f(x_i))$.

- Для $y_{j,l}$ рассмотрим j-ое вхождение Q в $\mathcal{J}$:

  $$Q(x_{i_{j,1}}, \ldots, x_{i_{j,n}}, y_{j,1}, \ldots, y_{j,k}).$$

  Так как f – решение $\mathcal{I}$, то $(f(x_{i_{j,1}}), \ldots, f(x_{i_{j,n}})) \in S$. Тогда по второму условию сюръективного интерпретирования существуют $c_{j,1}, \ldots, c_{j,k} \in A$ такие, что верно

  $$Q(\psi(f(x_{i_{j,1}})), \ldots, \psi(f(x_{i_{j,n}})), c_{j,1}, \ldots, c_{j,k})$$

  и

  $$\{\psi(f(x_{i_{j,1}})), \ldots, \psi(f(x_{i_{j,n}})), c_{j,1}, \ldots, c_{j,k}\} = \varphi^{-1}(\{f(x_{i_{j,1}}), \ldots, f(x_{i_{j,n}})\}).$$

  Положим $g(y_{j,l}) = c_{j,l}$.

Несложно заметить, что по построению g будет решением $\mathcal{J}$. Покажем, что оно также будет сюръективным. Пусть какое-то значение $a \in A$ не принимается на g. Рассмотрим $\varphi(a) = b$. Поскольку f сюръективно, то для некоторых $j \in \{1, \ldots, h\}, s \in \{1, \ldots, n\}$ верно $f(x_{i_{j,s}}) = b$. Но по построению g имеем $a \in \varphi^{-1}(b) \subseteq \{g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k})\}$ – противоречие. Значит, g – это сюръективное решение.

Теперь, пусть у $\mathcal{J}$ существует сюръективное решение $g : X' \to A$. Построим подстановку $f : X \to B$ следующим образом: для $x_{i_{j,s}}$ положим $f(x_{i_{j,s}}) = \varphi(g(x_{i_{j,s}}))$. Несложно заметить, что полученная подстановка будет решением, поскольку по третьему условию сюръективного интерпретирования из выполнения

$$Q(g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k}))$$

следует

$$(\varphi(g(x_{i_{j,1}})), \ldots, \varphi(g(x_{i_{j,n}}))) \in S.$$

Покажем, что это решение будет сюръективным. Пусть f не принимает значение $b \in B$. Рассмотрим $a = \psi(b)$. Из первого условия сюръективного интерпретирования следует $\varphi(a) = b$. Поскольку g сюръективно, то a принимается на некотором $y_{j,l}$ (если a принимается на одном из $x_{i_{j,s}}$, то по построению f имеем $f(x_{i_{j,s}}) = \varphi(a) = b$). Но тогда по третьему свойству сюръективного интерпретирования получается, что

$$b \in \varphi(\{g(x_{i_{j,1}}), \ldots, g(x_{i_{j,n}}), g(y_{j,1}), \ldots, g(y_{j,k})\}) = f(\{x_{i_{j,1}}, \ldots, x_{i_{j,n}}\}).$$

Получили противоречие. Значит, f – сюръективное решение.

Итак, по экземпляру задачи $\mathrm{SCSP}(S)$ из множества переменных X и формулы $\mathcal{I}$ мы за полиномиальное время построили экземпляр $\mathrm{SCSP}(R)$ из множества переменных X' и формулы $\mathcal{J}$ такой, что $\mathcal{I}$ имеет сюръективное решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ имеет сюръективное решение. Это полиномиально сводит $\mathrm{SCSP}(S)$ к $\mathrm{SCSP}(R)$. $\square$

Заметим, что из Теоремы 4 не следует, что если отношение R сюръективно интерпретирует отношение S, то задачи SCSP(R) и SCSP(S) эквивалентны. Так, отношение смежности цикла $\mathcal{C}$ длины 4 из Примера 3.1 сюръективно интерпретирует отношение смежности его остовного цикла $\mathcal{C}^s$. При этом Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) лежит в P [9], но, как будет показано в разделе 3.2.4, Surj-Hom($\mathcal{C}$) является NP-трудной.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно ориентированный рефлексивный цикл, содержащий n вершин и m неориентированных компонент, $m \geq 3$. Пусть $\mathcal{C}^s$ – остовный цикл для $\mathcal{C}$. Если задача* Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) *является* NP-*трудной, то и задача* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

Доказательство. Покажем, что отношение смежности $\mathcal{C}$ сюръективно интерпретирует $\mathcal{C}^s$. Так как в $\mathcal{C}$ содержится m неориентированных компонент, то $\mathcal{C}^s$ содержит m вершин. Обозначим неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ как $V_0, \ldots, V_{m-1}$, обходя цикл по часовой стрелке, начиная с произвольной вершины. Обозначим вершины $\mathcal{C}^s$ как $\{0, \ldots, m-1\}$ так, чтобы каждой вершине $i \in Z_m$ соответствовала компонента V_i. Выберем в каждой компоненте V_i произвольную вершину v_i. Пусть неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ содержат не больше k вершин. Рассмотрим отображения $\varphi : Z_n \to Z_m$ и $\psi : Z_m \to Z_n$, которые задаются следующим образом:

$$\varphi(v) = i, \text{если } v \in V_i,$$
$$\psi(i) = v_i$$

и $4k+2$-местное отношение Q, задающееся конъюнктивной формулой над $\mathcal{C}$ (см. Рис. 5):

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_{4k}) = \mathcal{C}(x_1, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, x_1) \wedge \mathcal{C}(y_2, y_1) \wedge \mathcal{C}(y_1, y_2) \wedge \cdots \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{2k-1}, y_{2k}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k-1}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k+1}) \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{2k+1}, y_{2k+2}) \wedge \mathcal{C}(y_{2k+2}, y_{2k+1}) \wedge \cdots \wedge \\ \wedge \mathcal{C}(y_{4k-1}, y_{4k}) \wedge \mathcal{C}(y_{4k}, y_{4k-1}) \wedge \mathcal{C}(y_{4k}, x_2) \wedge \mathcal{C}(x_2, y_{4k}). \end{aligned}$$

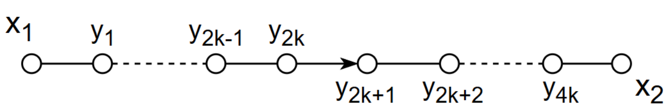

Рис. 5.

Проверим, что полученные отображения и формула удовлетворяют условиям из определения сюръективной интерпретации. Так как для каждой вершины $i \in Z_m$ верно $v_i \in V_i$, то $\varphi(\psi(x)) = x$, и первое условие выполняется. По пострению в любом наборе $(a_1, a_2, c_1, \ldots, c_{4k}) \in Q$

элементы $c_1, \dots, c_{2k}$ лежат в одной неориентированной компоненте с a_1, а $c_{2k+1}, \dots, c_{4k}$ – в одной компоненте с a_2. При этом, так как формула Q содержит ограничение $\mathcal{C}(y_{2k}, y_{2k+1})$, то для любых $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^s$ можно выбрать $c_1, \dots, c_{4k} \in Z_n$ такие, что $(\psi(b_1), \psi(b_2), c_1, \dots, c_{4k}) \in Q$ и $\{\psi(b_1), c_1, \dots, c_{2k}\} = \varphi^{-1}(\{b_1\})$, $\{\psi(b_2), c_{2k+1}, \dots, c_{4k}\} = \varphi^{-1}(\{b_2\})$, откуда второе условие выполняется.

