

Применение отрицания к сильно связным автоматам

Д. О. Маслеников¹

Вводится понятие результата применения к инициальному автомату функции f , заданной на его выходном алфавите, как минимизированный инициальный автомат, реализующий определённую ограниченно-детерминированную функцию. Найдено достаточное условие его сильной связности.

Также введено понятия остова — неинициального автомата без выходной функции — и результата применения функции к нему, как неинициальный аналог предыдущего определения. Рассмотрены результаты применения отрицания к остовам определённого вида.

Для результата применения отрицания к сильно связному автомату с входным и выходным алфавитами $\{0, 1\}$ получены верхняя и нижняя оценки числа состояний, для чего было рассмотрено обобщение понятия пространства циклов на ориентированные графы. **Ключевые слова:** конечный инициальный автомат, самомодифицирующийся конечный автомат, диаграмма Мура, граф, пространство циклов.

1. Введение

В этой работе рассмотрим модификацию инициального детерминированного конечного автомата: взяв за основание определение из [1] изменим алгоритм его так, чтобы на каждом такте выходной символ на диаграмме заменяется на другой в соответствии с некоторой функцией.

Различные модели автомата, которые при переходе могут менять функцию выхода, рассматривались и ранее. Наиболее схожая предложена Костером и Тейчем в [2]. Однако, в ней допускается также переписывание и функции переходов, а сами изменения определяются извне.

2. Определения и основные результаты

2.1. Применение функции к автомату

Определим точнее модификацию автомата, предложенную во введении. Пусть автомат $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$, $f : B \rightarrow B$. Начиная работу с

¹Маслеников Денис Олегович — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: denismaslenikov01@mail.ru.

Maslenikov Denis Olegovich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

состояния q_0 , каждый такт проводятся следующие действия: как и в обычном автомате на вход поступает символ $a \in A$, совершается переход в новое состояние в соответствии с функцией ϕ и выводится символ $b \in B$ в соответствии с функцией ψ , а также изменяется диаграмма — символ b на совершённом переходе меняется на символ $f(b)$. Можем рассматривать данную конструкцию, которую назовём *результатом применения функции f к автомату V* , как словарную функцию — слову над алфавитом A из n символов сопоставляем слово над алфавитом B той же длины, которое будет выведено через n тактов.

Формализуем данное определение.

Обозначим $\Psi_{A,Q,B} = \{\psi : Q \times A \rightarrow B\}$ — множество функций вывода.

Пусть автомат $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$, $f : B \rightarrow B$, тогда *результатом применения функции f к автомату V* называется словарная функция ω такая, что

$$\begin{aligned}\omega_t(x_1 \dots x_t \dots) &= \chi(t)(q(t), x_t); \\ \chi : \mathbb{N} &\rightarrow \Psi_{A,Q,B}; \\ \chi(1) &= \psi; \\ \chi(t+1)(q, x) &= \begin{cases} f(\chi(t)(q, x)), & \text{если } q = q(t), x = x_t, \\ \chi(t)(q, x), & \text{иначе;} \end{cases} \\ q(t+1) &= \phi(q(t), x_t), \\ q(1) &= q_0.\end{aligned}$$

По аналогии с тем, как в работе [1, с. 60] определяли изоморфизм между неинициальными автоматами называем изоморфизмом между инициальными автоматами $(A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$ и $(A, Q', B, \phi', \psi', q'_0)$ биекцию $\xi : Q \rightarrow Q'$ такую, что $\phi'(\xi(q), x) = \xi(\phi(q, x))$, $\psi'(\xi(q), x) = \psi(q, x)$ и $q'_0 = \xi(q_0)$.

Утверждение 1. *Если V и V' изоморфны и $f : B \rightarrow B$, то результат применения f к ним совпадает.*

Доказательство. Пусть ξ — изоморфизм между V и V' , тогда по индукции $q'(t) = \xi(q(t))$:

$$q'(1) = q'_0 = \xi(q_0) = \xi(q(1)),$$

$$q'(t+1) = \phi'(q'(t), x_t) = \phi'(\xi(q(t)), x_t) = \xi(\phi(q(t), x_t)) = \xi(q(t+1)).$$

И так же по индукции $\chi'(t)(\xi(q), x) = \chi(t)(q, x)$:

$$\chi'(1)(\xi(q), x) = \psi'(\xi(q), x) = \psi(q, x) = \chi(1)(q, x).$$

$$\begin{aligned}
\chi'(t+1)(\xi(q), x) &= \begin{cases} f(\chi'(t)(\xi(q), x)), & \text{если } \xi(q) = q'(t) = \xi(q(t)), x = x_t, \\ \chi'(t)(\xi(q), x), & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(\chi(t)(q, x)), & \text{если } q = q(t), x = x_t, \\ \chi(t)(q, x), & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \chi(t+1)(q, x).
\end{aligned}$$

Получаем $\omega'_t(x_1 \dots x_t \dots) = \chi'(t)(q'(t), x_t) = \chi'(t)(\xi(q(t)), x_t) = \chi(t)(q(t), x_t) = \omega_t(x_1 \dots x_t \dots)$ ■

Теорема 1. *Результат применения функции f к автомату $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$ является ограниченно-детерминированной функцией, имеющей не более чем $n|B|^{n|A|}$ остаточных функций, где $n = |Q|$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для данную функцию можно задать автоматом, состояния которого — пары из $Q \times \Psi_{A,Q,B}$.

