

Числовая система на геометрических прогрессиях и аналоговые преобразования

Н. А. Филиппов

Окончательному решению логической задачи искусственного интеллекта как правило предшествует получение количественных значений аргументов, а иногда и различные их аналоговые преобразования. Естественно, показатели обоих этих типов обработки информации важны, и потому их улучшению, в особенности первому направлению — количественному преобразованию, посвящена данная работа.

Количественные значения параметров в современной информатике, представляемые, как правило, во-первых, числами в кодах той или иной системы счисления (СС), означающих в общем виде количества содержащихся в них единиц измерения, во-вторых, той или иной их функцией, как правило — логарифмической.

Сочетание кодов именованных чисел с кодами их логарифмов составляет числовую систему (ЧС). Именно совместное, а не раздельное рассмотрение СС и логарифмов полезно, во-первых, по той причине, что использование последних как средства вычислений, а не только вычисление самих логарифмических функций, начато еще в средние века: теоретически Михаилом Штифелем [1, стр. 24], практически Бюрги и Непером [1, стр. 27], затем Оранским [2], более результативно Kingsbury N. C. [3], Паршиным, а ныне Коноваловым С. С. [4], во-вторых, к более детальному изучению логарифмов в школе и вузах призывал Г. Г. Гинкин [1] и другие, в-третьих, мною разработана ЧС, органически сочетающая в себе СС и логарифмы [5–11].

1. Современные СС

Значения именованных параметров и их логарифмов представляются кодами систем счисления (СС). СС, коды которых являются суммой значений цифр их разрядов, определяемых как их собственными значениями, так и их взаимными положениями, называются мною аддитивными СС (АСС) [5–10].

Основой всех АСС [1–15], именно их базисом, являются геометрические прогрессии (ГП), обеспечивающие простоту кодирования и чтения кодов АСС. Так, даже Римская СС имеет базис из членов ГП со знаменателем, равным 10: ее исходные числа-цифры: I, X, C, M, равные соответственно 1, 10, 100, 1000, составляют члены ГП $10^0, 10^1, 10^2, 10^3$. Остальные же, вдвое меньшие ее числа-цифры V, L, D относительно X, C, M, во-первых, при сопоставлении попарно друг с другом проявляют элементы двоичной СС ($X/V = C/L = D/C = 2$), во-вторых, включают в себя в качестве единого символа-цифры сомножитель V (пять) со степенью, основание которой равно 10 — основанию десятичной СС, а показатели равны 0, 1, 2: $V = 5 \cdot 10^0$, $L = 5 \cdot 10^1$, $D = 5 \cdot 10^2$. Этот факт и равенство всех операций деления этих двух триад чисел-цифр: $V/I = L/X = D/C = 5$, говорят о наличии элементов и пятиричной СС в Римской СС. Она, помимо сказанного, имеет связь с симметричными СС [13], проявляющуюся в использовании в ней наряду с операцией сложения и операции вычитания, только последняя определяется простановкой меньшей цифры-числа левее большей: если записано число VI (пять и справа один) данные цифры-числа складываются, а они же записаны в обратном порядке — вычитаются. В симметричных же системах счисления перед цифрой ставится знак «+», при этом она суммируется со всеми значениями цифр с такими знаками, или «-», который заставляет ее значение в данном разряде вычитать из общего кода числа.

Базис любой современной АСС в общем виде, именно с целочисленными их основаниями « a », составляется из следующих чисел — членов ГП:

$$\langle \dots a^{-n}, \dots, a^{-j}, \dots, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots, a^j, \dots, a^m \dots \rangle. \quad (1)$$

Отсюда *исходным алгоритмом* экономного кодирования конкретного значения Z_x параметра Z является процесс пакетирования принятых

исходных единиц (ие) измерения параметров Z $1_{ие} = a^0$ по « a » штук. Каждый пакет из « a » единиц становится первой новой укрупненной единицей $1_{уе1} = a_{ие}$. Ее также пакетируют по « a » этих пакетов. Получаем вторую укрупненную единицу $1_{уе2} = a_{уе1} = a^2_{ие}$. Дальнейшие аналогичные рекуррентные пакетирования по « a » получаемых пакетов до m -й новой укрупненной единицы $1_{уем} = a^m_{ие}$ приводят к формированию ГП:

$$\langle a^0, a^1, a^2, \dots, a^j, \dots, a^m \rangle. \quad (2)$$

Дробные числа, то есть $Z < 1_{ие}$, человечество вначале представляло суммой аликвотных дробей (содержащих в числителях только единицы). Они не имеют явного базиса их кодирования на основе какой-либо убывающей ГП. В обычных СС она, как базис для кодирования чисел меньшей единицы, формируется рекуррентным делением $1_{ие}$ на « a » n раз, обеспечивая получение a^{-n} -й части $1_{ие}$. При этом получается следующий кортеж членов ГП:

$$\langle a^{-1}, a^{-2}, \dots, a^{-j}, \dots, a^{-n} \rangle. \quad (3)$$

Соединяя (2) с (3), получаем (1). В них $\pm j$ — любой промежуточный номер кортежа, именуемый разрядом кода. Кодирование Z_x осуществляется суммированием чисел (1), каждое из которых предварительно умножается на один из « a » сомножителей — цифр j -го разряда.