Теперь, возьмём произвольный набор $(a_1, a_2, c_1, \dots, c_{4k}) \in Q$. Поскольку $c_1, \dots, c_{2k}$ лежат в одной неориентированной компоненте с a_1, а $c_{2k+1}, \dots, c_{4k}$ – с a_2, то $\{\varphi(a_1)\} = \varphi(\{a_1, c_1, \dots, c_{2k}\})$ и $\{\varphi(a_2)\} = \varphi(\{a_2, c_{2k+1}, \dots, c_{4k}\})$, а так как $(c_{2k}, c_{2k+1}) \in \mathcal{C}$, то $(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \in \mathcal{C}^s$. Значит, третье свойство также выполняется, и $\mathcal{C}$ сюръективно интерпретирует $\mathcal{C}^s$. Тогда, Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) полиномиально сводится к Surj-Hom($\mathcal{C}$). А так как Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) является NP-трудной, то и Surj-Hom($\mathcal{C}$) также является NP-трудной. $\square$

3.2. Случай циклов с маленьким числом ориентированных рёбер

В этом разделе мы рассмотрим смешанно-ориентированные рефлексивные циклы, для которых мы ещё не определили сложность задачи Surj-Hom. Это циклы $\mathcal{C}$, к которым не применимо Следствие 1. К ним относятся циклы, у которых не существует остовных циклов $\mathcal{C}^s$, для которых задача Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) решается за полиномиальное время или для которых сложность Surj-Hom($\mathcal{C}^s$) не известна. Будем рассматривать такие графы относительно взаимного расположения в них ориентированных рёбер (см. Рис. 6, пунктиром обозначены последовательности из нескольких неориентированных рёбер):

- Будем говорить, что смешанно-ориентированный цикл *имеет тип A*, если он содержит ровно одно ориентированное ребро.
- Цикл *имеет тип B*, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и одно ориентированное ребро выходит из V_0 в V_1, а одно – из V_1 в V_0.
- Цикл *имеет тип C*, если он содержит два ориентированных ребра, две неориентированные компоненты V_0, V_1 и все ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1.
- Цикл *имеет тип D*, если он содержит три ориентированных ребра, три неориентированные компоненты V_0, V_1, V_2 и ориентированные рёбра выходят из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2.

- Цикл *имеет тип E*, если он содержит шесть ориентированных рёбер, шесть неориентированных компонент $V_0, V_1, \ldots, V_5$ и ориентированные рёбра выходят из V_1 в V_0 и V_2, из V_3 в V_2 и V_4 и из V_5 в V_4 и V_0.

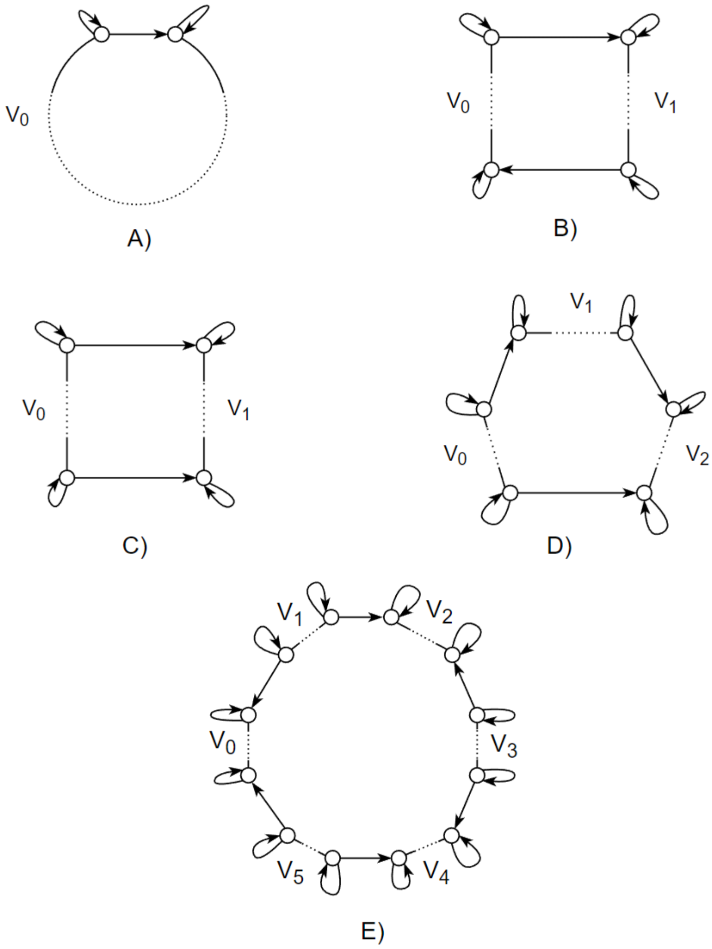

Рис. 6. Типы циклов, к которым не применимо Следствие 1.

Перед исследованием сложности задачи Surj-Hom для данных циклов мы сформулируем два важных утверждения о смешанно-ориентированных рефлексивных циклах и их полиморфизмах. Первое утверждение естественным образом следует из определения полиморфизмов графов.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{C})$. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – векторы, которые лежат в одной* *неориентированной компоненте. Тогда* $p(\overline{a})$ *и* $p(\overline{b})$ *тоже лежат в одной неориентированной компоненте.*

Второе утверждение является частным случаем Теоремы 1.1 из [17]:

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{C}$ *– смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин. Тогда сюръективные полиморфизмы* $\mathcal{C}$ *являются существенно унарными.*

Для определения сложности задачи Surj-Hom мы будем использовать свойство наследования сюръективности, сформулированное в разделе 2.5. Как мы показали в Утверждении 2, сюръективные полиморфизмы всех циклов, которые мы будем рассматривать в этом разделе, являются существенно-унарными. Значит, для доказательства NP-трудности задачи с помощью Теоремы 3 нам всего лишь достаточно доказать, что полиморфизмы циклов наследуют сюръективность.

3.2.1. Циклы типа A

Рассмотрим цикл типа A. Этот граф состоит из единственной неориентированной компоненты и содержит одно ориентированное ребро.

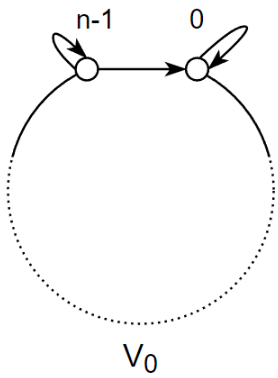

Рис. 7. Цикл типа A

Доказательство того, что полиморфизмы циклов типа A наследуют сюръективность, во многом схоже с аналогичным доказательством для неориентированных циклов из [10]. Тем не менее, наличие ориентированного ребра в циклах, которые мы рассматриваем, не позволяет нам полностью скопировать доказательство. В связи с этим, мы сформулируем следующее утверждение, опираясь на Леммы 1, 2, 10 из [10], а то, что полиморфизмы циклов наследуют сюръективность, мы докажем независимо.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий n вершин, $n > 3$. Тогда:*

1) *Для любого вектора $\overline{a} \in Z_n^3$ существует вершина $r \in Z_n$ такая, что существует ориентированный путь вида $\overline{a} \to \cdots \to (r, r, r)$ или $(r, r, r) \to \cdots \to \overline{a}$ длины $l \leq c, c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.*

2) *Пусть p – полиморфизм $\mathcal{C}$, который принимает значения $s, s+1 \pmod{n}, \ldots, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod{n}$ и существует вершина r такая, что $p(r, \ldots, r) = s$. Тогда p сюръективен.*

Доказательство. Обозначим неориентированный рефлексивный цикл длины n как $\mathcal{C}'$.