Зададим его явно — $\tilde{V}_f = (A, Q \times \Psi_{A,Q,B}, B, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, (q_0, \psi))$, где

$$\tilde{\phi}((q, \psi'), x) = (\phi(q, x), \psi''(q, \psi', x));$$

$$\psi''(q, \psi', x)(q', x') = \begin{cases} f(\psi'(q', x')), & \text{если } q' = q, x' = x \\ \psi'(q', x'), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}((q, \psi'), x) = \psi'(q, x).$$

Проверим, что этот автомат реализует требуемую функцию. Для начала заметим, что

$$\begin{aligned}
\psi''(q(t), \chi(t), x_t)(q', x') &= \begin{cases} f(\chi(t)(q', x')), & \text{если } q' = q(t), x' = x_t \\ \chi(t)(q', x'), & \text{иначе.} \end{cases} \\
&= \chi(t+1)(q', x').
\end{aligned}$$

По индукции $\tilde{\phi}((q_0, \psi), x_1 \dots x_t) = (q(t+1), \chi(t+1))$.

Действительно, $\tilde{\phi}((q_0, \psi), \Lambda) = (q_0, \psi) = (q(1), \chi(1))$ и

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}((q_0, \psi), x_1 \dots x_t) &= \tilde{\phi}(\tilde{\phi}((q_0, \psi), x_1 \dots x_{t-1}), x_t) = \tilde{\phi}((q(t), \chi(t)), x_t) = \\
&= (\phi(q(t), x_t), \psi''(q(t), \chi(t), x_t)) = (q(t+1), \chi(t+1)).
\end{aligned}$$

Имеем $\tilde{\psi}((q_0, \psi), x_1 \dots x_t) = \tilde{\psi}(\tilde{\phi}((q_0, \psi), x_1 \dots x_{t-1}), x_t) =$

$$\tilde{\psi}((q(t), \chi(t)), x_t) = \chi(t)(q(t), x_t) = \omega_t(x_1 \dots x_t \dots).$$

Таким образом, ω действительно реализуется автоматом $\tilde{V}_f$, имеющим $n|B|^{n|A|}$ состояний. ■

В силу предыдущей теоремы будем далее рассматривать результат применения функции к автомату не как словарную функцию, а как реализующий её конечный автомат приведённого вида. Обозначим его V_f . При этом в доказательствах часто будет удобно рассматривать его, как минимизированный $\tilde{V}_f$.

Пример 1.

$V_{id} = V$.

Пример 2.

Пусть автомат V имеет диаграмму:

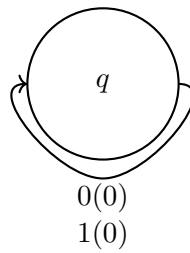


Рис. 1

Тогда состояние автомата $V_{\neg}$ определяется функцией выхода автомата V . Если $\psi(q, 0) = i$, $\psi(q, 1) = j$, то соответствующее состояние $V_{\neg}$ обозначим q_{ij} . Получаем диаграмму:

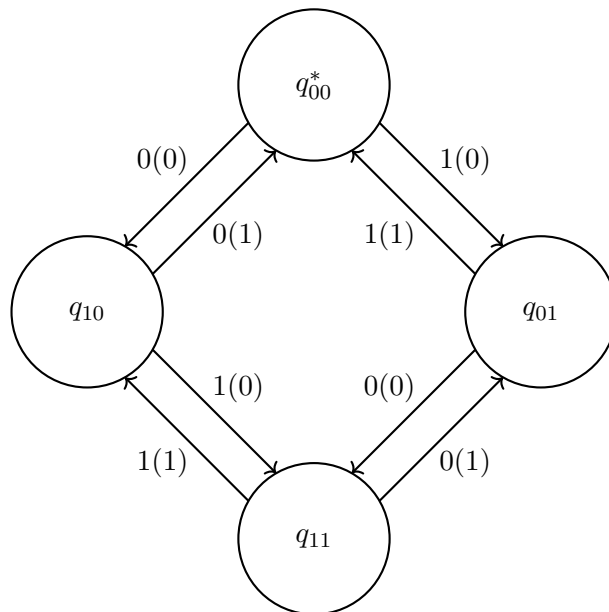


Рис. 2

Теорема 2. Пусть V — сильно связный автомат, f — биекция. Тогда V_f — сильно связный.

Доказательство. Автомат $V_f = (A, Q', B, \phi', \psi', q'_0)$ приведённый, следовательно для любого $q' \in Q'$ существует слово α_1 такое, что $\phi'(q'_0, \alpha_1) = q'$. Поскольку $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$ сильно связный, существует слово

α_2 такое, что $q_0 = \phi(\phi(q_0, \alpha_1), \alpha_2) = \phi(q_0, \alpha_1 \alpha_2)$. При получении на вход $(\alpha_1 \alpha_2)^n$ по каждому переходу автомат V перейдёт кратное n число раз, так как $q(t)$ и x_t тогда имеют период (необязательно минимальный) $|\alpha_1 \alpha_2|$. Поскольку f — биекция, найдётся такое n такое, что $f^n = id$. Тогда $\chi(1 + n|\alpha_1 \alpha_2|) = \chi(1) = \psi$. Заметим также, что $q(1 + n|\alpha_1 \alpha_2|) = \phi(q_0, (\alpha_1 \alpha_2)^n) = q_0$. Применив это наблюдение к $\tilde{V}_f$, получаем, что слово $(\alpha_1 \alpha_2)^n$ возвращает его в начальное состояние, а поскольку V_f — его минимизация, это верно и для него. Получаем $q'_0 = \phi'(q'_0, (\alpha_1 \alpha_2)^n) = \phi'(\phi'(q'_0, \alpha_1), \alpha_2(\alpha_1 \alpha_2)^{n-1}) = \phi'(q', \alpha_2(\alpha_1 \alpha_2)^{n-1})$. Пусть $p' \in Q'$ — произвольное. Возьмём α_3 такое, что $\phi'(q'_0, \alpha_3) = p'$. Тогда $\phi'(q', \alpha_2(\alpha_1 \alpha_2)^{n-1} \alpha_3) = \phi(q'_0, \alpha_3) = p'$, что означает сильную связность V_f . ■

2.2. Применение функции к остову

Теперь введём неинициальный аналог результата применения функции к автомату. Поскольку функция вывода V влияет только на начальное состояние V_f , предполагаемый аналог не зависит от неё вовсе, поэтому вместо автомата будем использовать понятие, которое её не содержит.

