

Об алгоритме фильтрации кусочно-постоянных изображений

Г. С. Животников, Ю. П. Пытьев, И. И. Фаломкин

Введение

В настоящей работе рассматривается алгоритм, позволяющий решать некоторые непараметрические задачи анализа изображений и сцен. В качестве примера таких задач выбраны проблемы определения или уточнения морфологических характеристик объектов, видимых на изображении. Более точно, рассматриваются

- а) задача подавления помех на кусочно-постоянном изображении;
- б) задача выделения неизвестного объекта на известном (с точностью до изменений условий регистрации изображения) фоне;
- в) задача определения формы «текстурнозначного» изображения.

Подобные задачи рассмотрены в работах [1, 2, 3, 5, 6].

Применение алгоритма, описанного ниже, возможно, если выполнено следующее предположение относительно изображений, представляемых для анализа: существует (и известно) некоторое свойство, которое *локально постоянно* на изображении. То есть, если в данной точке изображения значение этого свойства может быть описано некоторым числом или вектором, то всюду внутри некоторого подмножества поля зрения, покрывающего данную точку, значение этого свойства описывается тем же числом (вектором). Это условие будет сформулировано более аккуратно в дальнейшем; здесь лишь отметим, что оно весьма общо и при том или ином уточнении выполнено во многих реальных ситуациях. Поясним сказанное на примере. Пусть рассматривается проблема подавления помех на кусочно-постоянном изображении. Если известно, что минимальный размер (площадь) связной области, где неискаженное шумом изображение

имеет постоянную яркость, ограничен снизу, то эта информация может быть использована предлагаемым алгоритмом¹.

Понятно, что критерий качества решения для задач а)–в) совершенно различен. Так, в задаче подавления помех желательно получить изображение, которое в среднем было бы как можно «ближе» к неизвестному невозмущенному изображению — изображению, которое регистрировалось бы на идеальном измерительном приборе (и, вообще говоря, в «идеальной среде»). В задаче обнаружения неизвестного объекта на изображении требуется как можно точнее оценить подмножество поля зрения, на котором виден неизвестный объект. При определении формы «текстурнозначного» изображения критерий качества зависит от конкретной решаемой задачи: к примеру, если стоит проблема узнавания объекта на таком изображении, то желательно определить форму этого изображения так, чтобы минимизировать вероятность ошибки узнавания объекта. Столь разнородные по требованиям задачи выбраны для иллюстрации работы алгоритма не случайно: они призваны показать его гибкость и широкий спектр применимости.

1. Алгоритм фильтрации кусочно-постоянных изображений

Поле зрения X будем называть некоторое ограниченное подмножество евклидовой плоскости \mathcal{R}^2 . Изображением $f(\cdot)$ называется функция, определенная на всем поле зрения X , принимающая конечные значения в некотором нормированном пространстве R , интегрируемая с квадратом нормы в X :

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \triangleq \int_X \|f(x)\|_R^2 \mu(dx) < \infty. \quad (1)$$

Здесь под мерой $\mu(\cdot)$ будем понимать меру Лебега, если X — континуум, и считающую меру, если X — конечное или счетное множе-

¹Как правило, предполагается выполненным более жесткое требование, а именно — требование на геометрию областей, где яркость изображения постоянна.

ство. Множество всевозможных изображений обозначим $\mathcal{L}(X)$. Будем считать, что предъявляемые для анализа изображения таковы, что некоторое их свойство \mathfrak{S} (определенное во всех точках поля зрения) принимает лишь конечное число значений; такие изображения далее будем называть кусочно-постоянными по данному свойству. Множество значений свойства \mathfrak{S} будем в дальнейшем обозначать как S . Подобным свойством может служить яркость изображения в точке, его цвет, текстура. Будем считать, что на множестве S задана метрика $\rho_S(\cdot, \cdot) : S^2 \rightarrow \mathcal{R}^+$.

Пусть дано изображение $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и его свойство \mathfrak{S} в точках поля зрения принимает n значений $s_i \in S$, $i = 1, \dots, n$. Область поля зрения X , содержащую точки, в которых свойство принимает i -е значение, обозначим $A_i^{f(\cdot)}$, $i = 1, \dots, n$. В совокупности $\{A_i^{f(\cdot)}, i = 1, \dots, n\}$ образуют разбиение поля зрения X :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i^{f(\cdot)} = X; \quad A_i^{f(\cdot)} \cap A_j^{f(\cdot)} = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Например, модель формирования мозаичного изображения (то есть изображения, *яркость* которого в точках поля зрения принимает лишь конечное число значений) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(x), \quad x \in X, \quad (2)$$

где $c_i \in \mathcal{R}^1$ — яркость на соответствующем множестве $A_i^{f(\cdot)}$, а $\chi_i(\cdot) = \chi_{A_i^{f(\cdot)}}(\cdot)$ — индикаторная функция множества² $A_i^{f(\cdot)}$, $i = 1, \dots, n$. Если изображение $f(\cdot)$ имеет на множествах $A_i^{f(\cdot)}$, $i = 1, \dots, n$, постоянную *текстуру*³, оно представимо как

²Индикаторная функция $\chi_B(\cdot) : X \rightarrow \{0, 1\}$ произвольного множества $B \subset X$ определяется следующим образом:

$$\forall x \in X : \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

³Трактовка понятия «текстурнозначное изображение» приведена в разделе 2.3.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n t_i(x)\chi_i(x), \quad x \in X, \quad (3)$$

где $t_i(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — изображение, характеризующее текстуру $f(\cdot)$ на множестве $A_i^{f(\cdot)}$.

Пусть задан класс \mathfrak{D} μ -измеримых подмножеств поля зрения X , такой, что

- мера каждого множества $T \in \mathfrak{D}$ равна отличной от 0 константе, не зависящей от T :

$$\forall T \in \mathfrak{D} \quad \mu(T) = \text{const} > 0.$$

- для каждой точки поля зрения X найдется (по крайней мере одно) множество $T \in \mathfrak{D}$, содержащее эту точку:

$$\forall x \in X \quad \exists T \in \mathfrak{D} : x \in T.$$

- класс \mathfrak{D} метризован; метрика на \mathfrak{D} обозначена $\rho_{\mathfrak{D}}(\cdot, \cdot) : \mathfrak{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ и определена как мера симметрической разности⁴:

$$\rho_{\mathfrak{D}}(T_1, T_2) = \mu(T_1 \Delta T_2), \quad T_1, T_2 \in \mathfrak{D}.$$

В дальнейшем множества — элементы класса \mathfrak{D} — будем называть *шаблонами*. Заметим, что, будучи подмножествами ограниченного множества X , шаблоны также ограничены.

Приведем конструктивный способ определения класса \mathfrak{D} . Пусть задано $T_0 \subset X$ — подмножество поля зрения — и множество Γ обратимых отображений $\gamma : X \rightarrow X$, сохраняющих меру любого подмножества поля зрения X ($\forall A \subset X \quad \mu(\gamma A) = \mu(A)$)⁵. Будем считать, что

⁴При таком определении функция $\rho_{\mathfrak{D}}(\cdot, \cdot)$ не является метрикой в строгом понимании. В самом деле, если симметрическая разность двух множеств, принадлежащих классу \mathfrak{D} , отлична от пустого множества, но имеет меру 0, то эти два множества с точки зрения «метрики» $\rho_{\mathfrak{D}}(\cdot, \cdot)$ совпадают. Однако эта деталь не является принципиальной для дальнейшего.

⁵Образ любого подмножества $A \subset X$ определен как

$$\gamma A \triangleq \{x \in X : \gamma^{-1}x \in A\}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Поскольку отображения γ действуют из X в X , то $\gamma A \subset X$, если $A \subset X$.