1. Пронумеруем вершины $\mathcal{C}$, обходя цикл по часовой стрелке так, чтобы единственное ориентированное ребро имело вид $n - 1 \to 0$ (см. Рис. 7). Согласно Лемме 10 из [10], можно выбрать вершину $r \in Z_n$ такую, что в $\mathcal{C}'$ существуют пути из неориентированных рёбер от r до a_1, a_2 и a_3 длины меньшей или равной c. Пусть $r \in \{0, 1, \ldots, c\}$. В этом случае в цикле $\mathcal{C}$ существуют аналогичные ориентированные пути, в которых все рёбра ориентированы как $\leftarrow$. Теперь, пусть $r \in \{c+1, c+2, \ldots, n-1\}$. В этом случае в $\mathcal{C}$ есть пути из r в компоненты $\overline{a}$ длины не более c, в которых все рёбра имеют ориентацию $\to$. Значит, в $\mathcal{C}$ есть ориентированный путь вида $(r, r, r) \to \cdots \to \overline{a}$ или $(r, r, r) \leftarrow \cdots \leftarrow \overline{a}$ длины $l \leq c$.

2. Возьмём вектор $\overline{a}$ такой, что $p(\overline{a}) = s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod{n}$. Обозначим $\overline{r} = (r, r, r)$. Согласно Леммам 1, 2 из [10] в $\mathcal{C}'$ существует путь между $\overline{a}$ и $\overline{r}$ из неориентированных рёбер длины $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Значит, если $r \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, то в $\mathcal{C}$ есть ориентированный путь вида $\overline{r} \leftarrow \cdots \leftarrow \overline{a}$ длины l. А если $r \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \ldots, n-1\}$, то в $\mathcal{C}$ есть путь вида $\overline{r} \to \cdots \to \overline{a}$ длины l. Образы элементов этого пути проходят через все значения $s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod{n}, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \pmod{n}, \ldots, s$, поскольку иначе этот путь проходил бы через все $s, s+1 \pmod{n}, \ldots, s + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \pmod{n}$ и содержал как минимум $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ элементов. Значит, p сюръективен.

□

Утверждение 4. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий больше шести вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ содержит n вершин, $n > 6$. Без ограничения общности пронумеруем вершины этого графа так, чтобы единственное ориентированное ребро имело вид $n - 1 \to 0$. Рассмотрим набор трёхместных полиморфизмов $p_1, \ldots, p_k$, который является совместно сюръективным и диагонально согласованным. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция. Возьмём $i, j \in \{1, \dots, k\}$, векторы $\overline{a}, \overline{b} \in Z_n^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = n - 1$, $p_j(\overline{b}) = 0$.

По Утверждению 3.1 можно выбрать элемент $r \in Z_n$ такой, что существует ориентированный путь вида $\overline{b} \to \dots \to (r, r, r)$ или $(r, r, r) \to \dots \to \overline{b}$ длины $l \leq c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$. Это значит, что $p_j(r, r, r) \in \{0, 1, \dots, c\}$ или $p_j(r, r, r) \in \{n - c, n - c + 1, \dots, n - 1\}$. Рассмотрим первый случай. Существует путь Π из вектора (r, r, r) в $\overline{a}$ из неориентированных рёбер. Поскольку полиморфизмы из набора совпадают на диагонали, то $p_i(r, r, r) \in \{0, \dots, c\}$, откуда образы элементов Π принимают на p_i все значения из $\{c, c + 1, \dots, n - 1\}$. Значит, p_i принимает как минимум $n - c$ значений. Аналогично, пусть $p_j(r, r, r) \in \{n - c, n - c + 1, \dots, n - 1\}$. Рассмотрим произвольный путь между (r, r, r) и $\overline{b}$ из неориентированных рёбер. Образы его элементов принимают на p_j все $n - c + 1$ значений из $\{0, 1, \dots, n - c\}$. Если $n \neq 8$, то из $n > 6$ имеем $n - c > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, откуда по Утверждению 3.2 одна из функций p_i и p_j сюръективна.

Теперь, пусть $n = 8$. В этом случае $c = 3$. Пусть существует $s \in Z_8$ такое, что функции из набора принимают на (s, s, s) значение из $\{0, 1, 2\}$. Рассмотрим произвольный путь вида $(s, s, s) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \overline{a}$. Поскольку каждое ребро этого пути ориентировано как $\leftrightarrow$ и $p_i(\overline{a}) = 7$, то образы элементов этого пути принимают на p_i все значения из $\{2, 3, \dots, 7\}$ – всего 6 значений, откуда по Утверждению 3.2 функция p_i сюръективна. Аналогично, если существует s такое, что $p_1, \dots, p_k$ принимают на (s, s, s) значение из $\{5, 6, 7\}$, то p_j – сюръективна.

Тогда, пусть функции из набора принимают на диагонали только значения из $\{3, 4\}$. Заметим, что для произвольных вектора $\overline{v} \in Z_8^3$ и элемента $s \in Z_8$ кратчайший ориентированный путь из (s, s, s) в $\overline{v}$ имеет длину 4 тогда и только тогда, когда $s \in \{v^1 + 4 \pmod 8, v^2 + 4 \pmod 8, v^3 + 4 \pmod 8\}$ (в противном случае длина этого пути будет не больше трёх). Обозначим через d количество диагональных элементов, которые $p_1, \dots, p_k$ отображают в 3, тогда в 4 отображаются $8-d$ элементов. Возьмём произвольный элемент $r \in Z_8$ такой, что $p_i(r, r, r) = 3$. При этом, так как $p_i(\overline{a}) = 7$, то любой ориентированный путь из (r, r, r) в $\overline{a}$ должен иметь длину не меньше 4. Это значит, что $d \leq 3$. Аналогично рассматривая диагональные элементы, которые отображаются в 4 и $p_j(\overline{b})$, получаем $8-d \leq 3$, то есть $d \geq 5$ – противоречие. Значит, на диагонали принимаются не только $\{3, 4\}$ и в наборе найдётся сюръективная функция.

$\square$

Из Утверждений 2, 4 и Теоремы 3 следует:

Утверждение 5. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий больше шести вершин. Тогда* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP*-трудной.*

Циклы типа A длины $4, 5, 6$ более детально рассматриваются в разделе 3.3.

3.2.2. Циклы типа B

Рассмотрим цикл $\mathcal{C}$ типа B. Обозначим множество вершин $\mathcal{C}$ как V. Обозначим неориентированные компоненты цикла как V_0 и V_1 (см. Рис. 8).