Итак, назовём *остовом автомата* $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q)$ или просто *остовом* четвёрку $\mathcal{V} = (A, Q, B, \phi)$. (Название никак не связано с остовным деревом графа.) Множество автоматов с остовом $\mathcal{V}$ обозначим $[\mathcal{V}]$. Диаграмму остова можно определить аналогично диаграмме автомата, но без выходных символов и начального состояния. Сильная связность для остова определяется так же, как и для автомата. (Автомат сильно связный тогда и только тогда, когда сильно связан его остов.)

Пусть $\mathcal{V} = (A, Q, B, \phi)$, $f : B \rightarrow B$. Тогда назовём *результатом применения функции f к остову $\mathcal{V}$* автомат приведённого вида $\mathcal{V}_f$ неотличимый от автомата $\tilde{V}_f = (A, Q \times \Psi_{A, Q, B}, B, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, где

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}((q, \psi'), x) &= (\phi(q, x), \psi''(q, \psi', x)); \\ \psi''(q, \psi', x)(q', x') &= \begin{cases} f(\psi'(q', x')), & \text{если } q' = q, x' = x \\ \psi'(q', x'), & \text{иначе.} \end{cases} \\ \tilde{\psi}((q, \psi'), x) &= \psi'(q, x).\end{aligned}$$

Пусть V — инициальный автомат. Тогда обозначим соответствующий ему неинициальный, как $\tilde{V}$.

В [1, с. 22] сумма неинициальных автоматов $V = (A, Q, B, \phi, \psi)$ и $W = (A, Q', B, \phi', \psi')$, $Q \cap Q' = \emptyset$ определялась, как $V + W = (A, Q \cup Q', B, \phi'', \psi'')$, где $\phi''(q, a) = \phi(q, a)$, $\psi''(q, a) = \psi(q, a)$ при $q \in Q$ и $\phi''(q, a) = \phi'(q, a)$, $\psi''(q, a) = \psi'(q, a)$ при $q \in Q'$.

Определим сумму инициальных автоматов V и W , как неинициальный:

$$V + W = \bar{V} + \bar{W}.$$

Сумму нескольких автоматов обозначаем стандартно символом $\sum$.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{V} = (A, Q, B, \phi)$ — остов, $f : B \rightarrow B$. Тогда $\mathcal{V}_f$ неотличим от $\sum_{V \in [\mathcal{V}]} V_f$.

Здесь нужно заметить, что V_f единственный с точностью до изоморфизма, поэтому в сумме можем взять автоматы такими, чтобы алфавиты состояний не пересекались и сумма была определена корректно.

Доказательство. Достаточно показать неотличимость $\tilde{\mathcal{V}}_f$ от $\sum_{V \in [\mathcal{V}]} V_f$.

Состояние (q, ψ) автомата $\tilde{\mathcal{V}}_f$ неотлично от начального состояния $\tilde{V}_f$, а значит и начального состояния V_f , где $V = (A, Q, B, \phi, \psi, q) \in [\mathcal{V}]$.

Пусть q' — состояние автомата V_f . Из приведённости следует существование слова α переводящего автомат из начального состояния в q' . Как было сказано выше, начальное состояние неотлично от состояния (q, ψ) автомата $\tilde{\mathcal{V}}_f$. Значит, $\tilde{\phi}((q, \psi), \alpha)$ неотлично от q' . ■

Теорема 3. Пусть $\mathcal{V}$ сильно связный и f — биекция. Тогда $\mathcal{V}_f$ равен (с точностью до изоморфизма) сумме отличимых автоматов из множества $\{\tilde{V}_f | V \in [\mathcal{V}]\}$.

Доказательство. Заметим, что эта сумма отличается от суммы из утверждения 2 тем, что из неё исключены неотличимые от оставшихся автоматы, а с ними и неотличимые состояния. Следовательно, эти суммы неотличимы.

Осталось показать, что это автомат приведённого вида, то есть, что были удалены все неотличимые состояния. Предположим, что имеется пара неотличимых состояний. Поскольку все автоматы в сумме приведённого вида, то они могут лежать только в разных автоматах из суммы. При этом они сильно связны по теореме 2. Очевидно, что наличие неотличимых состояний в двух сильно связных автоматах влечёт неотличимость самих автоматов, что противоречит условию. ■

Очевидно, что если автомат представляется, как сумма сильно связных, то только единственным образом. Эти слагаемые будем называть компонентами (сильной) связности.

Рассмотрим два примера, в которых функция отрицания $\neg$ применяется к сильно связному остову $\mathcal{V}$. Найдём количество и размер компонент связности в $\mathcal{V}_{\neg}$.

Утверждение 3. Пусть остов $\mathcal{V}$ имеет диаграмму:

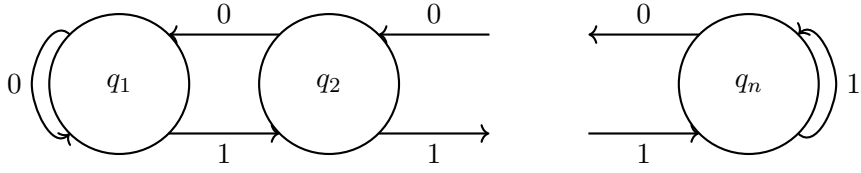


Рис. 3

Тогда $\mathcal{V}_\neg$ состоит из 2^{n-1} компонент связности по $n2^{n+1}$ состояния в каждой.

