

Моделирование этнических конфликтов при помощи однородных структур

Р. М. Корнев

В последние годы после завершения биполярного деления мира резко возросло количество конфликтов на межэтнической почве, и возникла насущная необходимость в средствах их предотвращения и локализации. Предлагаемые ниже математические модели представляют собой попытку математического моделирования развития таких конфликтов.

Введение

Задачи локализации и устранения этнических конфликтов появились сравнительно недавно. Наличие межнациональной напряженности на Ближнем Востоке, Северном Кавказе, в Средней Азии ставит задачу о предсказании развития такого рода конфликтов. В данной работе в качестве модели места конфликта используется однородная структура, а индивидуумы разных национальностей моделируются клетками структуры с добавлением неизменяемого признака «национальность». Предложены достаточное условие локализации конфликта и алгоритм проверки нераспространения конфликта.

Автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи и научное руководство, а также А. В. Галатенко за помощь в работе.

1. Основные определения

Однородная структура (сокращенно ОС) [1, 2] или *клеточный автомат* σ формально определяется как набор $\langle \mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi \rangle$, где \mathbb{Z}^2 —

множество векторов на плоскости с целочисленными координатами, $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $V = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}\}$ — упорядоченный набор различных векторов из \mathbb{Z}^2 , φ — функция n -значной логики от h переменных, причем существует такое k , что $\varphi(k, k, \dots, k) = k$. Векторы из \mathbb{Z}^2 называются *ячейками (клетками)* однородной структуры (*клеточного автомата*), элементы множества E_n — *состояниями ячейки*. Набор V , называемый *шаблоном соседства* однородной структуры, для каждой ячейки α определяет ее окрестность $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + \alpha_2, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$, наконец функция φ задает *локальную функцию переходов* однородной структуры: если в момент времени t состояния ячеек $\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + \alpha_2, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}$ равны соответственно x_0, x_1, \dots, x_{h-1} , то состояние ячейки α в следующий момент времени $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$.

Приписывая каждой ячейке ОС σ состояние из множества E_n , получим *состояние однородной структуры*. Другими словами, под состоянием ОС σ понимается функция f , определенная на множестве ячеек \mathbb{Z}^2 и принимающая значения из E_n .

Функционирование (поведение) ОС происходит в дискретном времени $t = 0, 1, \dots$ в результате последовательного выполнения *основной функции переходов*. Основная функция (оператор) переходов Φ определяется на множестве всех состояний ОС σ , при этом считается, что состояние ОС f переходит в состояние ОС g , $g = \Phi(f)$, если для любой ячейки α выполняется равенство $g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1}))$, то есть состояние каждой ячейки после перехода определяется по состоянию окрестностей ячейки до перехода с помощью локального преобразования φ , не зависящего от расположения ячейки α в пространстве \mathbb{Z}^2 . Как правило, изучается поведение только таких состояний ОС, у которых лишь конечное число ячеек находится в состоянии, отличном от состояния покоя k . Состояния ОС такого вида называются *конфигурациями*.

Определение 1. *Границей* называется связное множество Γ клеток однородной структуры σ , такое что, $\mathbb{Z}^2 = A \cup \Gamma \cup B$, причем $|B| < \infty$ и $B =$.

Определение 2. Множество B , $|B| < \infty$, удовлетворяющее условиям из определения 1, назовем *внутренним множеством* границы Γ .

Определение 3. Клетки $\alpha \in \Gamma$, назовем *граничными*.

Каждая ячейка из \mathbb{Z}^2 соотносится с одним индивидуумом из популяции. В модели *агрессивность* определяется конфигурацией $f : S \rightarrow Z_2$, то есть индивидуум либо *спокоен*, либо *возбужден*. В неоднородных популяциях каждая ячейка снабжается некоторым неизменяемым набором признаков n . Хотя в общем определении однородной структуры локальная функция перехода не зависит от ячейки α , однако путем введения некоторых дополнительных состояний во множество состояний клетки $\overline{E}_n : \overline{E}_n = E_n \times E_m$ получаем конфигурации $\overline{f} = (f, n)$, расширенная локальная функция переходов для которых $\overline{\varphi} = (\varphi, \text{id})$ (id — тождественное отображение) удовлетворяет общему определению однородной структуры. Всевозможные конфигурации над \mathbb{Z}^2 образуют пространство конфигураций $\mathbb{K}(S)$. Оно является линейным пространством над полем Z_2 .