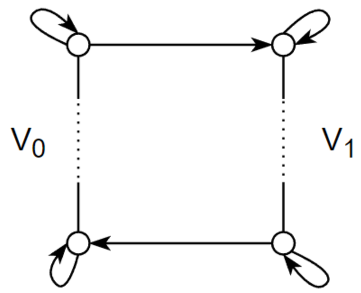

Рис. 8. Цикл типа B

Утверждение 6. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.*

Доказательство. Рассмотрим набор полиморфизмов $\mathcal{C}$ $p_1, \ldots, p_k$, которые удовлетворяют условиям наследования сюръективности. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

Пусть существует $a \in V$ такое, что полиморфизмы из набора принимают на векторе $\overline{a} = (a, a, a)$ значение $v \in V_0$ (случай $v \in V_1$ разбирается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{b}) \in V_1$. Существует ориентированный путь вида:

$$\overline{a} \to \cdots \to \overline{b} \to \cdots \to \overline{a}.$$

Поскольку на этом пути первый и последний элементы совпадают, все рёбра ориентированы как $\to$ и полиморфизм p_i принимает на нём значения и из V_0, и из V_1, то по определению полиморфизма образы элементов этого пути на p_i проходят через все значения из V, откуда p_i – сюръективная функция. $\square$

Таким образом, с помощью Утверждений 2, 6 и Теоремы 3 мы доказали:

Утверждение 7. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа B, содержащий больше трёх вершин. Тогда* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP*-трудной.*

3.2.3. Циклы типа C

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C. Обозначим множество его вершин как V, $|V| = n$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0 и V_1 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1. Пусть $|V_0| = n_0$ и $|V_1| = n_1$. Обозначим вершины V_0, инцидентные ориентированным рёбрам, как $0, 0'$ и вершины V_1 – как $1, 1'$ так, чтобы ориентированные рёбра имели вид $0 \to 1$ и $0' \to 1'$ (см. Рис 9).

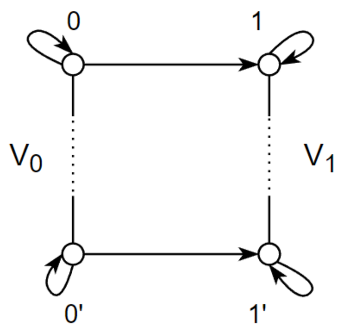

Рис. 9. Цикл типа C.

Утверждение 8. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.*

Доказательство. Рассмотрим набор трёхместных полиморфизмов $\mathcal{C}$ $p_1, \dots, p_k$, которые удовлетворяют условиям наследования сюръективности. Покажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

Рассмотрим векторы $\overline{0} = (0, 0, 0)$ и $\overline{1} = (1, 1, 1)$. Рассмотрим $i \in \{1, \dots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_0$. Поскольку существует ориентированный путь вида $\overline{0} \to \cdots \to \overline{a}$, то $p_i(\overline{0}) \in V_0$ (иначе пути вида $p(\overline{0}) \to \cdots \to p(\overline{a})$ не существовало бы), а так как полиморфизмы из набора совпадают на диагонали, то для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно $p_j(\overline{0}) \in V_0$. Аналогично, $p_j(\overline{1}) \in V_1$. А так как в $\mathcal{C}$ есть ребро $\overline{0} \to \overline{1}$ и нет ребра $\overline{0} \leftarrow \overline{1}$, то либо $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{1}) = 1$, либо $p_j(\overline{0}) = 0'$ и $p_j(\overline{1}) = 1'$. Без ограничения общности положим $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{1}) = 1$.

Пусть $n_0 \geq n_1$ (случай $n_1 \geq n_0$ рассматривается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \dots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 0'$. Покажем, что p_i – сюръективная функция. Несложно заметить, что для каждой вершины v можно выбрать вершину $w \in \{0, 1, 0', 1'\}$ такую, что между v и w существует путь из неориентированных рёбер, содержащий не больше $\lfloor \frac{\max(n_0, n_1)-1}{2} \rfloor$ рёбер. Это значит, что можно выбрать вектор $\overline{b} \in \{0, 1, 0', 1'\}^3$ такой, что существует ориентированный путь Π вида $\overline{a} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{b}$ длины $l \leq \lfloor \frac{\max(n_0, n_1)-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_0-1}{2} \rfloor$. По Утверждению 1 $p_i(\overline{b}) \in V_0$. Тогда можно выбрать векторы $\overline{c} \in V_0^3, \overline{d} \in V_1^3$ такие, что существуют рёбра $\overline{c} \to \overline{d}$ и $\overline{c} \to \overline{b} \to \overline{d}$. Из того, что $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{1}) = 1$, по Утверждению 1 имеем $p_i(\overline{c}) \in \{0, 0'\}$, $p_i(\overline{d}) \in \{1, 1'\}$, откуда $p_i(\overline{b}) \in \{0, 0'\}$. Но любой путь из 0 в $0'$ из неориентированных рёбер должен иметь длину не меньше $n_0 - 1$, откуда $p_i(\overline{b}) = 0'$ и $p_i(\overline{c}) = 0', p_i(\overline{d}) = 1'$.

Существуют путь Π_1 из векторов V_0^3 вида $\overline{0} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{c}$ и путь Π_2 из векторов V_1^3 вида $\overline{1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{d}$. Поскольку $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{c}) = 0'$ и все рёбра Π_1 ориентированы как $\leftrightarrow$, то образы элементов Π_1 на p_i принимают все значения из V_0. Аналогично, элементы Π_2 принимают на p_i все значения из V_1. Значит, p_i – сюръективная функция. □

Из Утверждений 2, 8 и Теоремы 3 следует:

Утверждение 9. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа C, содержащий больше трёх вершин. Тогда* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

3.2.4. Циклы типа D

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Обозначим множество его вершин как $V, |V| = n > 3$. Обозначим его неориентированные компоненты как V_0, V_1, V_2 так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_0 в V_1, из V_1 в V_2 и из V_0 в V_2 (см. Рис. 10).

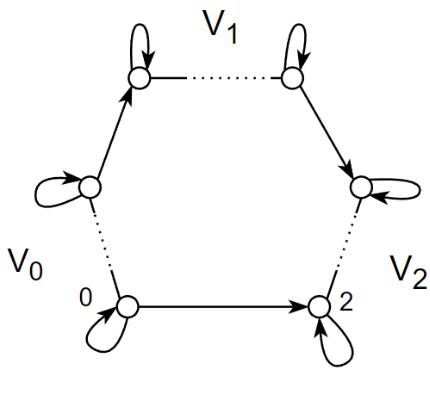

Рис. 10. Цикл типа D

Утверждение 10. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.*

Доказательство. Рассмотрим набор трёхместных полиморфизмов $p_1, \ldots, p_k$, удовлетворяющих условиям наследования сюръективности. Докажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

Обозначим вершины, инцидентные ориентированному ребру из V_0 в V_2, как 0 и 2 (см. Рис. 10). Положим $\overline{0} = (0, 0, 0)$, $\overline{2} = (2, 2, 2)$. Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_0$. Существует ориентированный путь вида $\overline{0} \to \cdots \to \overline{a}$, откуда $p_i(\overline{0}) \in V_0$ (иначе существовал бы ориентированный путь из элемента V_1 или V_2 в элемент V_0, в котором все рёбра ориентированы как $\to$, что невозможно). А так как полиморфизмы совпадают на диагонали, то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно $p_j(\overline{0}) \in V_0$. Аналогично, $p_j(\overline{2}) \in V_2$. А так как существует ребро $\overline{0} \to \overline{2}$, то $p_j(\overline{0}) = 0$ и $p_j(\overline{2}) = 2$.

Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{b}) \in V_1$. Существует ориентированный путь вида:

$$\overline{0} \to \cdots \to \overline{b} \to \cdots \to \overline{2}.$$

Поскольку $p_i(\overline{0}) = 0$, $p_i(\overline{2}) = 2$ и все рёбра пути ориентированы как $\to$, то образы элементов этого пути принимают на p_i либо только значения из V_0 и V_2, либо все значения из V. А так как $p_i(\overline{b}) \in V_1$, то p_i принимает все значения из V, то есть она сюръективна. $\square$

Заметим, что так как смешанно-ориентированные графы по определению содержат неориентированные рёбра, то смешанно-ориентированные циклы типа D содержат не меньше четырёх вершин. Значит, из Утверждений 2, 10 и Теоремы 3 следует:

Утверждение 11. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа D. Тогда* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

3.2.5. Циклы типа E

Рассмотрим смешанно-ориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}$ типа E. Обозначим неориентированные компоненты $\mathcal{C}$ как $V_0, V_1, \ldots, V_5$ так, чтобы ориентированные рёбра выходили из V_1 в V_0, V_2, из V_3 в V_2, V_4 и из V_5 в V_4, V_0. Обозначим множество вершин $\mathcal{C}$ как $V, |V| = n > 6$. Обозначим вершины, инцидентные ориентированным рёбрам $\mathcal{C}$, как $0, 1, \ldots, 5, 0', 1', \ldots, 5'$ образом, изображённым на Рис. 11. Заметим, что для некоторых $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ неориентированные компоненты V_i могут содержать всего одну вершину. В этом случае вершины i и i' будут совпадать. При этом как минимум одна неориентированная компонента всегда будет содержать больше одной вершины. Множество вершин $V_0 \cup V_2 \cup V_4$ будем обозначать как V_{in}, а множество $V_1 \cup V_3 \cup V_5$ – как V_{out}.

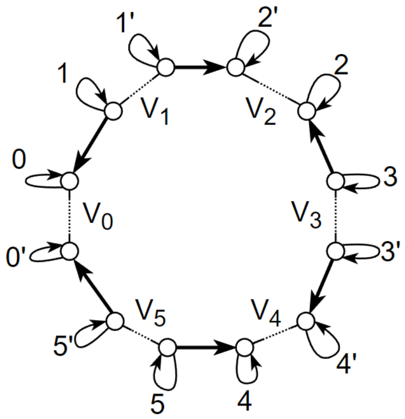

Рис. 11. Цикл типа E.

Полиморфизмы циклов типа E по структуре похожи на полиморфизмы строго ориентированных циклов, которые рассматриваются в [16]. В частности, следующее утверждение формулируется аналогично Утверждению 4 из этой статьи:

Утверждение 12. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, p – его трёхместный полиморфизм.*

1) *Пусть $\overline{a} \in V^3$ – вектор такой, что $p(\overline{a}) \in V_i$, $i \in \{0, 2, 4\}$. Тогда существует вектор $\overline{b} \in V_{in}^3$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_i$.*

2) *Пусть $\overline{a} \in V^3$ – вектор такой, что $p(\overline{a}) \in V_i$, $i \in \{1, 3, 5\}$. Тогда существует вектор $\overline{b} \in V_{out}^3$ такой, что $p(\overline{b}) \in V_i$.*

3) *Для любого вектора $\overline{a} \in V^3$ существует вершина $w \in V$ такая, что есть ориентированный путь из (w, w, w) в $\overline{a}$, содержащий не более двух ориентированных рёбер.*

4) *Пусть $i, j \in Z_6$, $a, b \in V$ такие, что $p(a, \dots, a) \in V_i$, $p(b, \dots, b) \in V_j$. Тогда полиморфизм p принимает на диагонали значения из всех $V_i, V_{i+1 \pmod 6}, \dots, V_j$ или из всех $V_j, V_{j+1 \pmod 6}, \dots, V_i$.*

Доказательство.

1. Выберем вектор $\overline{b} \in V_{in}^3$ такой, что существует ориентированный путь вида $\overline{b} \leftarrow \dots \leftarrow \overline{a}$. Пусть $p(\overline{b}) \in V_{out}$. Тогда образы этого пути составляют ориентированный путь из элемента V_{out} в элемент V_{in}, в

котором все рёбра ориентированы как $\leftarrow$, что невозможно. Значит, $p(\overline{b}) \in V_{in}$.

2. Доказывается аналогично 1.

3. Поскольку вектор $\overline{a}$ трёхместный, то существует $i \in \{0, \ldots, 5\}$ такое, что ни одна из a^1, a^2, a^3 не лежит в V_i. Положим $i' = i + 3 \pmod 6$. Пусть $V_{i'} \subseteq V_{in}$ (случай $V_i' \subseteq V_{out}$ разбирается аналогично). Возьмём произвольную $w \in V_{i'}$ Тогда для каждой $j \in \{1, 2, 3\}$ можно выбрать вершины v_1, v_2, v_3, v_4 такие, что существует ориентированный путь из w в a^j, содержащий не более двух ориентированный рёбер, следующего вида:

$$w \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_1 \leftarrow v_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_3 \rightarrow v_4 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow a^j.$$

А это значит, что в $\mathcal{C}$ есть ориентированный путь из (w, w, w) в $\overline{a}$, который содержит не больше двух ориентированных рёбер.

4. Существует ориентированный путь из (a, a, a) в (b, b, b), состоящий только из диагональных элементов. Образы членов этого пути принимают на p значения из всех $V_i, V_{i+1 \pmod 6}, \ldots, V_j$ или из всех $V_j, V_{j+1 \pmod 6}, \ldots, V_i$. □

Утверждение 13. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, p – его полиморфизм. Пусть p принимает значения как минимум из пяти различных неориентированных компонент. Тогда p сюръективен.*

Доказательство. Сперва покажем, что если p принимает значения из V_0, V_2 и V_4, то он принимает все значения из V_{out}. Пусть p не принимает значение $v \in V_1$ (случаи $v \in V_3$ и $v \in V_5$ разбираются аналогично). По Утверждению 12.1 существуют векторы $\overline{a}, \overline{b} \in V_{in}^3$ такие, что $p(\overline{a}) \in V_0$ и $p(\overline{b}) \in V_2$. Можно выбрать векторы $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь из $\overline{a}$ в $\overline{b}$, содержащий всего два ориентированных ребра вида:

$$\overline{a} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_1} \leftarrow \overline{v_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{v_4} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{b}.$$

Образы элементов этого пути принимают на p все значения из V_1, поскольку любой путь из элемента V_0 в элемент V_2, не проходящий через V_1, будет содержать как минимум 4 ориентированных ребра.