Доказательство. Убедимся, что $\tilde{\mathcal{V}}_\neg$ в данном случае приведённый. Возьмём состояния (q_1, ψ_1) и (q_2, ψ_2) . Если $\psi_1 \neq \psi_2$, то $\psi_1(q_i, 0) \neq \psi_2(q_i, 0)$, или $\psi_1(q_i, 1) \neq \psi_2(q_i, 1)$. В первом случае различающим словом будет $1^{n-1}0^{n+1-i}$, а во втором — $0^{n-1}1^i$. (Это несложно проверить, подав нужное слово соответствующим автоматам из $[\mathcal{V}]$ и проследив их работу по алгоритму.) Если $\psi_1 = \psi_2$, а $q_1 \neq q_2$, то $\psi''(q_1, \psi_1, 0)(q_1, 0) = \psi_1(q_1, 0) \neq \psi_2(q_1, 0) = \psi''(q_2, \psi_2, 0)(q_1, 0)$. То есть, $\tilde{\phi}((q_1, \psi_1), 0)$ и $\tilde{\phi}((q_2, \psi_2), 0)$ отличимы по доказанному выше, а значит отличимы и (q_1, ψ_1) и (q_2, ψ_2) . Имеем, что $\mathcal{V}_\neg = \tilde{\mathcal{V}}_\neg$.

В силу того, что $\mathcal{V}_\neg$ — сумма сильно связанных автоматов, из возможности перейти из одного состояния в другое состояния следует возможность вернуться из второго в первое, поэтому при исследовании на достижимость мы можем пренебречь направлением переходов на диаграмме $\mathcal{V}$ и перейти к аналогичному неориентированному графу с выделенной вершиной:

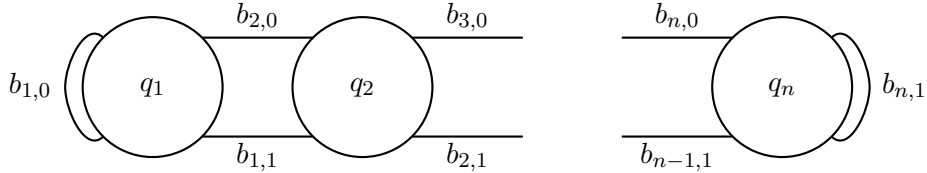


Рис. 4

Заметим, что можем всегда перейти к графу, который отличается только боковой петлёй:

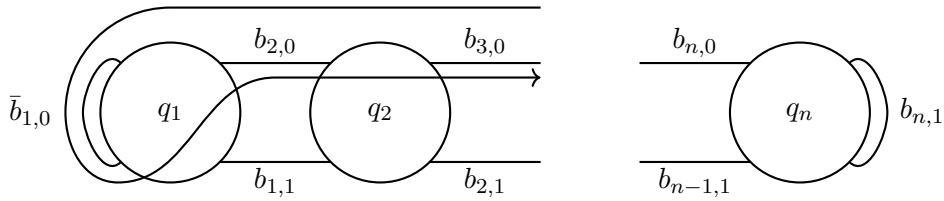


Рис. 5

Аналогично всегда можно изменить парные рёбра, не меняя другие:

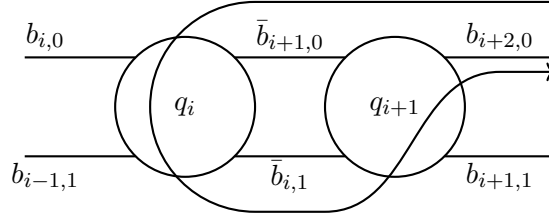


Рис. 6

Заметим, что при переходе из вершины в вершину по такому же закону меняется и сумма выходных символов парных рёбер по модулю 2. Пользуясь этими наблюдениями, можно перейти к графу без петель и кратных рёбер:

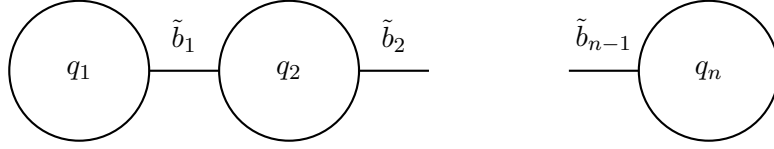


Рис. 7

Здесь $\tilde{b}_i = b_{i,1} + b_{i+1,0} \pmod{2}$. Таким образом, полные графы с Рис. 4 разбиваются на классы по соответствию упрощённому графу с Рис. 7. При этом действие перехода из вершины в вершину на полном графе соответствует аналогичному на упрощённом, и все графы из одного класса взаимодостижимы. То есть, два полных графа взаимодостижимы тогда и только тогда, когда взаимодостижимы соответствующие упрощённые графы. Легко увидеть, что в каждом классе 2^{n+1} граф.

Заметим, что упрощённый граф можно перевести в граф с произвольным выделенным состоянием и при том единственный. В каждой компоненте достижимости можно выбрать каноничный граф с выделенным состоянием q_1 . Таким образом, имеем в каждой компоненте n графов, и всего 2^{n-1} компонент, по количеству графов с выделенным состоянием q_1 .

Имеем 2^{n-1} компоненты связности автомата $\mathcal{V}_-$ по $n2^{n+1}$ состояния в каждом. ■

Пользуясь теоремой 3, мы можем переформулировать утверждение 3:

Следствие 1. Если $\mathcal{V}$, как в утверждении 3, то в множестве $\{\bar{V}_- | V \in [\mathcal{V}]\}$ 2^{n-1} отличимых автомата и все автоматы в нём имеют $n2^{n+1}$ состояния.