$$k_j \in \{0, 1, 2, \dots, (a - 1)\}. \quad (4)$$

При этом *полная свернутая форма кодов АСС* с любым целочисленным основанием a имеет вид:

$$Z \approx \pm Z_0 \sum_{j=-n}^m k_j a^j, \quad (5)$$

a предельно-экономная условная форма, расшифровка которой определяется взаимными положениями их цифр при заданном основании, имеет известный каждому школьнику вид:

$$Z_x \approx \pm Z_0 (k_m k_{m-1} \dots k_j \dots k_1 k_0, k_{-1} k_{-2} \dots k_{-j} \dots k_{-n})_{a, Z_0}. \quad (6)$$

Обычно это выражение пишется более просто: Z_0 опускается из-за его равенства как правило единице, основание « a » также в большинстве случаев опускается из-за его известности по контексту, и как следствие этого, круглые скобки также не пишутся, что часто делается и при написании индекса значения « a ». В (5) и (6) добавлены, во-первых, \pm — для указания знака Z_x , во-вторых, знак Z_0 — масштаб Z с указанием его исходных единиц измерения (1ие), иначе — размерности или наименования параметра. Обычно $Z_0 = 1$ и потому он другими авторами не пишется. Однако, необходимость технической реализации АСС, например, с $a = 10$ на основе АСС с $a = 2$ (формированием, например, $1 \leq n \leq 1000$ милливольтов из одного вольта, когда $a^9 = 512$, $a^{10} = 1024$, то есть АСС с $a = 2$ не имеет 1000 с целочисленным показателем степени 2), заставило меня ввести в (5) Z_0 , которое в данном случае равно 1,024. Вместе с этим, во-первых, если Z — абстрактное число, то Z_0 только масштаб Z , во-вторых, Z_0 может служить масштабным коэффициентом перевода кода значения одного наименования в код с другим наименованием, например, фунты переводятся им в килограммы. АСС (5) в своей основе имеют арифметические прогрессии (АП) с разностью, равной единице наименьшего разряда: для целых чисел это 1ие, а для дробных — $1 \cdot a^{-n}$ ие. Отсюда *второй алгоритм* получения (5) выглядит так:

$$\begin{aligned} Z &\approx \pm r \cdot i = \pm r \cdot a^n \cdot i \cdot a^{-n} = \\ &= \pm r \cdot a^n \sum_{j=0}^{m+n} k_j a^j \cdot a^{-n} = \pm r \cdot a^n \sum_{j=-n}^m k_j a^j = \pm Z_0 \sum_{j=-n}^m k_j a^j. \quad (7) \end{aligned}$$

Наконец, *третий алгоритм* [5–8] получения полной свернутой формулы кодирования Z (5) методом индукции (исходя из его знания всеми со школьной скамьи) производится раскрытием значения кода любого конкретного числа, состоящего из целой и дробной частей, например десятичного числа 236,27, следующим образом: $Z_x \approx 236,27 = 200 + 30 + 6 + 0,2 + 0,07 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$. Заменяя в последнем все числа 10 (основание АСС) на « a », показатели степеней на $\pm j$ — номера разрядов, множители степеней на $k_{\pm j}$ — цифры кода, а все знаки сложения на обобщенный знак \sum , получим (5).

АСС со смешанными целочисленными основаниями ($АСС_{a=пер}$) [15], когда каждый разряд имеет свое количество « a » всех различных цифр, в обобщенном полном, но свернутом виде для целых чисел выглядит так:

$$Z \approx \pm Z_0 \sum_{j=-n}^m k_j \prod_{p=0}^{j-1} a_p, \quad (8)$$

для дробных ($Z < 1$) —

$$Z \approx \pm Z_0 \sum_{j=-n}^{-1} k_j \prod_{p=-j}^{-1} (a_p)^{-1}, \quad (9)$$

а в общем виде ($0 < |Z| < \infty$)

$$Z \approx \pm Z_0 \sum_{j=-n}^{-1} k_j \begin{cases} \prod_{p=j}^{j-1} a_p, & \text{при } j \geq 0, \\ \prod_{p=-j}^{-1} a_p, & \text{при } j < 0, \end{cases} \quad (10)$$

в каждом из которых любой индекс от обозначенного под каждым символом многократного действия сложения или умножения повышается на +1 до обозначенного над ним, а цифры j -го разряда

$$k_j \in \{0, 1, 2, \dots, (a_j - 1)\}. \quad (11)$$

Минимальная форма записи кодов таких АСС может иметь вид:

$$Z \approx \pm \frac{K_m K_{m-1} \dots K_j \dots K_1 K_0}{a_m a_{m-1} \dots a_j \dots a_1 a_0}, \frac{K_{-1} K_{-2} \dots K_{-j} \dots K_{-(n-1)} K_{-n}}{a_{-1} a_{-2} \dots a_{-j} \dots a_{-(n-1)} a_{-n}}, \quad (12)$$

в котором знаменатели каждой цифры являются основанием данного разряда. Сами же числа могут записываться более просто — в виде последовательности цифр, индексы которых представляют основания данных разрядов, например $+243567,2378$.