Аналогично показывается, что если p принимет значения из V_1, V_3 и V_5, то он принимает все значения из V_{in}. Значит, если полиморфизм $\mathcal{C}$ принимает значения из всех шести неориентированных компонент, то он сюръективен. Теперь, пусть p принимает значения из всех неориентированных компонент кроме, может быть, $V_i \subseteq V_{out}$ (случай $V_i \in V_{in}$ рассматривается аналогично). Выше показали, что тогда эта функция принимает все значения из V_{out}, откуда p сюръективна.

□

Утверждение 14. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E, $p_1, \ldots, p_k$ – набор его полиморфизмов, удовлетворяющий условиям наследования сюръективности. Тогда:*

1) $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали значения как минимум из двух неориентированных компонент.

2) Если на диагонали принимаются значения хотя бы из трёх неориентированных компонент, то среди $p_1, \ldots, p_k$ найдётся сюръективная функция.

Доказательство.

1. Пусть на диагонали принимается значение s. Без ограничения общности положим $s \in V_0$. Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_3$. По Утверждению 12.3 существует элемент w такой, что есть ориентированный путь из (w, w, w) до $\overline{a}$, который содержит не больше двух ориентированных рёбер. А это значит, что $p_i(w, w, w) \notin V_0$. Так как полиморфизмы совпадают на диагонали, то все $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали как минимум одно значение из V_0 и одно не из V_0.

2. Без ограничения общности положим, что на диагонали принимается значение из V_0. В этом случае по Утверждению 12.4 на диагонали также принимаются значения из V_1 и V_2, из V_5 и V_4 или из V_1 и V_5. Рассмотрим первый вариант (остальные доказываются аналогично). Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_4$. Рассмотрим произвольный элемент $s \in V$ такой, что $p_i(s, s, s) \in V_1$. Рассмотрим произвольный ориентированный путь из (s, s, s) в $\overline{a}$. Образы элементов этого пути принимают на p значения из V_3 или V_5. Значит, p_i принимает значения из как минимум пяти неориентированных компонент и, по Утверждению 13, она сюръективна. $\square$

Утверждение 15. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ наследуют сюръективность.*

Доказательство. Рассмотрим набор трёхместных полиморфизмов $p_1, \ldots, p_k$, удовлетворяющий условиям наследования сюръективности. Докажем, что среди них найдётся сюръективная функция.

По Утверждению 14.2 если $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали значения из трёх неориентированных компонент, то один из этих полиморфизмов будет сюръективным. Тогда, по Утверждению 14.1 достаточно рассмотреть случай, когда эти функции принимают на диагонали значения только из двух неориентированных компонент. По Утверждению 12.4 эти компоненты смежны. Без ограничения общности положим, что $p_1, \ldots, p_k$ принимают на диагонали только значения из V_0, V_1.

Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) \in V_3$. По Утверждению 12.2 выберем вектор $\overline{a'} \in V_{out}^3$ такой, что $p_i(\overline{a'}) \in V_3$. Возьмём вершину $s \in V$ такую, что $p_i(s, s, s) \in V_0$. Любой ориентированный путь из (s, s, s) в $\overline{a'}$ должен содержать не меньше трёх ориентированных рёбер. Поскольку для любых двух векторов $\overline{v}, \overline{w} \in V_{out}^3$ существует ориентированный путь из $\overline{v}$ в $\overline{w}$, содержащий не более двух ориентированных рёбер, то из $\overline{a} \in V_{out}^3$ следует $(s, s, s) \notin V_{out}$, то есть $s \in V_{in}$. Это значит, что для любых $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $s' \in V_{out}$ верно $p_j(s', s', s') \in V_1$. Аналогично рассматривая $h \in \{1, \ldots, k\}$ и вектор $\overline{b} \in V^3$ такие, что $p_h(\overline{b}) \in V_4$, показываем, что для всех $s' \in V_{in}$ верно $p_j(s', s', s') \in V_0$. Более того, отсюда по Утверждению 1 для любого $j \in Z_6$ и любых $\overline{v} \in V_j^3, i \in \{1, \ldots k\}$ верно $p_i(\overline{v}) \in V_0$, если $j \in \{0, 2, 4\}$ и $p_i(\overline{v}) \in V_1$, если $j \in \{1, 3, 5\}$.

Пусть $|V_3| > 1$ (случай $|V_4| > 1$ рассматривается аналогично). Рассмотрим $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\overline{a} \in V^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 3'$. Существует вектор $\overline{a'} \in V_{in} \cup V_1 \cup V_5 \cup \{3, 3'\}$ такой, что есть путь из $\overline{a}$ в $\overline{a'}$ из неориентированных рёбер длины $l \leq \lfloor \frac{|V_3|}{2} \rfloor$. По Утверждению 1 $p_i(\overline{a'}) \in V_3$. Можно выбрать векторы $\overline{b} \in \{0, 0'\}^3$, $\overline{v_1}, \ldots \overline{v_4} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π с тремя ориентированными рёбрами следующего вида:

$$\Pi : \overline{b} \leftarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_2} \rightarrow \overline{v_3} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_4} \leftarrow \overline{a'}.$$

Так как $p_i(\overline{b}) \in V_0$ и путь до $\overline{v_4}$ содержит всего два ориентированных ребра, то $p_i(\overline{v_4}) \notin V_3$, а так как $p_i(\overline{a'}) \in V_3$, то $p_i(\overline{a'}) \in \{3, 3'\}$. Поскольку $p_i(\overline{a}) = 3'$ и пути из неориентированных рёбер из $3'$ в 3 длины $l \leq \lfloor \frac{|V_3|}{2} \rfloor$ не существует, то $p_i(\overline{a'}) = 3'$. А так как $|V_3| > 1$, то это значит, что $p_i(\overline{v_4}) \in V_4$ и, значит, $p_i(\overline{v_1}) \in V_5$. Получили, что p_i принимает значения из всех неориентированных компонент кроме, может быть, V_2. Значит, по Утверждению 13 эта функция сюръективна.

Теперь, пусть $|V_3| = |V_4| = 1$, тогда положим $V_3 = \{3\}$ и $V_4 = \{4\}$. В этом случае в $\mathcal{C}$ есть рёбра $2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5$. Пусть $|V_5| > 1$ (случай $|V_2| > 1$ разбирается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\overline{a} \in V_{in}^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 4$. Можно выбрать векторы $\overline{b} \in \{1, 1'\}^3$, $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π с тремя ориентированными рёбрами следующего вида:

$$\Pi : \overline{b} \rightarrow \overline{v_1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{a}.$$

Заметим, что так как путь до $\overline{v_3}$ содержит ровно два ориентированных ребра, $p_i(\overline{b}) \in V_1$ и есть ребро $\overline{v_3} \rightarrow \overline{a}$, то $p_i(\overline{v_3}) \in V_3 \cup V_5$. Но если $p_i(\overline{v_3}) \in V_5$, то по построению Π имеем $p_i(\overline{v_2}) \in V_0$. Но тогда из существования рёбер $\overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \rightarrow \overline{a}$ следует $|V_5| = 1$ – противоречие. Значит, $p_i(\overline{v_3}) \in V_3$. А это значит, что $p_i(\overline{v_2}) \in V_2$, и p_i принимает значения из пяти неориентированных компонент $V_0, V_1, \ldots, V_4$. Значит, p_i сюръективная.