Далее используем обозначения: $t \mid n$ — t делит n , и $t \nmid n$ — t не делит n .

Утверждение 4. Пусть остов $\mathcal{V}$ имеет диаграмму:

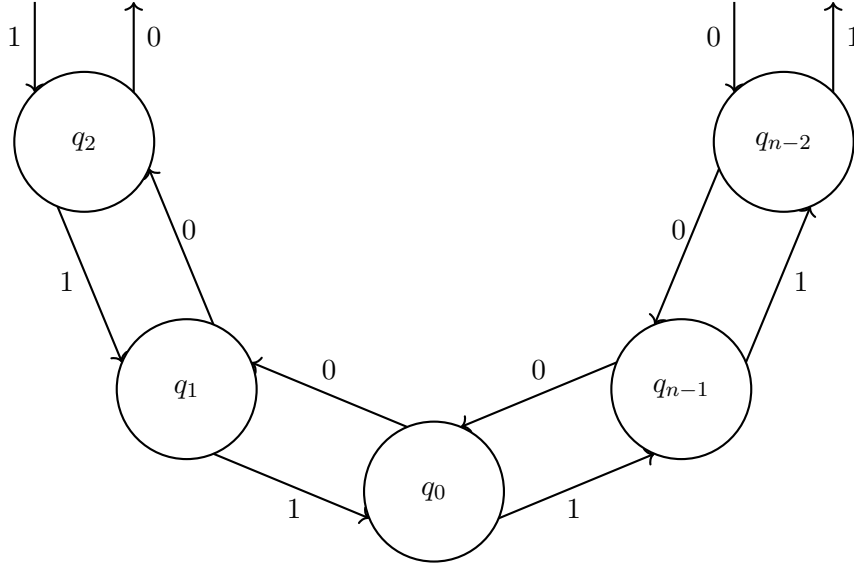


Рис. 8

$n = 2^k m$, $2 \nmid m$. Тогда компоненты связности $\mathcal{V}_\neg$ имеют $2^{n+k+1}d$ состояний, $d \mid m$, и есть ровно $\frac{1}{2^{k+1}d} \sum_{s \mid d} \mu(s) 2^{2^k \frac{d}{s}}$ компоненты соответствующего размера, где μ — функция Мёбиуса.

Доказательство. Каждое состояния $\tilde{\mathcal{V}}_\neg$ неотличимо от начального состояния соответствующего автомата $V_\neg$, $V \in [\mathcal{V}]$. Однако, в $[\mathcal{V}]$ присутствуют изоморфные автоматы с изоморфизмами вида $\xi_j(q_i) = q_{i+j \pmod n}$, $j = \overline{0, n-1}$. По утверждению 1, результаты применения к ним отрицания неотличимы, поэтому из каждого класса изоморфизмов выберем каноничный автомат с начальным состоянием q_0 . Очевидно, что результаты применения к ним отрицания отличимы. Таким образом, можем считать, что $\mathcal{V}_\neg$ имеет состояния вида (q_0, ψ) .

Далее рассуждения аналогичны предыдущему примеру. В силу разбиения на компоненты сильной связности можем перейти к аналогичному неориентированному графу с выделенной вершиной.

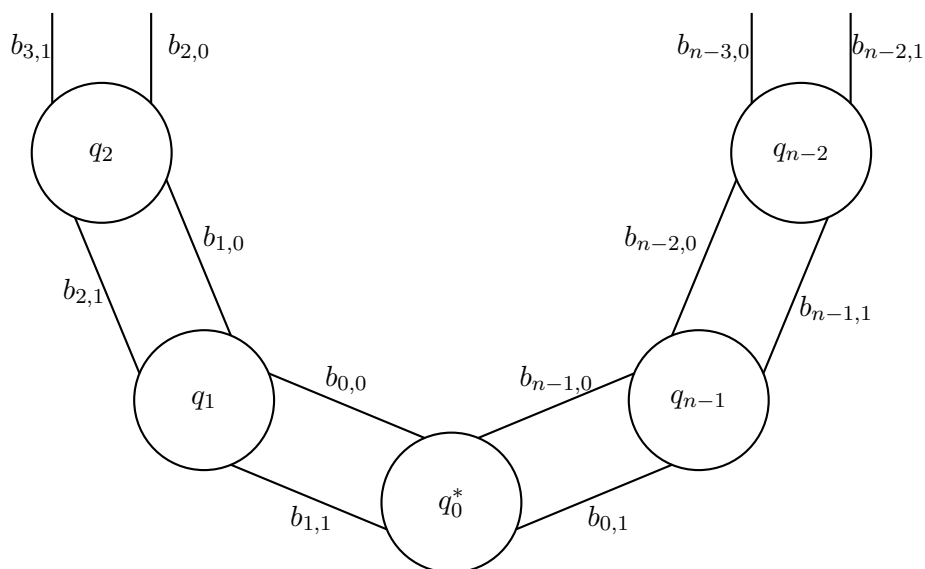


Рис. 9

Заметим, что всегда можем изменить парные рёбра, не меняя другие:

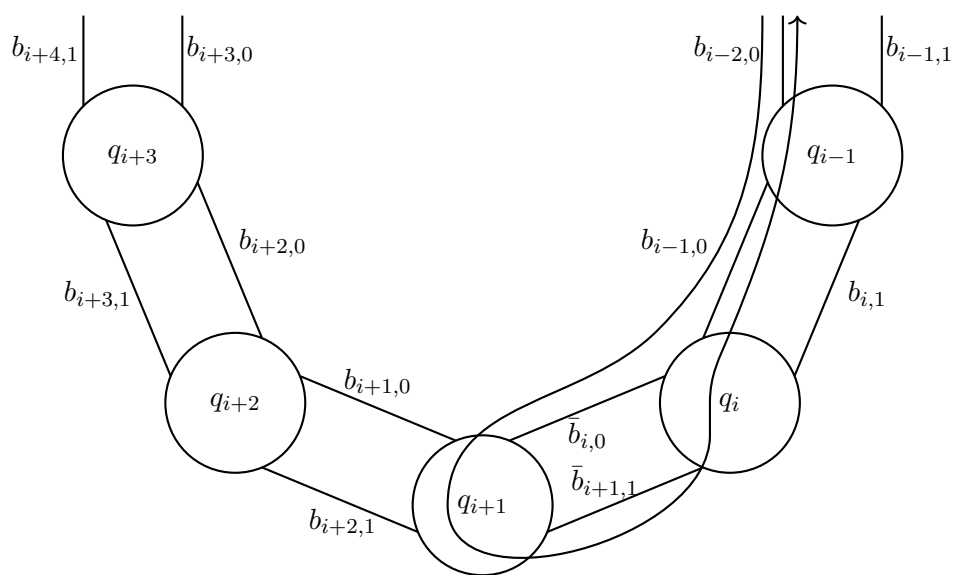


Рис. 10

Переходим к упрощённому графу без петель и кратных рёбер:

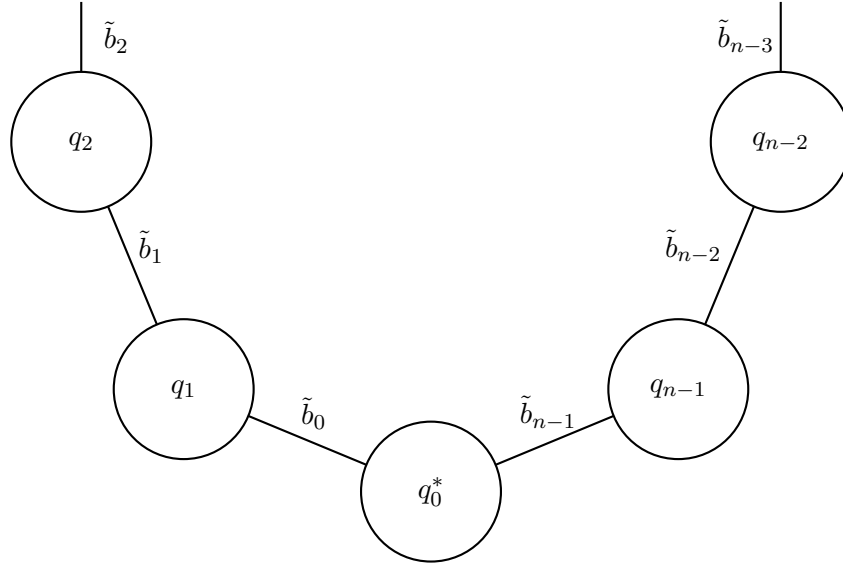


Рис. 11

Здесь $\tilde{b}_i = b_{i,0} + b_{i+1,1} \pmod{2}$. Каждому упрощённому графу соответствует класс из 2^n полных графов, все графы в одном классе взаимодостижимы. В отличие от прошлого случая, в этом мы брали канонический автомат из класса изоморфизма, поэтому операция перехода сопровождается применением изоморфизма $\xi_{\pm 1}$. Заметим, что множество взаимодостижимых графов имеет циклическую структуру, периода $p \mid 2n$. При этом после n переходов в одну сторону получим «противоположный» граф. Следовательно, $p \nmid n$. Таким образом, $p = 2^{k+1}d$, $d \mid m$. Подсчитаем количество графов, которые лежат в множестве периода p (необязательно минимального). Если $p = 2n$, то это все $2^n = 2^{\frac{p}{2}}$. Если $p \neq 2n$, то заметим, что $\tilde{b}_i = \tilde{b}_{i+p} = \dots = \tilde{b}_{i+n-\frac{p}{2}} = \tilde{b}_{i+\frac{p}{2}} = \dots = \tilde{b}_{i+n-p}$, при этом $\tilde{b}_i$ не зависят друг от друга, $i = \overline{0, \frac{p}{2}}$. Имеем $2^{\frac{p}{2}}$ графов. Дальнейшие рассуждения повторяют задачу об ожерельях. ([3, с.9]) Обозначим через $N(p)$ число компонент связности периода (минимального) p . $\sum_{s \mid d} 2^{k+1}s N(2^{k+1}s) = 2^{2^k d}$.

Применим формулу обращения Мёбиуса. (Строго говоря, выражение под суммой и выражение справа должны быть определены на всём $\mathbb{N}$, а не только на делителях m , но можно заметить, что следующее равенство не зависит от того, как они были доопределены.) Получаем $2^{k+1}d N(2^{k+1}d) = \sum_{s \mid d} \mu(s) 2^{2^k \frac{d}{s}}$. Итак, $\mathcal{V}_\neg$ имеет $\frac{1}{2^{k+1}d} \sum_{s \mid d} \mu(s) 2^{2^k \frac{d}{s}}$ компонент связности по $2^{n+k+1}d$ состояния. ■

Пользуясь теоремой 3, мы можем переформулировать утверждение 4:

Следствие 2. Если $\mathcal{V}$, как в утверждении 4, то в множестве $\{\bar{V}_\perp | V \in [\mathcal{V}]\}$ автоматы имеют $2^{n+k+1}d$ состояний, $d \mid m$, и есть ровно $\frac{1}{2^{k+1}d} \sum_{s \mid d} \mu(s) 2^{2^k \frac{d}{s}}$ автомата с соответствующим числом состояний.