Рассмотрим модель развития конфликта в смешанном обществе. Здесь признаком, различающим ячейки в \mathbb{Z}^2 , является *национальность*, определяемая как функция $n : S \rightarrow Z_2$.

Определение 4. $W : \mathbb{K}(S) \rightarrow \mathbb{K}(S)$ — линейный оператор, такой что

$$Wf(\alpha) = \sum_{\beta \in V} f(\alpha + \beta).$$

Определение 5. Оператор перехода в модели смешанного общества $(\Phi f)(\alpha)$ выглядит следующим образом:

$$(\Phi f)(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists k_{1-n(\alpha)} \beta_i \in V(\alpha), n(\beta) \neq n(\alpha) \text{ и } f(\beta) = 1, \\ s(Wf(\alpha) - P_i), & \text{где } i = f(\alpha), \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Определение 6. Пусть $f, g \in \mathbb{K}(S)$ — конфигурации. Тогда $f \leq g$, если $\forall \alpha \in S f(\alpha) \leq g(\alpha)$.

Определение 7. Пусть $\Delta_f^{t+1} = \Phi^{t+1}(f) - \Phi^t(f)$ — количество клеток, ставших активными на шаге $t + 1$.

k_i — порог перехода клетки в активное состояние в зависимости от числа активных клеток другой национальности. P_i — пороги перехода клетки в активное состояние (P_0) и спокойное состояние (P_1).

2. Основные теоремы и утверждения

Данная теорема показывает, что для локализации конфликта достаточно «двойное» кольцо однородных индивидуумов.

Теорема 1. При $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$, если $\exists B \subset \mathbb{Z}^2$ такое, что $\forall \alpha, \beta \in V(V(B))$, $n(\alpha) = n(\beta)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus (V(V(B)))$ $f(\alpha) = 0$, то $\forall t \in \mathbb{N}$, $\Phi^t f(\alpha) = 0 \forall \alpha \in S \setminus B$.

Следующая теорема предоставляет достаточное условие локализации конфликта.

Теорема 2. Пусть дана модель γ с заданными параметрами P_0, P_1, k_0, k_1 . Возьмем модель γ' с параметрами $P'_0 = P_0, P'_1 = 1, k'_0 = k_0, k'_1 = k_1$. Тогда, если для модели γ' $\exists B \subset \mathbb{Z}^2$ и $T(P'_0, P'_1, k'_1, k'_0)$, такие что $\forall t > T(P'_0, P'_1, k'_1, k'_0) \forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus B$, $f(\alpha) = 0$, то и для модели $\gamma \forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus B$, $f(\alpha) = 0$.

Доказательство теоремы 1

Предположим противное. Пусть $\exists t, \alpha \in S \setminus (V(V(B)))$, что $\Phi^t f(\alpha) = 1$. Но в силу $f(\alpha) = 0$, существует такое t_1 , что $\Phi^{t_1} f(\alpha) = 0$ и $\Phi^{t_1+1} f(\alpha) = 1$. Так как $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$, из этого следует, что $\exists \beta \in V(\alpha)$ с $n(\alpha) \neq n(\beta)$ и $\Phi^{t_1} f(\beta) = 1$. Из-за симметричности V $\alpha \in V(\beta)$ и, отсюда, $\beta \in B$, так как иначе бы $\alpha \in V(B)$. Получаем, что $f(\beta) = 0$ и $t_1 > 0$.

Далее $\exists t_2 < t_1$ такое, что $\Phi^{t_2} f(\beta) = 0$ и $\Phi^{t_2+1} f(\beta) = 1$. Опять же из-за $P_0 \geq |V|$, $P_1 \geq |V|$, $\exists \gamma \in V(\beta)$, такое, что $\Phi^{t_2} f(\gamma) = 1$ и $n(\gamma) \neq n(\beta)$.

Повторяя таким образом процесс, мы получаем последовательность $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\alpha_n \in B$, причем в этой последовательности есть как минимум 3 члена, $\alpha_{n-1} \in V(\alpha_n)$, $\alpha_{n-1} \in V(B)$ и $\alpha_{n-1} \in V(V(B))$. Аналогично, $\alpha_{n-2} \in V(\alpha_{n-1})$ и $\alpha_{n-2} \in V(V(B))$, но $n(\alpha_{n-2}) \neq n(\alpha_{n-1})$, и мы получаем противоречие с условиями теоремы.