Наконец, пусть все компоненты V_2, V_3, V_4, V_5 содержат по одной вершине, тогда положим $V_2 = \{2\}$, $V_5 = \{5\}$. В этом случае $|V_0| > 1$ или $|V_1| > 1$. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). Возьмём $i \in \{1, \ldots, k\}$, вектор $\overline{a} \in V_{in}^3$ такие, что $p_i(\overline{a}) = 4$. Можно выбрать вектор $\overline{a'} \in \{0, 2, 4\}^3$, лежащий в одной неориентированной компоненте с $\overline{a}$, для него по Утверждению 1 верно $p_i(\overline{a'}) = 4$. Также можно выбрать векторы $\overline{v_1} \in \{1, 1'\}^3$, $\overline{v_2}, \overline{v_3} \in V^3$ такие, что существует ориентированный путь Π, в котором все рёбра ориентированные, следующего вида:

$$\overline{v_1} \to \overline{v_2} \leftarrow \overline{v_3} \to \overline{a'}.$$

Поскольку $p_i(\overline{v_1}) \in V_1$, $p_i(\overline{a'}) \in V_4$, то образы элементов Π принимают на p_i все значения из V_0 и 5 или 2 и 3. Но поскольку $|V_0| > 1$, то любой путь, проходящий через все элементы из V_0 и 5 имел бы длину не меньше четырёх. Значит, p_i принимает значения $2, 3$. Получили, что p_i принимает значения из пяти различных неориентированных компонент $V_0, \ldots, V_4$, откуда p_i – сюръективная функция. □

Из Утверждений 2, 15 и Теоремы 3 следует:

Утверждение 16. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа E. Тогда* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

Наконец, Следствие 1 и Утверждения 5, 7, 9, 11 и 16 доказывают Теорему 1, сформулированную в разделе 1.1:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл, содержащий больше трёх вершин и не изоморфный $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ или $\mathcal{C}_6$. Тогда задача* Surj-Hom($\mathcal{C}$) *является* NP-*трудной.*

3.3. Циклы без свойства наследования сюръективности

В этом разделе мы рассмотрим смешанно-ориентированные рефлексивные циклы, для которых не известна сложность задачи Surj-Hom. К ним относятся циклы типа A длины $n \in \{4, 5, 6\}$ (см. Рис. 12). Эти циклы не обладают остовными циклами, поэтому Следствие 1 к ним не применимо. Мы явно продемонстрируем, что подобные циклы не обладают свойством наследования сюръективности в слабой форме (что покажет, что Теорема 3 к ним также неприменима).

Утверждение 17. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 4 вершины. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.*

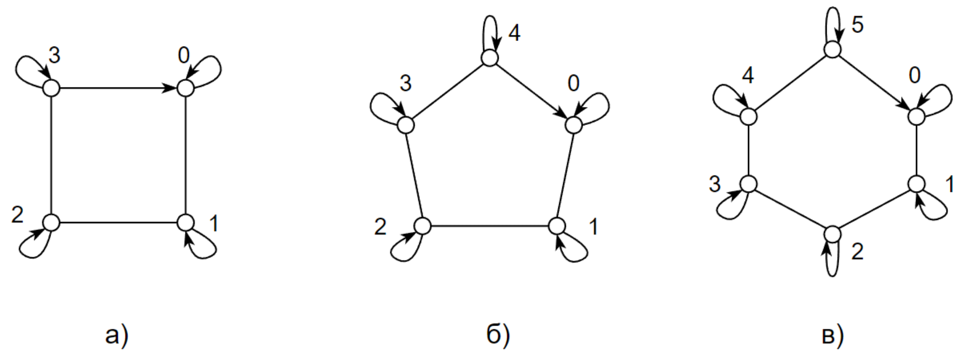

Рис. 12. Циклы типа A длины $n = 4, 5, 6$

Доказательство. Рассмотрим трёхместные функции p_1, p_2, устроенные следующим образом:

$$p_1(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y, z) = (0, 3, 2), \\ 2, & \text{если } (x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$
$$p_2(x, y, z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x, y, z) = (1, 2, 3), \\ 1, & \text{если } (x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (3, 3, 3)\}, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, совместно сюръективны и диагонально согласованы. Покажем, что они также имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки свойства имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

где $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$ и для любых $h, l \in \{1, 2, 3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^l)$. Пусть вектор $\overline{a}$ диагональный (случай диагональности вектора $\overline{b}$ рассматривается аналогично). Обозначим $\overline{a} = (a, a, a)$. Поскольку p_i и p_j совпадают на диагонали, то ограничение $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$ равносильно $\mathcal{C}(p_j(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$, где для каждого $h \in \{1, 2, 3\}$ верно $\mathcal{C}(p_j(a, b^h))$. А это ограничение выполняется, поскольку p_j – полиморфизм.

Итак, пусть ни один из векторов $\overline{a}, \overline{b}$ не диагональный. Если элементы $\overline{a}$ принимают три разных значения, то существует ровно одно b такое, что выполняется $\mathcal{C}(a^i, b), i \in \{1, 2, 3\}$, то есть $\overline{b}$ диагональный. Аналогично, если $\overline{b}$ содержит три разных элемента, то $\overline{a}$ диагональный. Если же $\overline{a}$ и $\overline{b}$ принимают не более двух разных значений, то по построению $p(\overline{a}), p(\overline{b}) \in \{1, 2\}$, откуда $\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}))$ выполняется.

Итак, мы предъявили набор из двух функций, которые удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, но ни одна из них не является сюръективной, откуда $\mathcal{C}$ не обладает этим свойством. $\square$

Утверждение 18. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 5 вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.*

Доказательство. Рассмотрим трёхместные функции p_1, p_2, устроенные следующим образом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{если} (x,y,z) = (0,1,3), \\ 1, & \text{если } (x,y,z) \neq (0,1,3) \text{ и есть ребро} \\ & \qquad\qquad \text{между } (x,y,z) \text{ и } (0,1,3), \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 4, & \text{если} (x,y,z) = (0,2,4), \\ 3, & \text{если } (x,y,z) \neq (0,2,4) \text{ и есть ребро} \\ & \qquad\qquad \text{между } (x,y,z) \text{ и } (0,2,4), \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что p_1 и p_2 принимают на диагонали только значение 2. Несложно заметить, что эти функции являются полиморфизмами $\mathcal{C}$, совместно сюръективны и диагонально согласованы. Покажем, что они имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки свойства имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