2.3. Оценки на число состояний

Воспользуемся понятием пространства циклов и его размерностью. ([4, с. 203, 208-211], [5, с. 23-27]) Пусть G — граф. V_G, E_G — множества его вершин и рёбер соответственно, $c(G)$ — число его компонент связности. Пространство рёбер $W_E(G)$ — множество всех подмножеств E_G . На $W_E(G)$ задана операция:

$$E_1 \oplus E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1).$$

$W_E(G)$ — векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$. Рассматриваем циклы, как множество рёбер, через которые они проходят. Пространство циклов $W_C(G) \subseteq W_E(G)$ — линейная оболочка множества циклов. Размерность $W_C(G)$ — циклический ранг $\beta(G) = |E_G| - |V_G| + c(G)$.

Распространим теорию на ориентированные графы. Пусть G — ориентированный граф. V_G, E_G , и $W_E(G)$ определяем аналогично, $W_C(G)$ определяем так, как если бы граф был неориентирован. $\bar{W}_C(G) \subseteq W_E(G)$ — линейная оболочка контуров (ориентированных циклов).

Теорема 4. Пусть G — ориентированный сильно связный граф. Тогда $\bar{W}_C(G) = W_C(G)$.

Доказательство. $\bar{W}_C(G) \subseteq W_C(G)$, так как порождающее множество $\bar{W}_C(G)$ входит в порождающее множество $W_C(G)$.

Далее в доказательстве мы допускаем самопересечение цикла, как сумму его рёбер. Например, цикл $\{a, b, c, d, e, c\}$ приведённого ниже графа будет равен циклу (неориентированному) $\{a, b, e, d\}$.

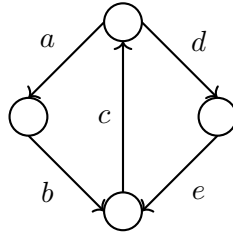


Рис. 12

Заметим, что контур с пересечениями можно разложить в сумму контуров без пересечений: пусть совпадают конечные вершины рёбер e_i и e_j , $i < j$, тогда

$$\{e_1, e_2, \dots, e_1\} = \{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_1\} \oplus \{e_{i+1}, e_{i+1}, \dots, e_j\}.$$

Применяем это разложение, пока не избавимся от пересечений. Так в примере выше $\{a, b, c, d, e, c\} = \{a, b, c\} \oplus \{d, e, c\}$.

В цикле без самопересечений можно выделить участки постоянного направления. Между ними — вершины из которого выходит 2 или 0 рёбер этого цикла. Обозначаем v_i^- и v_i^+ соответственно. Если $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ — последовательность вершин цикла, то $v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+, \dots, v_m^-, v_m^+, v_1^-$ — его подпоследовательность, и в таком случае есть $2m$ участка — по m на каждое направление, которое идёт от v_i^- к v_{i-1}^+ или v_i^+ .

Докажем, что любой цикл без самопересечений лежит в $\bar{W}_C(G)$ индукцией по m . Если $m = 0$, то цикл — контур. Пусть для циклов с не более чем $2m$ участками доказано, что они лежат в $\bar{W}_C(G)$. Рассмотрим цикл E с $2(m+1)$ участком. Возьмём путь без самопересечений $e_1, e_2, \dots, e_l$ от v_i^+ до некоторого v_j , не лежащим между v_i^+ и v_{i+1}^+ такой, чтобы он больше нигде не пересекал цикл, кроме может быть, между v_i^+ и v_{i+1}^+ . (Такой есть в силу сильной связности.) Тогда E можно представить в виде суммы двух циклов — один из них является суммой этого пути и дугой цикла от v_j до v_i^+ , другой — суммой пути и второй дуги от v_j до v_i^+ . Рассмотрим в отдельности один из этих циклов. (Второй полностью аналогично.) Если путь $e_1, e_2, \dots, e_l$ не пересекает дугу от v_j до v_i^+ , то это цикл без самопересечений. Легко видеть, что его число участков меньше, чем у исходного, так путь будет продолжением участка смежного с v_i^+ , а значит не породит новый при том, что как минимум второй смежный с v_i^+ участок в этот цикл не войдёт. Если же путь пересекает дугу, то, как мы условились при его выборе, он может пересекать его только на участке смежном с v_i^+ . Пусть v_k — последнее пересечение. Разложим цикл в сумму двух слагаемых. Первое — сумма пути от v_k до v_j и дуги от v_j до v_k , по рассуждениям аналогичным тем, что были выше, это будет цикл с меньшим числом участков. Второе — сумма пути от v_i^+ до v_k и дуги от v_i^+ до v_k . Это будет контур, возможно с пересечениями, а как показано выше, его можно разложить в сумму контуров без пересечений. Таким образом, E раскладывается в сумму циклов с не более чем $2m$ участками, а по предположению индукции они лежат в $\bar{W}_C(G)$. Следовательно, $E \in \bar{W}_C(G)$.

Таким образом, порождающее множество $W_C(G)$ лежит в $\bar{W}_C(G)$, а значит $W_C(G) \subseteq \bar{W}_C(G)$. ■

Обозначим $Q(V)$ множество состояний автомата V .

Теорема 5. Пусть $W(n)$ — множество сильно связных автоматов с n состояниями и $A = B = \{0, 1\}$. Тогда верно, что

$$\max_{V \in W(n)} |Q(V_-)| = n2^{n+1},$$

$$\min_{V \in W(n)} |Q(V_-)| \geq 2^{n+1}.$$

И при нечётных n достигается равенство.