совокупность отображений Γ и подмножество T_0 поля зрения X таковы, что для всякой точки $x \in X$ найдется хотя бы одно $\gamma \in \Gamma$ такое, что $x \in \gamma T_0$. Тогда класс \mathfrak{D} может быть определен как совокупность всех образов множества T_0 :

$$\mathfrak{D} = \{\gamma T_0, \gamma \in \Gamma\}. \quad (4)$$

В качестве более конкретного примера рассмотрим совокупность Γ_R всевозможных пар трансляций γ_x ,

$$\forall y \in \mathcal{R}^2 : \gamma_x y = y + x, \quad x \in \mathcal{R}^2,$$

и поворотов γ_φ ,

$$\forall y \in \mathcal{R}^2 : \gamma_\varphi y = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} y, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

двумерной плоскости: $\Gamma_R = \{\tau = \gamma_x \gamma_\varphi, x \in \mathcal{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Предположим, что поле зрения X таково, что из класса множеств $\{\tau X \subset \mathcal{R}^2, \tau \in \Gamma_R\}$ можно выбрать счетный подкласс, элементы которого образуют разбиение плоскости \mathcal{R}^2 :

$$\exists G = \{\tau_i, i=1, 2, \dots\} \subset \Gamma_R : \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i X = \mathcal{R}^2 \text{ и } \forall i, j, i \neq j : \tau_i X \cap \tau_j X = \emptyset^6.$$

Определим функцию $\tilde{\tau}(\cdot) : \mathcal{R}^2 \rightarrow \Gamma_R$, которая каждой точке $x \in \mathcal{R}^2$ ставит в соответствие элемент $\tilde{\tau}(x) \in G$ такой, что

$$x \in \tilde{\tau}(x)X.$$

Из определения класса G следует, что $\tilde{\tau}(x)$ существует и единственно для каждого $x \in \mathcal{R}^2$.

Зафиксируем некоторый элемент $\tau \in \Gamma_R$. Рассмотрим следующее отображение $\gamma_\tau : X \rightarrow \mathcal{R}^2$:

$$\gamma_\tau x = (\tilde{\tau}(\tau x))^{-1} \tau x.$$

Справедливы следующие утверждения:

⁶Этому условию удовлетворяет, к примеру, любой полукрытый прямоугольник на \mathcal{R}^2 .

- Для любого $\tau \in \Gamma_R$ отображение γ_τ принимает значения в X .
- Отображение γ_τ обратимо.
- Каково бы ни было непустое подмножество $T_0 \subset X$, для каждого $x \in X$ найдется $\tau \in \Gamma_R$ такое, что $\gamma_\tau T_0$ содержит x .

Это позволяет использовать множество

$$\Gamma = \{\gamma_\tau, \tau \in \Gamma_R\} \quad (5)$$

и произвольное непустое множество $T_0 \subset X$ для построения класса шаблонов \mathfrak{D} .

Фундаментальным условием, которое будем предполагать выполненным для кусочно-постоянного изображения $f(\cdot)$, предъявляемого для анализа, является следующее:

$$\forall x \in X, \exists T \in \mathfrak{D}, \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in T \text{ и } T \subset A_i^{f(\cdot)}, \quad (6)$$

то есть структура областей постоянства значения свойства \mathfrak{S} на изображении $f(\cdot)$ такова, что для любой точки поля зрения найдется такой шаблон $T \in \mathfrak{D}$, который покрывает данную точку и целиком находится внутри одной из областей постоянства значения свойства \mathfrak{S} на изображении.

Введем в рассмотрение два функционала $v(\cdot, \cdot)$ и $d(\cdot, \cdot)$, определенных на прямом произведении \mathfrak{D} и $\mathcal{L}(X)$, принимающих значения в S и \mathcal{R}^1 соответственно. Определим семантику каждого из них следующим образом. Пусть предъявлено изображение $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Значение $v(T, f(\cdot)) \in S$ будем считать наилучшим (в некотором, пока абстрактном смысле) приближением значения свойства \mathfrak{S} изображения $f(\cdot)$ на подмножестве $T \in \mathfrak{D}$ поля зрения X . Значение $d(T, f(\cdot)) \in \mathcal{R}^1$ будем считать невязкой аппроксимации значения свойства \mathfrak{S} изображения $f(\cdot)$ на подмножестве $T \in \mathfrak{D}$ поля зрения X значением $v(T, f(\cdot))$. Потребуем выполнения следующих условий на функционалы $v(\cdot, \cdot)$ и $d(\cdot, \cdot)$. Для любого изображения $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющего условию (6):

(I). Для всех $T \in \mathfrak{D}$, для которых существует номер $i \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $T \subset A_i^{f(\cdot)}$, выполняются равенства

$$v(T, f(\cdot)) = s_i, \quad d(T, f(\cdot)) = 0,$$

где s_i — значение свойства \mathfrak{S} изображения $f(\cdot)$ на подмножестве $A_i^{f(\cdot)}$ поля зрения.

(II). Для всех $T \in \mathfrak{D}$, для которых существуют по крайней мере два номера $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, таких что $T \cap A_i^{f(\cdot)} \neq \emptyset$ и $T \cap A_j^{f(\cdot)} \neq \emptyset$, выполняется неравенство

$$d(T, f(\cdot)) > 0.$$

(III). Для любого $T \in \mathfrak{D}$ значение $d(T, f(\cdot))$ не зависит от значений функции $f(\cdot)$ на множестве $X \setminus T$, и инвариантно по отношению к любому взаимно однозначному преобразованию множества $T \subset X$ в себя, сохраняющему меру каждого подмножества множества T . Более точно, пусть H_T — произвольная группа отображений $h : T \rightarrow T$ таких, что для любого μ -измеримого $\tilde{T} \subset T$:

$$\mu(h\tilde{T}) = \mu(\tilde{T}), \quad h \in H_T,$$

и функция $g_h(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ определена на T следующим образом:

$$\forall x \in T : g_h(x) = f(hx),$$

а в остальном — произвольна. Тогда для любого $h \in H_T$ выполняется равенство

$$d(T, f(\cdot)) = d(T, g_h(\cdot)).$$

(IV). При любом $T \in \mathfrak{D}$ функционалы $d(T, \cdot)$ и $v(T, \cdot)$ непрерывны по второму аргументу в точке $f(\cdot)$ в метрике пространства $\mathcal{L}(T)$ ⁷: для любой последовательности $\{f_k(\cdot) \in \mathcal{L}(X), k = 1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} |d(T, f_k(\cdot)) - d(T, f(\cdot))| &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \\ \rho_S(v(T, f_k(\cdot)), v(T, f(\cdot))) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad \text{если } \|f(x) - f_k(x)\|_{\mathcal{L}(T)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

⁷В соответствии с (1), для любого $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, норма в пространстве $\mathcal{L}(A)$ определяется как

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{L}(A)}^2 \triangleq \int_A \|f(x)\|_R^2 \mu(dx).$$

(V). Для любого изображения $g \in \mathcal{L}(X)$ функционалы $d(\cdot, g(\cdot))$ и $v(\cdot, g(\cdot))$ непрерывны по первому аргументу в любой точке $T \in \mathfrak{D}$: для любой последовательности $\{T_k \in \mathfrak{D}, k = 1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} |d(T_k, g(\cdot)) - d(T, g(\cdot))| &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \\ \rho_S(v(T_k, g(\cdot)), v(T, g(\cdot))) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad \text{если } \rho_{\mathfrak{D}}(T, T_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Утверждение 1. Если класс \mathfrak{D} компактен, а все его элементы суть замкнутые множества, то для любого изображения $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и для каждой точки $x \in X$ существует решение уравнения

$$d(T^*(x), g(\cdot)) = \min\{d(T, g(\cdot)) \mid T \in \mathfrak{D} : x \in T\} \quad (7)$$

относительно $T^*(x) \in \mathfrak{D}$.