Для доказательства теоремы 2 понадобится утверждение:

Утверждение 1. При $P_1 \leq P_0$ для любых $f, g \in \mathbb{K}(S)$, $f \leq g$, имеем $\Phi f \leq \Phi g$.

Доказательство. Сначала докажем для однородного общества, а затем и для смешанного. Предположим обратное, то есть $\exists \alpha \in S$, $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ и $\Phi f(\alpha) > \Phi g(\alpha)$. Отсюда $\Phi f(\alpha) = 1$, $\Phi g(\alpha) = 0$. Если $f \leq g$, то $Wf(\alpha) \leq Wg(\alpha)$. Обозначим $\omega_1 = Wf(\alpha)$, $\omega_2 = Wg(\alpha)$. Имеем $\omega_1 \leq \omega_2$. Возможны следующие три случая:

а) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 0$. Тогда $\omega_2 \leq P_0$, $\omega_1 > P_0$ и $\omega_1 > \omega_2$, получаем противоречие.

б) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $\omega_1 > P_0$, $\omega_2 \leq P_1$ и $\omega_2 \leq P_1 \leq P_0 \leq \omega_1$, получаем противоречие.

в) $f(\alpha) = 1$, $g(\alpha) = 1$. Тогда $\omega_1 > P_1$, $\omega_2 \leq P_1$ и $\omega_1 > \omega_2$, получаем противоречие.

Для однородного случая утверждение доказано. В неоднородном случае имеем:

Если $\forall \beta \in V(\alpha) n(\beta) = n(\alpha)$, то доказательство не меняется.

Если же $\exists \beta \in V(\alpha)$, что $n(\beta) \neq n(\alpha)$ и $f(\beta) = 1$, то $\Phi f(\alpha) = 1$, и $g(\beta)$ должно равняться 1 (из-за $f \leq g$), откуда получаем $\Phi g(\alpha) = 1$, и все верно.

Если при всех $\beta \in V(\alpha) n(\beta) \neq n(\alpha)$, но $g(\beta) = 0$, то для тех же β получаем $f(\beta) = 0$ и, применяя старое доказательство, приходим к $\Phi f \leq \Phi g$.

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим оператор перехода Φ . Для моделей γ и γ' он будет различен только в случае использования параметра P_1 . Это означает, что за один такт функционирования однородной структуры в модели γ' меньше активных клеток перейдет в пассивное состояние, так как $P'_1 \leq P_1$. Это означает, что на каждом такте $f \leq f'$. Таким образом, если $\exists B, T$, удовлетворяющие условию теоремы, то и для модели γ будет выполнено условие $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus B f(\alpha) = 0$, так как $f \leq f'$. Укажем алгоритм нахождения множества B . Из утверждения следует, что $\Phi^t f \leq \Phi^{t+1} f$, соответственно, если взять T , такое что $\Phi^T(f) = \Phi^{T+1}(f)$.

Введем ограничение на модель. Пусть задана граница Γ и внутреннее множество B . Ограничение состоит в следующем — конфликт не может распространяться за пределы границы Γ . Тогда число всевозможных конфигураций множества B можно ограничить сверху следующим образом:

$$N \leq |\overline{E_n}|^{|B|}.$$

Данная оценка сильно груба, так как уже для $|\overline{E_n}| = 4$, число справа очень велико.

Для уменьшения оценки предлагается следующий алгоритм.

1 шаг. Внутри множества B выделяются клетки α_i , такие что

$$\sum_{\beta \in V(\alpha_i)} f(\beta) \leq k_{1-n(\alpha_i)}, \quad n(\beta) \neq n(\alpha_i).$$

Такие клетки не могут стать активными и они помечаются.

2 шаг. Среди оставшихся непомяченными клеток, снова выделяются клетки, описанные на шаге 1, только теперь в подсчете не участвуют клетки, отмеченные на шаге 1.

Шаг 2 повторяется до тех пор, пока появляются новые отмеченные клетки. Как результат работы алгоритма, мы получим неотмеченные клетки, которые (и только они) могут стать активными в процессе функционирования модели. Связные множества B_1, B_2, \dots, B_m таких клеток назовем *кластерами*. Тогда число исследуемых конфигураций можно уменьшить:

$$N \leq \sum_{i=1}^m \overline{E_n}^{|B_i|}.$$

Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [2] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.