Доказательство. Пусть V — сильно связный автомат с n состояниями. Докажем сначала, что $2^{n+1} \leq |Q(V_-)| \leq n2^{n+1}$. Можем рассматривать диаграмму V , как ориентированный граф, а функцию выходов соотнести с множеством рёбер диаграммы, к которым приписаны единицы. При этом переход по ребру суммирует его с этим множеством.

Заметим, что неориентированный цикл с пересечениями можно разложить в сумму циклов без пересечений аналогично тому, как это делается с контурами с разницей в том, что возможен случай, когда отсутствие пересечений по вершинам не гарантирует отсутствие пересечений по рёбрам — цикл вида $\{e, e\}$, но он равен пустому множеству, как сумма двух одинаковых рёбер.

Пусть q — состояние V . Введём обозначение: $q\Psi$ — множество достижимых состояний $\tilde{V}_-$ вида (q, ψ) . Два произвольных слова, переводят $\tilde{V}_-$ из (q_0, ψ_0) в состояние из $q\Psi$ тогда и только тогда, когда они переводят V из q_0 в q . Сложим пути на диаграмме, соответствующие этим словам, и получим, что разность между двумя функциями — неориентированный цикл. В соответствии с наблюдением выше, его можно представить как сумму циклов без пересечений. То есть, все состояния из $q\Psi$ отличаются друг от друга по второй компоненте на элемент из $W_C(G)$.

$$(\{\psi_1 \oplus \psi_2 | (q, \psi_1), (q, \psi_2) \in q\Psi\} \subseteq W_C(G))$$

Теперь покажем, что мы можем прибавить произвольный контур к фиксированному ψ , $(q, \psi) \in q\Psi$. Выберем на контуре состояние q' . Пусть α — слово, которое нужно подать, что пройти по контуру. В силу сильной связности существуют β_1 и β_2 такие, что $\phi(q, \beta_1) = q'$ и $\phi(q', \beta_2) = q$. Тогда слово $\beta_1\alpha\beta_2\beta_1\beta_2$ суммирует ψ с данным контуром и возвращает автомат в состояние q . ($\bar{W}_C(G) \subseteq \{\psi \oplus \psi_1 | (q, \psi_1) \in q\Psi\}$)

Применяя теорему 4 получаем

$$\begin{aligned} W_C(G) = \bar{W}_C(G) &\subseteq \{\psi \oplus \psi_1 | (q, \psi_1) \in q\Psi\} \subseteq \\ &\subseteq \{\psi_1 \oplus \psi_2 | (q, \psi_1), (q, \psi_2) \in q\Psi\} = W_C(G). \end{aligned}$$

$$\text{Имеем } W_C(G) = \{\psi \oplus \psi_1 | (q, \psi_1) \in q\Psi\}.$$

$$\text{Следовательно, } q\Psi = \{(q, \psi \oplus \psi_1) | \psi_1 \in W_C(G)\}.$$

Итак, $|q\Psi| = |W_C(G)| = 2^{2n-n+1} = 2^{n+1}$. Очевидно, что все состояния из $|q\Psi|$ отличимы. Это даёт нижнюю оценку. Для верхней оценки достаточно домножить это число на число состояний.

Осталось показать, что для любого n существует случай, когда $|Q(V_-)| = n2^{n+1}$, и любого нечётного n случай, когда $|Q(V_-)| = 2^{n+1}$. Для этого достаточно обратиться соответственно к следствию 1 и к следствию 2, взяв $k = 0$ и $d = 1$. ■

3. Заключение и выводы

Было приведено достаточное условие сильной связности результата применения функции к автомату — биективность функции и сильная связность автомата. Были получены оценки на число состояний результата применения в случае выполнения этого условия — оно экспоненциально зависит от числа состояний исходного автомата. Была описана структура двух частных случаев результата применения функции к остову относительно количества и размера компонент связности.

4. Благодарность

Выражаю благодарность своему научному руководителю А. П. Соколову.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, Издательство Московского университета, 2019, 436 pp.
- [2] M. Koster, J. Teich, “(Self-)reconfigurable Finite State Machines: Theory and Implementation”, *Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, 2002, 559–566
- [3] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Second Edition, Cambridge University Press, 1997, 238 pp.
- [4] Gross J. L., Yellen J., Anderson M, *Graph Theory and Its Applications*, Third Edition, Chapman and Hall/CRC, New York, 2018, 591 pp.
- [5] Diestel R., *Graph Theory*, New York, 2005, 422 pp.

Applying negation to strongly connected automata

Maslenikov D.O.

The concept of the result of applying a function f , defined on its output alphabet, to an initial automaton is introduced as a minimized initial automaton implementing a certain boundedly deterministic function. A sufficient condition for its strong connectivity is found.

The concepts of a skeleton — a noninitial automaton without an output function — and the result of applying a function to it, as a noninitial analog of the previous definition, are also introduced. The results of applying negation to skeletons of a certain type are considered.

For the result of applying negation to a strongly connected automaton with input and output alphabets $\{0, 1\}$, upper and lower bounds for the number of states are obtained, for which a generalization of the concept of a cycle space to oriented graphs was considered. *Keywords:* finite automaton, self-modifying finite state machine, Moore diagram, graph, cycle space.

References

- [1] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, Moscow University Press, 2019 (in Russian), 436 pp.
- [2] M. Koster, J. Teich, “(Self-)reconfigurable Finite State Machines: Theory and Implementation”, *Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, 2002, 559–566
- [3] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Second Edition, Cambridge University Press, 1997, 238 pp.
- [4] Gross J. L., Yellen J., Anderson M, *Graph Theory and Its Applications*, Third Edition, Chapman and Hall/CRC, New York, 2018, 591 pp.
- [5] Diestel R., *Graph Theory*, New York, 2005, 422 pp.