В самом деле, поскольку каждое из множеств $T \in \mathfrak{D}$ замкнуто и ограничено, то класс $\{T \in \mathfrak{D} : x \in T\}$ компактен при любом $x \in X$. Соответственно, функционал $d(\cdot, f(\cdot))$, будучи ограниченным снизу и непрерывным по первому аргументу, достигает на этом классе минимального значения, что и доказывает утверждение 1.

Определение. Результатом фильтрации произвольного изображения $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ будем называть функцию $\varphi(\cdot)$, определенную на всем поле зрения X и принимающую значения на множестве S , равную

$$\varphi(x) \triangleq v(T^*(x), g(\cdot)), \quad x \in X, \quad (8)$$

где $T^*(x) \in \mathfrak{D}$ — решение уравнения (7).

При этом значение функции $d^*(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$, определенной как

$$d^*(x) \triangleq d(T^*(x), g(\cdot)) = \min\{d(T, g(\cdot)) \mid T \in \mathfrak{D} : x \in T\}, \quad x \in X, \quad (9)$$

естественно интерпретировать как невязку приближения истинного значения свойства \mathfrak{S} изображения $f(\cdot)$ в точке $x \in X$ результатом фильтрации $\varphi(x)$.

Заметим, что конструкция функционалов $d(\cdot, \cdot)$ и $v(\cdot, \cdot)$, определяющих результат фильтрации, не конкретизировалась.

Как следует непосредственно из построения, если предъявленное для анализа изображение $f(\cdot)$ удовлетворяет условию (6), то значение $\varphi(x)$ соответствующего ему результата фильтрации в точности совпадает со значением свойства \mathfrak{S} изображения $f(\cdot)$ в точке $x \in X$, а функция $d^*(\cdot)$ всюду равна нулю.

2. Приложения

Рассмотрим некоторые приложения алгоритма фильтрации, предложенного в разделе 1. Первые два примера посвящены задаче подавления шума и задаче обнаружения неизвестных объектов на известном фоне; решения обеих задач изложены в применении к монохромным мозаичным изображениям, — то есть изображениям, представимым в виде (2). Третий из рассмотренных примеров посвящен анализу текстурнозначных изображений.

2.1. Проблема подавления помех

Пусть изображение $g(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$, предъявляемое для анализа, представимо в виде суперпозиции «невозмущенного» мозаичного изображения (2) $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющего условию (6), и случайного элемента $\nu(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, моделирующего помеху:

$$g(\cdot) = f(\cdot) + \nu(\cdot). \quad (10)$$

Проблема состоит в том, чтобы построить оценку «невозмущенного» изображения $f(\cdot)$ по предъявленному изображению $g(\cdot)$.

Пусть, как и прежде, определен класс \mathfrak{D} подмножеств поля зрения X , причем способ его построения соответствует описанному в разделе 1, а именно: задано непустое множество $T_0 \subset X$ и совокупность Γ обратимых отображений $\gamma : X \rightarrow X$, определенная в (5). Класс \mathfrak{D} есть совокупность образов множества T_0 : $\mathfrak{D} = \{\gamma T_0, \gamma \in \Gamma\}$. Определим функционалы $v(\cdot, \cdot) : \Gamma \times \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{R}^1$ и $d(\cdot, \cdot) : \Gamma \times \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{R}^1$ следующим образом⁸:

⁸В разделе 1 первым аргументом этих функционалов был элемент класса \mathfrak{D} . При конкретном способе «генерации» этого класса, когда между \mathfrak{D} и Γ можно

$$v(\gamma, g(\cdot)) = \frac{1}{\mu(T_0)} \int_{\gamma T_0} g(x) dx, \quad (11)$$

$$d(\gamma, g(\cdot)) = \frac{1}{\mu(T_0)} \int_{\gamma T_0} (g(x) - v(\gamma, g(\cdot)))^2 dx. \quad (12)$$

Результат фильтрации $\varphi(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$ будем вычислять в соответствии с (8), используя конкретный вид (11), (12) функционалов $v(\cdot, \cdot)$ и $d(\cdot, \cdot)$.

Результат фильтрации $\varphi(\cdot)$ можно интерпретировать как оценку «невозмущенного» изображения $f(\cdot)$. Пусть случайный элемент $\nu(\cdot)$, моделирующий помеху, имеет нулевое математическое ожидание и корреляционный оператор $\Sigma_\nu : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ с ограниченной нормой Гильберта-Шмидта, $\sigma^2 \triangleq \|\Sigma_\nu\|_2^2 < \infty$. Если для множеств $A_i^{f(\cdot)}$, $i = 1, \dots, n$, на которых яркость изображения $f(\cdot)$ принимает постоянные значения, выполнено предположение (6), то оценка $\varphi(\cdot)$ асимптотически (по $\sigma^2 \rightarrow 0$) оптимальна:

$$\|f(\cdot) - \varphi(\cdot)\|^2 \rightarrow 0,$$

причем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{E}(f(x) - \varphi(x))^2 \leq \sup\{\chi_T^* \Sigma_\nu \chi_T / \|\chi_T(\cdot)\|^2 : T \in \mathfrak{D}, T \ni x\}, \quad (13)$$

где $\chi_T(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ — индикаторная функция множества $T \subset X$, которая также рассматривается в этом выражении как линейный оператор $\chi_T : \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

Заметим, что интегральное значение d^* функции $d^*(\cdot)$, определенной в (9), равно

$$d^* = \frac{1}{\text{mes } X} \int_X d^*(x) dx,$$

естественно рассматривать как меру адекватности рассмотренной модели предъявляемому изображению $g(\cdot)$. Близкие к нулю значения d^*

установить дуальный изоморфизм, данное здесь определение эквивалентно определению из раздела 1.

говорят об отсутствии противоречия между моделью и истинным положением вещей; значения d^* , существенно большие 0, говорят о том, что либо предположения о характере помех, либо предположение (6) о структуре разбиения $A_i^{f(\cdot)}$ неверны. Построить критерий для проверки гипотезы об адекватности данной модели на основании статистики d^* можно, воспользовавшись предположением о распределении шума $\nu(\cdot)$. Для этого рассмотрим простую ситуацию, когда множество X (и, соответственно, его подмножество T_0), конечно, и на нем определена считающая мера $\mu(\cdot)$, причем $\mu(T_0)$ — количество элементов T_0 — велико. Тогда, если модель верна, то статистика d^* имеет распределение χ^2 с $\mu(X)$ степенями свободы, центральное. Если модель неверна, то d^* имеет распределение χ^2 с $\mu(X)$ степенями свободы, нецентральное, с параметром нецентральности, большим 0.

2.2. Проблема выделения неизвестного объекта на известном фоне

Пусть известны эталонное изображение $f(\cdot)$ некоторой исходной сцены и изображение $g(\cdot)$ сцены, полученной из исходной изменением условий освещенности и добавлением новых объектов. Обозначим $A \subset X$ область изображения $g(\cdot)$, не содержащую добавленные объекты, $\chi_A(\cdot) : X \rightarrow \{0, 1\}$ — индикаторную функцию множества A . Проблема состоит в том, чтобы построить оценку множества A , основываясь на данных изображениях $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

Для простоты предположим, что эталонные и предъявляемые для анализа изображения получены прибором, регистрирующим изображения, оптическая система которого неизменна (так что связанные с ее несовершенством искажения — одни и те же для всех изображений), и взаимное расположение этого прибора и регистрируемой сцены также неизменно (так что изображения регистрируются из одной и той же точки зрения и под одним и тем же углом зрения). Эти условия соблюдаются, когда для регистрации изображений используется фото- или телекамера, закрепленная на штативе, и фокусное расстояние ее объектива не меняется между съемкой эталонного и предъявляемого для анализа изображений.