где $i, j \in \{1,2\}, i \neq j$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_5^3$. Аналогично случаю из предыдущего утверждения, достаточно рассмотреть случаи, когда векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ содержат ровно по два разных элемента. Заметим, что в этом случае из того, что для любых $h, l \in \{1,2,3\}$ выполняется условие $\mathcal{C}(a^h, b^l)$, следует, что $\{a^1, a^2, a^3\} = \{b^1, b^2, b^3\}$. По построению функций p_1 и p_2 выбранное условие может не выполняться только в том случае, если $\{p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})\} = \{1,3\}$. Без ограничения общности положим $i = 1, j = 2$ и $p_1(\overline{a}) = 1, p_2(\overline{b}) = 3$. Так как $\overline{a}$ содержит ровно два разных элемента и существует ребро между $\overline{a}$ и $(0,1,3)$, то $\overline{a} \in \{1,2\}^3$ или $\overline{a} \in \{0,4\}^3$. Аналогично, $\overline{b} \in \{0,1\}^3$ или $\overline{b} \in \{3,4\}^3$. Иными словами, если $\{p(\overline{a}), p(\overline{b})\} = \{1,3\}$, то $\{a^1, a^2, a^3\} \neq \{b^1, b^2, b^3\}$. Значит, ограничение из определения имитирования проекций выполняется, то есть функции p_1 и p_2 удовлетворяют условиям наследования сюръективности в слабой форме, но ни одна из них не является сюръективной. $\square$

Утверждение 19. *Пусть $\mathcal{C}$ – смешанно-ориентированный рефлексивный цикл типа A, содержащий 6 вершин. Тогда полиморфизмы $\mathcal{C}$ не наследуют сюръективность в слабой форме.*

Доказательство. Рассмотрим трёхместные функции p_1, p_2, устроенные следующим образом:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y,z) = (0,4,2), \\ 1, & \text{если } (x,y,z) \neq (0,4,2) \text{ и есть ребро} \\ & \qquad\qquad \text{между } (x,y,z) \text{ и } (0,4,2), \\ 3, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)\}, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 5, & \text{если } (x,y,z) = (1,3,5), \\ 4, & \text{если } (x,y,z) \neq (1,3,5) \text{ и есть ребро} \\ & \qquad\qquad \text{между } (x,y,z) \text{ и } (1,3,5), \\ 2, & \text{если } (x,y,z) \in \{(0,0,0),(2,2,2),(4,4,4)\}, \\ 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что любой ориентированный путь между $(0,4,2)$ и любым набором из $\{(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)\}$ будет иметь длину $l \geq 3$ и p_1 – полиморфизм $\mathcal{C}$. Аналогично, p_2 – также полиморфизм $\mathcal{C}$. Эти функции совместно сюръективны и диагонально согласованы. Покажем, что они имитируют проекции.

Возьмём произвольное ограничение из формулировки свойства имитирования проекций. Оно будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{C}(p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b})),$$

$i, j \in \{1,2\}, i \neq j$ и $\overline{a}, \overline{b} \in Z_6^3$. Аналогично случаю из Утверждения 16, достаточно рассмотреть векторы $\overline{a}, \overline{b}$, которые содержат ровно по два разных элемента. Заметим, что так как для любых $h, l \in \{1,2,3\}$ верно $\mathcal{C}(a^h, b^l)$, то все a^1, a^2, a^3 и b^1, b^2, b^3 смежные между собой. Также заметим, что по построению p_1 и p_2 если $p_1(\overline{v}) \in \{0,1\}$ или $p_2(\overline{v}) \in \{5,4\}$, то среди v^1, v^2, v^3 всегда найдутся несмежные вершины. Значит, $p_i(\overline{a}), p_j(\overline{b}) \in \{2,3\}$ и это ограничение выполняется. Отсюда, функции p_1 и p_2 удовлетворяют всем трём условиям, но ни одна из них не является сюръективной. □

Таким образом, данные циклы не обладают свойством наследования сюръективности в слабой форме. Заметим, что это не значит, что задача Surj-Hom для них решается за полиномиальное время: так, неориентированный рефлексивный цикл $\mathcal{C}_4$ длины 4 тоже не обладает этим свойством, но для него задача является NP-трудной [2]. Тем не менее, для анализа сложности задачи для этих циклов требуются новые инструменты, не описанные в этой статье.

The complexity of the graph homomorphism problem on mixed reflexive cycles

Korchagin N.P.

The surjective graph homomorphism problem Surj-Hom($\mathcal{H}$) is a problem of deciding whether a given graph allows vertex-surjective homomorphism to a fixed graph $\mathcal{H}$. In this paper we study the Surj-Hom problem for cyclic graphs which are obtained from undirected cycles by assigning direction to some edges and in which each vertex contains a loop.

We explore the Surj-Hom problem in its conjunction with the surjective constraint satisfaction problem SCSP. We define a property which allows to obtain the complexity of the SCSP problem for some predicates via reduction. We implement this property to determine the complexity of the Surj-Hom problem for all desired cycles except for three cycles with 4, 5 and 6 vertices.

Keywords: surjective graph homomorphism, computational complexity, constraint satisfaction, polymorphism

References

[1] Feder T. and Hell P., "List Homomorphisms to Reflexive Graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **72**:2 (1998), 236-250.

[2] Martin B. and Paulusma D., "The computational complexity of disconnected cut and 2K2-partition", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **111** (2015), 17-37.

[3] Vikas N., "Computational complexity of compaction to irreflexive cycles", *Journal of Computer and System Sciences*, **68**:3 (2004), 473-496.

[4] Hell P. and Nesetril J., *Graphs and Homomorphisms*, Oxford University Press, 2004.

[5] Bodirsky M. and Kara J. and Martin B., "The Complexity of Surjective Homomorphism Problems – a Survey", *Computing Research Repository - CORR*, **160**:12 (2011), 1680-1690.

[6] Focke J. and Goldberg L. and Živný S., "The Complexity of Counting Surjective Homomorphisms and Compactions", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **33**:2 (2019), 1006-1043.

[7] Golovach P.A. and Johnson M. and Martin B. and Paulusma D. and Stewart A., “Surjective H-colouring : new hardness results.”, *Computability.*, **8**:1 (2019), 27-42.

[8] Golovach P. A. and Paulusma D. and Song J., “Computing vertex-surjective homomorphisms to partially reflexive trees”, *Theoretical Computer Science*, **457** (2012), 86-100.

[9] Larose, B. and Martin, B. and Paulusma, D., “Surjective H-Colouring over Reflexive Digraphs”, *ACM Trans. Comput. Theory*, **11**:1 (2018).

[10] Korchagin N. P., “Complexity of surjective homomorphism problem to reflexive cycles”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **27**:4 (2023), 40–61 (In Russian).

[11] Feder T. and Vardi M. Y., “The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory”, *SIAM Journal on Computing*, **28**:1 (1998), 57-104.

[12] Zhuk D., “A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture”, *J. ACM*, **67**:5 (2020).

[13] Bulatov A., “A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs”, *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2017, 319-330.

[14] Chen H., “An algebraic hardness criterion for surjective constraint satisfaction”, *Algebra universalis*, **72** (2014), 393-401.

[15] Zhuk D., “No-Rainbow Problem and the Surjective Constraint Satisfaction Problem”, *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2021, 1-7.

[16] Korchagin N. P., “The complexity of the graph homomorphism problem on directed reflexive cycles”, *Discrete Mathematics and Applications*, **37**:4 (2025), 54–88 (In Russian).

[17] Larivière I. and Larose B. and Pullas D., “Surjective polymorphisms of directed reflexive cycles”, *Algebra universalis*, **85** (2023).

[18] Bulatov A. and Jeavons P. and Krokhin A., “Classifying the Complexity of Constraints Using Finite Algebras”, *SIAM Journal on Computing*, **34**:3 (2005), 720-742.