Предполагается, что между съемкой эталонного и предъявляемого изображений условия освещенности сцены могут меняться. Кроме



Рис. 1. Изображение $f_0(\cdot)$ исходной сцены (слева) и изображение $f(\cdot)$ той же сцены с новым объектом (справа).

того, распределение яркости на изображении может изменяться регистрирующим прибором (камерой) при появлении в поле зрения крупных объектов, изменяющих мощность светового потока, попадающего на фоточувствительный элемент камеры. В таком случае яркость различных частей регистрируемого изображения может изменяться по различным и, вообще говоря, неизвестным правилам (см. рис. 1). Будем считать, что регистрирующий прибор сохраняет отношение порядка между значениями яркости точек изображения в пределах небольших фрагментов поля зрения.

Еще одно обстоятельство, требующее дополнительных усилий при решении задачи, — размер объектов. В самом деле, существуют алгоритмы, позволяющие надежно решать задачу обнаружения неизвестных объектов на известном фоне (см., к примеру, [3]); однако они имеют ограничение по размеру объекта; в случае, если объект закрывает большую часть поля зрения, они лишь дают надежный ответ на вопрос о присутствии объекта на сцене, но его геометрия определяется неверно.

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий при достаточно общих предположениях о модели формирования изображения, предъявляемого для анализа, проверить гипотезу о наличии на изображении новых (по отношению к эталонному изображению) объектов, и оценить их геометрическое положение на поле зрения. В алгоритме применены методы морфологического анализа изображений [1, 2, 3].

2.2.1. Выделение объектов при помощи алгоритма локальной морфологической фильтрации

Пусть задано кусочно-постоянное изображение $f(\cdot)$

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_j(x), \quad c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_N, \quad c_j \in \mathcal{R}^1, \quad x \in X,$$

где $\chi_j(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$ — индикаторная функция множества постоянной яркости, а $c_j \in \mathcal{R}^1$ — яркость на этом множестве, $j = 1, \dots, N$. Изображение $f(\cdot)$ будем интерпретировать как изображение «невозмущенной» сцены (то есть сцены, на которой отсутствуют неизвестные объекты).

Формой изображения $f(\cdot)$, в соответствии с [2, 3], назовем выпуклое множество

$$V_f = \left\{ f(\cdot) : f(\cdot) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_j(\cdot), \quad c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_N, \quad c_j \in \mathcal{R}^1 \right\}$$

или оператор $P_f : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ проецирования на это множество.

Сужением функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ на множество $B \subset X$ будем называть функцию $f_B(\cdot)$, определенную следующим образом:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in B, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus B. \end{cases}$$

Пусть для анализа предъявлено изображение $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ исходной сцены, на которой добавлены новые объекты. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ определим значение $d(\gamma, g(\cdot))$ функционала $d(\cdot, \cdot)$:

$$d(\gamma, g(\cdot)) = \frac{\|(I - P_{f_{\gamma T_0}})g_{\gamma T_0}\|^2}{\|(I - E_{\gamma T_0})g_{\gamma T_0}\|^2},$$

где $E_{\gamma T_0}$ — оператор проецирования на множество $V = \{c \cdot \chi_{\gamma T_0}(\cdot), c \in \mathcal{R}^1\} \subset \mathcal{L}(X)$.



Рис. 2. Белым цветом выделено множество A — множество точек поля зрения, на которых изображение $f(\cdot)$ не содержит изображений новых объектов (по сравнению с изображением $f_0(\cdot)$).

Кроме того определим значение $v(\gamma, g(\cdot))$ функционала $v(\cdot, \cdot)$:

$$v(\gamma, g(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{если } d(\gamma, g(\cdot)) \leq \delta, \\ 0, & \text{если } d(\gamma, g(\cdot)) > \delta, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathcal{R}^+$ — некоторое пороговое значение. Вопрос о выборе этого значения обсуждается ниже.

В качестве оценки индикаторной функции $\chi_A(\cdot)$ подмножества A , поля зрения, где на предъявленном изображении $g(\cdot)$ отсутствуют неизвестные объекты, будем использовать функцию $v(\gamma^*(x), g(\cdot))$, $x \in X$, определенную формально в соответствии с (8).

2.2.2. Другие алгоритмы

Морфологический алгоритм. В работе [3] рассмотрен следующий алгоритм выделения изображения неизвестного объекта на известном фоне. Зададим функцию $d^m(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$ как

$$d^m(x) = (g(x) - (P_f g)(x))^2.$$

Тогда в качестве оценки индикаторной функции $\chi_A(\cdot)$ будем использовать функцию

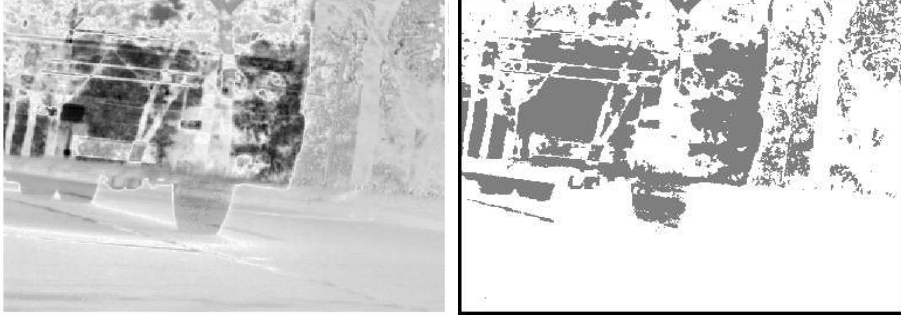


Рис. 3. Модуль разности изображений $f_0(\cdot)$ (исходной сцены) и $f(\cdot)$ (сцены с новыми объектами) (слева) и оценка множества A , полученная на основании значений $d^t(x) = |f_0(x) - f(x)|$, $x \in X$ (справа).

$$\chi^m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } d^m(x) \leq \delta, \\ 0, & \text{если } d^m(x) > \delta, \end{cases}$$

где δ — пороговое значение. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4. Этот алгоритм имеет существенный недостаток: в том случае, если объект закрывает большую часть поля зрения, алгоритм дает надежный ответ на вопрос о присутствии нового объекта на сцене, но его геометрия определяется неверно.

Локальный корреляционный алгоритм. Пусть \mathcal{F} — множество всех подмножеств поля зрения X . Будем считать, что задана функция $e(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{F}$, ставящая в соответствие каждому $x \in X$ некоторое подмножество $e(x) \subset X$ таким образом, что $x \in e(x)$ и $\text{mes}\{e(x_2)\} = \text{mes}\{e(x_1)\}$ для любых x_1 и x_2 из X .

Определим функцию $d^c(\gamma) : \Gamma \rightarrow \mathcal{R}^1$:

$$d^c(\gamma) = \frac{(f_{\gamma T_0} - E_{\gamma T_0} f, g_{\gamma T_0} - E_{\gamma T_0} g)}{\|f_{\gamma T_0} - E_{\gamma T_0} f\| \|g_{\gamma T_0} - E_{\gamma T_0} g\|}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Для каждого $x \in X$ зададим функцию $d^c(x) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$:

$$d^c(x) = \sup_{\gamma: x \in \gamma T_0} (d^c(\gamma)).$$



Рис. 4. Результат работы алгоритма, основанного на методах морфологического анализа изображений. Слева: функция $d^m(\cdot)$ — невязка аппроксимации изображения $f(\cdot)$ изображением $P_{f_0}f(\cdot)$, принадлежащим форме $f_0(\cdot)$. Справа: множество A^m (выделено белым цветом) — оценка множества A , основанная на $d^m(\cdot)$.

В качестве оценки множества A будем использовать множество $A^c \subset X$:

$$A^c = \{x \in X : d^c(x) > \delta\},$$

где $\delta \in \mathcal{R}^1$ пороговое значение. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 5.

К недостаткам данного алгоритма следует отнести тот факт, что изменения условий освещенности сцены, принадлежащие некоторому классу, приводят к необходимости изменения значения порога δ . В самом деле, нетрудно видеть что значения функционала $d(\cdot)$ не инвариантны по отношению к преобразованиям вида $f(\cdot) \rightarrow F(f(\cdot))$, где $F(\cdot) : \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$ — произвольная монотонно возрастающая функция.

Локальный алгоритм ранговой корреляции [8, 9]. Для каждого $x \in X$, всех $\gamma \in \Gamma$ таких, что $x \in \gamma T$, и произвольного изображения $h(\cdot) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$ зададим функцию $d_f^r(x, \gamma)$

$$d_{h(\cdot)}^r(x, \gamma) = \text{mes}(\{y \in \gamma T : f(y) < f(x)\}).$$

Определим функцию $d^r(x) : X \rightarrow \mathcal{R}^1$

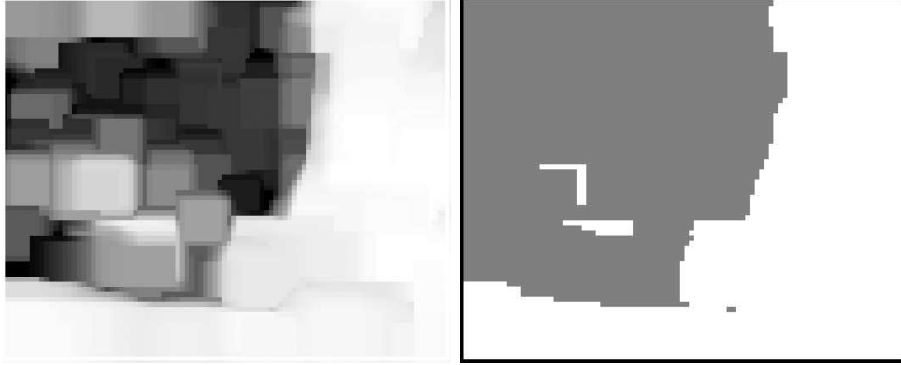


Рис. 5. Результат применения локального корреляционного алгоритма. Слева: функция $d^c(\cdot)$ — «поле невязок» для оценивания множества A , построенное с использованием значений корреляции фрагментов изображений $f(\cdot)$ и $f_0(\cdot)$. Справа: множество A^c (выделено белым цветом) — оценка множества A , основанная на $d^c(\cdot)$.

$$d^r(x) = \inf_{\gamma: x \in \gamma T_0} |d_{f(\cdot)}^r(x, \gamma) - d_{g(\cdot)}^r(x, \gamma)|,$$

где, как и прежде, $f(\cdot)$ — известное изображение исходной сцены, а $g(\cdot)$ — предъявленное для анализа изображение этой сцены, содержащее, возможно, неизвестные объекты. В качестве оценки множества A будем использовать множество $A^r \subset X$ заданное как

$$A^r = \{x \in X : d^r(x) < \delta\},$$

где $\delta \in \mathcal{R}^1$ пороговое значение. Соответствующая иллюстрация с результатом работы алгоритма приведена на рис. 6. Как недостаток данного алгоритма следует отметить его низкую помехозащищенность. Даже небольшой шум на изображении не позволяет с достаточной точностью оценить множество A .

2.2.3. Сравнение алгоритмов

Пусть множество $A \subset X$ известно. Тогда будем считать, что оценка A_1 не хуже оценки A_2 , если выполняется соотношение

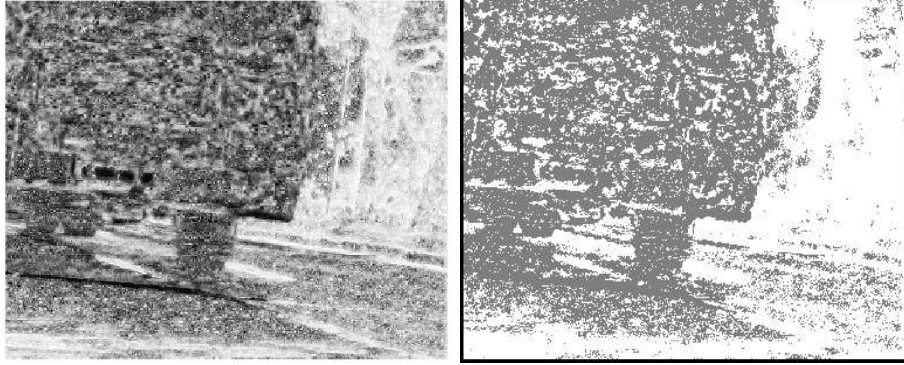


Рис. 6. Результат применения локального алгоритма ранговой корреляции. Слева: функция $d^r(\cdot)$ — «поле невязок». Справа: множество A^r (выделено белым цветом) — оценка множества A , основанная на $d^r(\cdot)$.

$$\|\chi_{A_1} - \chi_A\|^2 \leq \|\chi_{A_2} - \chi_A\|^2,$$

где $\chi_A(\cdot)$ индикаторная функция множества A . Значение $\|\chi_{A_1} - \chi_A\|^2 = \text{mes}(A \Delta A_1)$ будем интерпретировать как погрешность оценки A_1 множества A .

Качество работы всех алгоритмов, описанных выше, параметрически зависит от порогового значения δ . Для каждого алгоритма в качестве порогового значения будем использовать

$$\delta^* = \arg \left\{ \|\chi_{A_{\delta^*}} - \chi_A\| = \inf_{\delta} \|\chi_{A_{\delta}} - \chi_A\| \right\},$$

где $A_{\delta} \subset X$ оценка множества $A \subset X$ полученная данным алгоритмом при значении порога δ . Конечно, при решении задач множество A неизвестно, так что такая процедура определения «оптимального» для данного алгоритма значения порога применима лишь для сравнения результатов работы алгоритмов на модельных данных либо для сравнения в ситуации, когда есть возможность привлечь эксперта для построения наиболее точной версии множества A . На практике пороговые значения можно выбирать, руководствуясь опытом

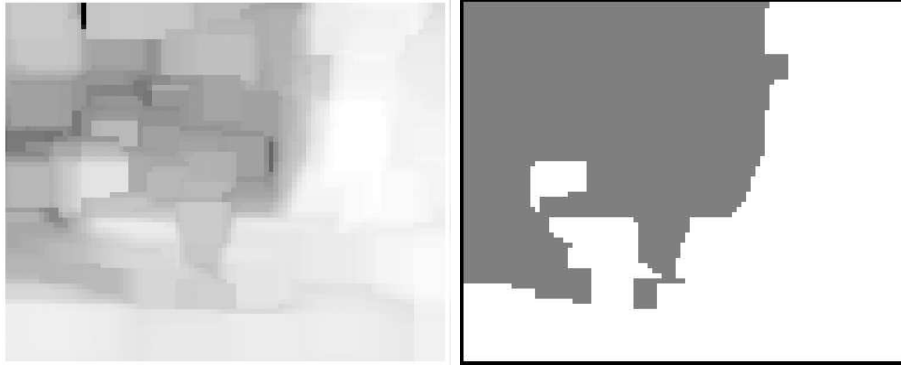


Рис. 7. Результат применения локального морфологического алгоритма. Слева: функция $d(\cdot)$ — поле невязок, построенное с использованием локального морфологического алгоритма. Справа: множество A^* (выделено белым цветом) — оценка множества A , основанная на $d(\cdot)$.

применения алгоритма к данным, предъявляемым для анализа. Кроме того, рассмотренные алгоритмы допускают вычисление пороговых значений исходя из требуемых границ для вероятности ошибочного отнесения точки $x \in X$ к множеству A или к множеству $X \setminus A$ в случае, если множество X конечно.

На рис. 8 представлены графики зависимостей погрешности оценивания множества A от порогового значения δ для каждого из рассмотренных алгоритмов. Как видно, наиболее глубокий минимум достигается на графике д), соответствующем локальному морфологическому алгоритму. Само значение $\mu(A \Delta \hat{A})$, приблизительно равное 0.1, говорит об удовлетворительном согласии модели формирования изображения, предъявленного для анализа, использованной для построения алгоритма, с действительностью.

2.3. Определение формы текстурнозначного изображения

Под текстурнозначным изображением $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ будем понимать функцию, представимую в виде (3),

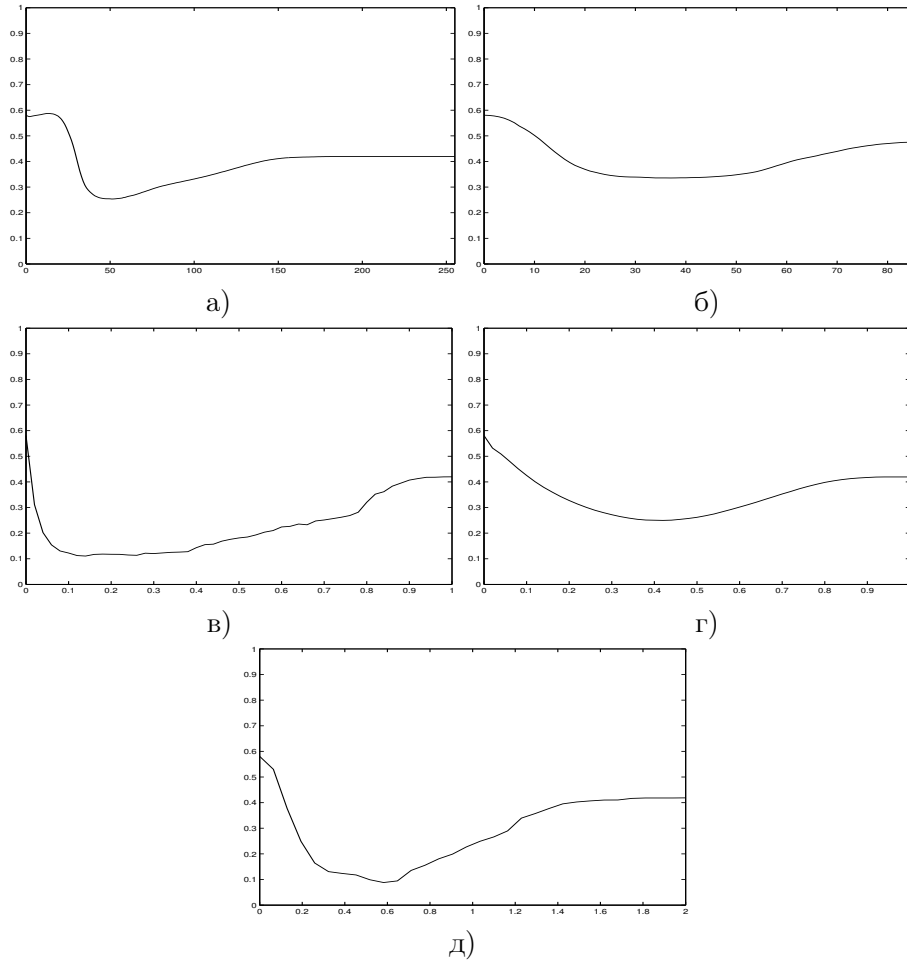


Рис. 8. Зависимости погрешности оценивания множества A от порогового значения δ для каждого и рассмотренных алгоритмов: а) для разности $d^t(x) = |f(x) - f_0(x)|$; б) для морфологического алгоритма и функции $d^m(\cdot)$; в) для локального корреляционного алгоритма и функции $d^c(\cdot)$; г) для алгоритма ранговой корреляции и функции $d^r(\cdot)$; д) для локального морфологического алгоритма и функции $d(\cdot)$.

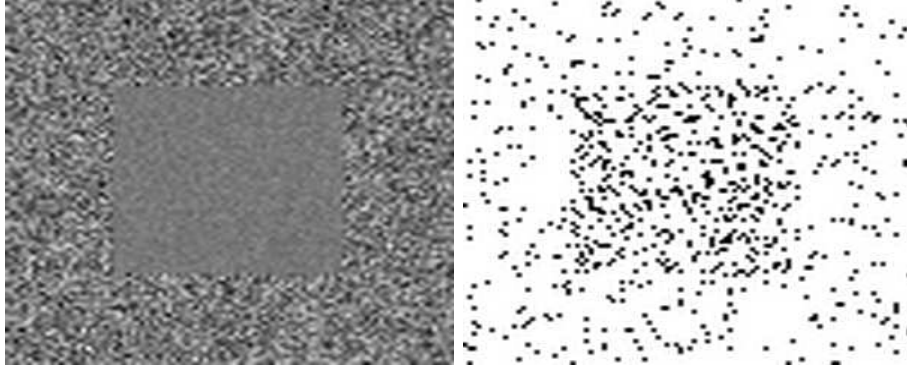


Рис. 9. Примеры текстурнозначных изображений. Слева: текстуры внутри прямоугольника и вне его определяются случайными полями с независимыми значениями, имеющими нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0.1 внутри прямоугольника и 2.0 вне его. Справа: текстуры внутри прямоугольника и вне его определяются случайными полями с независимыми значениями, имеющими биномиальные распределения с параметрами 0.2 и 0.05 соответственно.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n t_i(x) \chi_i(x), \quad x \in X, \quad (3)$$

где $t_i(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ суть случайные поля [7]. Заметим, что в этом случае $f(\cdot)$ также является случайным полем, причем ее статистические характеристики на каждом из множеств $A_i \subset X$ (напомним, что $\chi_k(\cdot)$ — индикаторные функции множеств A_k , $k = 1, \dots, n$) совпадают с характеристиками соответствующего поля $t_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим пример, когда $n = 2$, множество A_1 есть прямоугольная область внутри поля зрения, а $A_2 = X \setminus A_1$. Соответствующая иллюстрация дана на рис. 9. Слева приведено изображение, соответствующее случаю, когда случайные величины $t_i(x)$, $x \in X$, имеют нормальное распределение $N(0, \sigma_i^2)$ и независимы в совокупности, $i = 1, 2$. Значения σ_1^2 и σ_2^2 выбраны равными 0.1 и 2.0 соответственно. Справа приведено изображение, соответствующее случаю, когда

случайные величины $t_i(x)$, $x \in X$, имеют биномиальное распределение с параметром p_i и независимы в совокупности, $i = 1, 2$. Значения параметра p_i для $i = 1, 2$ выбраны равными 0.2 и 0.05 соответственно.

Предположим, что задано множество S , и случайные поля $t_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$, принадлежат параметрическому семейству \mathfrak{T} :

$$\mathfrak{T} = \{t_s(\cdot) \in \mathcal{L}(X) : s \in S\}.$$

В терминах раздела 1, в каждой точке поля зрения для кусочно-постоянного текстурнозначного изображения $f(\cdot)$ следует считать определенным значение $s(x) = s_i$, $x \in A_i$, свойства $\mathfrak{S} \in S$, которое является совокупностью статистических характеристик случайного поля $t_i(\cdot)$, «ответственного» за значение изображения в данной точке. В примерах, приведенных выше, случайные поля параметризуются значением единственного параметра функции распределения своих (независимых) значений — дисперсии σ^2 в первом примере и вероятности p во втором.

Пусть, как и прежде, задано подмножество T_0 поля зрения X и в соответствии с (5) определено множество Γ обратимых отображений $\gamma : X \rightarrow X$. Рассмотрим некоторую процедуру оценивания, которая ставит в соответствие функции $g_{\gamma T_0}(\cdot) \in \mathcal{L}(\gamma T_0)$ — сужению $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ на множество γT_0 — значение $s_\gamma(g_{\gamma T_0}(\cdot)) \in S$, которое будем интерпретировать как оценку параметра s случайного поля $t_s(\cdot) \in \mathfrak{T}$. Эту процедуру обозначим как $s_\gamma(\cdot) : \mathcal{L}(\gamma T_0) \rightarrow S$.

В качестве поясняющей иллюстрации рассмотрим случай, когда множество T_0 конечно, на нем задана считающая мера, и $\text{mes } T_0 = N$. Тогда сужение $g_{\gamma T_0}(\cdot)$ функции $g(\cdot)$ представляет собой конечномерный вектор, а множество $\mathcal{L}(\gamma T_0)$ есть пространство \mathcal{R}^N . Допустим на время, что параметрическое семейство \mathfrak{T} позволяет определить плотность $p_s(x_1, t_1, \dots, x_N, t_N) : (X \times R)^N \rightarrow \mathcal{R}^1$ совместного распределения для N сечений случайного поля $t_s(\cdot) : X \rightarrow R$ (в точках $x_j \in \gamma T_0$, $j = 1, \dots, N$) для каждого $s \in S$. При этом оценка $s_\gamma(\cdot) : \mathcal{R}^N \rightarrow S$ может быть построена, например, как оценка максимального правдоподобия:

$$s_\gamma(g_{\gamma T_0}(\cdot)) = \arg \max_{s \in S} p_s(x_1, g(x_1), \dots, x_N, g(x_N)), \quad \{x_1, \dots, x_N\} = \gamma T_0.$$

В соответствии с формализмом, изложенным в разделе 1, функционал $v(\cdot, \cdot) : \Gamma \times \mathcal{L}(X) \rightarrow S$ определим следующим образом:

$$v(\gamma, g(\cdot)) = s_\gamma(g_{\gamma T_0}(\cdot)), \quad \gamma \in \Gamma, \quad g(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$

Вместе с оценивающей процедурой $s_\gamma(\cdot)$ рассмотрим величину $d(\gamma, g(\cdot)) \in \mathcal{R}^1$, которую будем интерпретировать как погрешность оценки $s_\gamma(g_{\gamma T_0}(\cdot))$ значения \mathfrak{S} на множестве γT_0 , $\gamma \in \Gamma$. Эта погрешность, как и сама оценка, носят пока абстрактный характер, и должны быть конкретизированы при решении прикладной задачи.

Совокупность значений $d(\gamma, g(\cdot))$ при всевозможных γ и $g(\cdot)$ определяет функционал $d(\cdot, \cdot) : \Gamma \times \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{R}^1$. Задание $d(\gamma, g(\cdot))$ и $v(\gamma, g(\cdot))$ таким образом, чтобы выполнялись требования (I)–(IV), позволяет воспользоваться определением результата фильтрации текстурнозначного изображения, который, в соответствии с (8), равен

$$\varphi(x) = s_{\gamma^*(x)}(g_{\gamma^*(x)T_0}(\cdot)), \quad x \in X, \quad (14)$$

где $\gamma^*(x)T_0$ — решение уравнения (7).

Полученная оценка $\varphi(\cdot) : X \rightarrow S$ поля значений свойства \mathfrak{S} изображения $g(\cdot)$, в свою очередь, является мозаичным изображением. *Форму изображения $\varphi(\cdot)$ будем интерпретировать как оценку формы текстурнозначного изображения $g(\cdot)$.*

Как отмечалось во введении, критерий качества в проблеме определения формы изображения должен зависеть от того, какая задача должна быть решена в дальнейшем с использованием оценки формы. Для того, чтобы проиллюстрировать результат работы предлагаемого алгоритма оценивания формы текстурнозначного изображения, предположим, что множество S есть подмножество действительной оси \mathcal{R}^1 , и определим погрешность оценивания истинной формы P изображения $g(\cdot)$ формой изображения $\varphi(\cdot)$ следующим образом:

$$R(P, \varphi(\cdot)) \triangleq \|\varphi(\cdot) - P\varphi(\cdot)\|^2,$$

то есть как невязку между проекцией $\varphi(\cdot)$ на форму истинного поля значений свойства \mathfrak{S} изображения $g(\cdot)$, предъявленного для анализа.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда случайные величины $t_i(x)$, $x \in X$, имеют распределение Пуассона с параметром

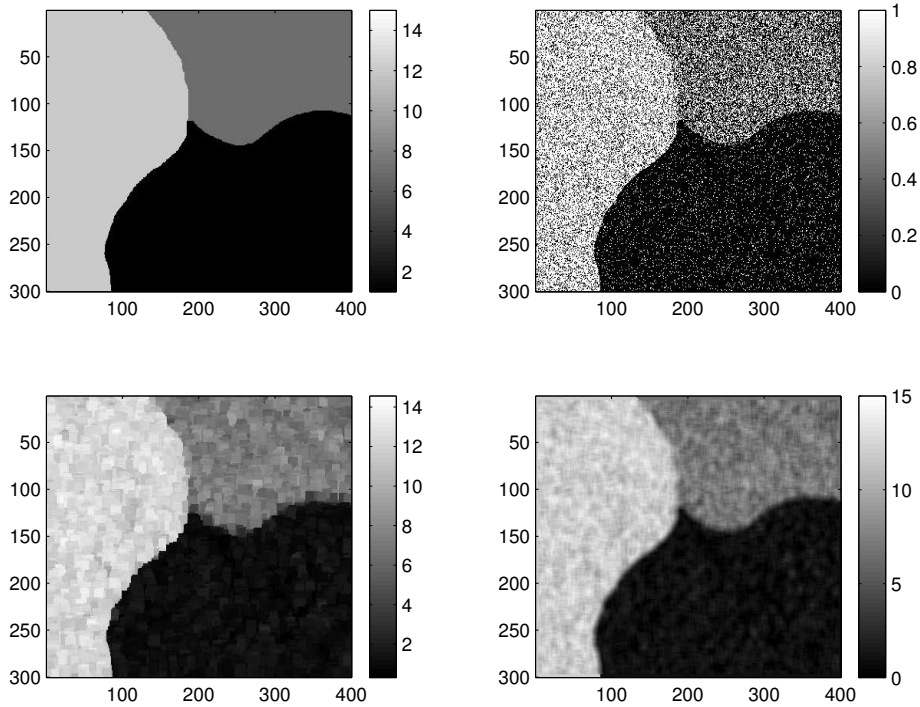


Рис. 10. Слева направо, сверху вниз: «идеальное», предъявленное для анализа, и два восстановленных изображения модельной сцены.

λ_i и независимы в совокупности, $i = 1, n$. На рис. 10, слева сверху, приведено «идеальное» изображение, которое необходимо получить для дальнейшего анализа (оно считается неизвестным в вычислительном эксперименте). Там же, справа сверху дано соответствующее текстурнозначное изображение, где каждая из текстур определяется случайным полем, имеющим распределение Пуассона, причем параметр распределения кодирует истинное значение некоторого свойства «идеального» изображения. Внизу слева приведен результат восстановления «идеального» изображения при помощи алгоритма, описанного в настоящем разделе. Для оценивания параметра λ распределения Пуассона использовалась оценка максимального правдоподобия, а в качестве значений функционала $d(\cdot, \cdot)$ вычислялись

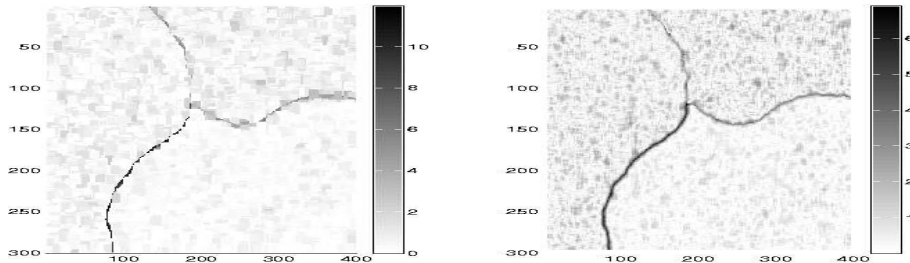


Рис. 11. Невязка между «идеальным» и восстановленным изображением модельной сцены для метода морфологической фильтрации (слева) и алгоритма со сверткой (справа).

невязки приближения функции распределения Пуассона с параметром λ_i , равным значению оценки — эмпирической функцией распределения. Для того, чтобы сравнить качество работы предложенного алгоритма, был реализован также другой алгоритм восстановления «идеального» изображения, основанный на вычислении свертки исходного изображения с таким ядром, чтобы результирующее изображение представляло собой «сглаженную» версию исходного. Результат работы этого алгоритма представлен на рис. 10 справа внизу. Сравнение работы алгоритмов можно осуществить, используя знание «идеального» изображения. А именно, для такого сравнения было вычислено поле невязок между значениями яркости «идеального» и «восстановленного» изображений. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 11 для предложенного алгоритма морфологической фильтрации (слева) и для простой оценки с помощью свертки (справа). Стоит отметить, что интегральная невязка для метода морфологической фильтрации оказывается ниже, чем для алгоритма со сверткой.

На рис. 12, 13 приведены «идеальное», предъявленное для анализа, и два восстановленных изображения другой, теперь реальной сцены (в той же последовательности, что и на рис. 10). На рис. 13 приведены изображения поля невязок для алгоритма морфологической фильтрации и для алгоритма со сверткой. На изображении реальной сцены преимущество алгоритма морфологической фильтрации

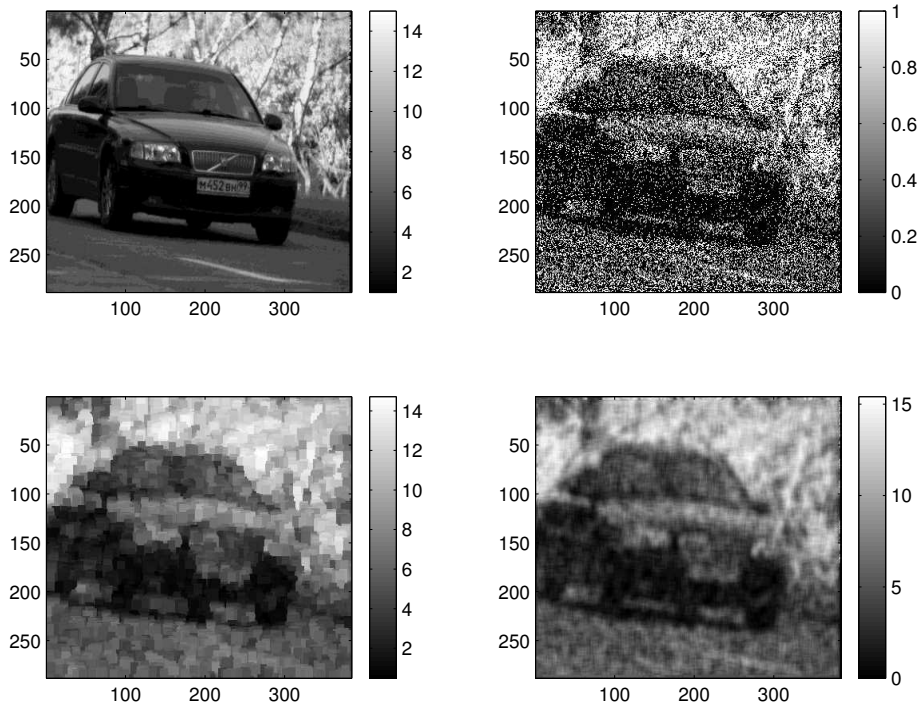


Рис. 12. Слева направо, сверху вниз: «идеальное», предъявленное для анализа, и два восстановленных изображения реальной сцены.

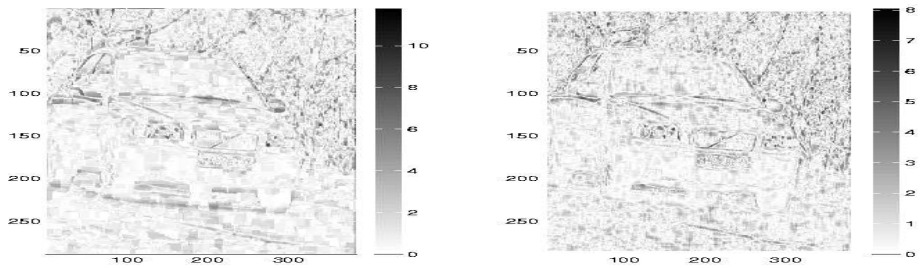


Рис. 13. Невязка между «идеальным» и восстановленным изображением реальной сцены для метода морфологической фильтрации (слева) и алгоритма со сверткой (справа).

не столь заметно на глаз, однако интегральное значение невязки для предлагаемого алгоритма оказывается ниже, чем для алгоритма со сверткой.

Список литературы

- [1] Пытьев Ю. П. Морфологический анализ изображений // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1061–1064.
- [2] Пытьев Ю. П. Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М.: Наука, 1984. С. 41–82.
- [3] Pyt'ev Yu. P. Morphological Image Analysis. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. Vol. 3, no. 1. P. 19–28.
- [4] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989.
- [5] Пытьев Ю. П., Животников Г. С. Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ // Интеллектуальные системы. 2001. Т. 6. С. 63–90.
- [6] Животников Г. С. О задаче оптимального оценивания параметров объекта по его изображению // Математические методы распознавания образов. Доклады XI Всероссийской конференции. М., 2003.
- [7] Методы компьютерной обработки изображений // Под ред. В. А. Сойфера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [8] Кендэл М. Ранговые корреляции. М.: Статистика, 1975.
- [9] Пытьев Ю. П., Семин А. В., Успенский И. О. О быстром алгоритме морфологического анализа // Математические методы распознавания образов. Доклады X Всероссийской конференции. М., 2001.