Преимущества данной АСС_{a=пер}. Коды таких АСС (8), во-первых, являются основой математической реализации технических сигналов, количество вариаций (цифр разрядов) которых для каждого

из их признаков (разряда) свое, например, многокачественных сигналов одноимпульсного избирания [15], имеющих несколько параметров (разрядов), каждый из которых имеет свое количество вариаций (цифр), во-вторых, они, имея целочисленные основания, интегрально могут быть ближе к основанию $e = 2,718\dots$, при котором имеет место минимальная затрата технических средств для представления таких кодов, в-третьих, они могут служить для целей криптографии (при неизвестных основаниях неизвестно значение кода).

АСС с иррациональными основаниями (АСС $_{\alpha}$). Первой из них является АСС Бергмана [17].

Ее базисом является следующий кортеж членов ГП — разновидность (1), именно со знаменателем $\alpha = 1,61803398875\dots$, называемым золотым сечением, или — золотой пропорцией:

$$\langle \dots \alpha^{-n}, \dots, \alpha^{-i}, \dots, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^m \dots \rangle, \quad (13)$$

со значениями:

$$\langle \dots 0,146; 0,236; 0,382; 0,618; 1; 1,618; 2,618; 4,236; 6,854; \dots \rangle. \quad (13a)$$

Кодирование любых вещественных одномерных чисел данной АСС производится разновидностью (5), в которой вместо « a » (целое число) используется α — иррациональное, меньшее числа 2. Отсюда видно, что k_j согласно (4) должно быть равным 0 и 0,618. Поскольку часть цифры быть не может, то в данной АСС все же используется две цифры: 0 и 1. Они говорят о том, что данное число базиса (10а) соответственно не используется и используется, а номера кортежей (10), (10а) являются номерами разрядов кодов чисел данной АСС.

Важнейшее свойство этих АСС:

$$\alpha^{i-1} + \alpha^i = \alpha^{i+1}, \quad (14)$$

то есть, сумма двух соседних чисел данного базиса равна соседнему старшему числу. Отсюда вытекает органическое свойство кодов данных АСС — возможность обнаружения части погрешностей передаваемых или записываемых кодов: из-за равенства левой части (14) правой, единица правой части равна двум единицам левой, любые

две соседние единицы можно заменять на нули и единицу соседнего старшего разряда. Данная нормализация приводит к отсутствию в кодах двух соседних единиц и их появление говорит об искажении кода.

А. П. Стахов [19] расширил эту АСС до

$$\alpha^{i-k} + \alpha^i = \alpha^{i+1}, \quad (15)$$

что позволило ему увидеть, что при $k = 0$ АСС Бергмана превращается в обычную двоичную АСС, а при $k \rightarrow \infty$, она превращается в унарную АСС (с $a = 1$), то есть АСС Бергмана-Стахова заполнила промежуток между АСС с $a = 2$ и унитарной СС.

При $k > 1$ значение знаменателя ГП α становится меньше 1,618... и при $k \rightarrow \infty$, она стремится к 1. Избыточность количества кодов, а потому и возможности обнаружения погрешностей кодов, при этом увеличиваются.

Многие расширены возможности АСС Бергмана и Стахова за счет принятия за результат измерения (кодирования) по каждому разряду не меньшее или равное, а большее или равное ему число базиса. При этом первая старшая единица кода числа остается положительной, а остальные становятся отрицательными, то есть принимают свойство симметричных СС [13]. При этом α остается равным 1,618... Осуществлено и дальнейшее расширение возможностей этих АСС — принятием за результат кодирования каждой цифрой всех разрядов такого промежуточного значения между соседними числами базиса, при котором значения модулей относительных погрешностей результатов кодирования каждого разряда разных знаков одинаковы. При этом, если знак первой значащей цифры остается положительным, то знаки остальных единиц могут быть как положительными, так и отрицательными, что определяется значением кодируемой величины. Знаменатель ГП кортежа чисел базиса данной АСС сократился. Относительная максимальная процентная погрешность первой старшей единицы с 61,8% (у кодов Бергмана) снижается до 38,6% и 28,6% в последнем случае. Дальнейшее сокращение знаменателя ГП приводит к сокращению относительной погрешности от одной первой старшей значащей цифры до допустимого значения, когда уже не требуются остальные разряды. АСС при этом вырождается в одно, именно

старшее, слагаемое. Однако, чтобы этой одной единицей кодировать число, необходимо указывать ее положение в базисе соответственно уплотненном из-за уменьшения его знаменателя. Это увеличивает до недопустимо большого количество разрядов кода с одной единицей. Так, для удовлетворения относительной погрешности, равной 0,005%, код числа 10 должен после 1 содержать 23027 нулей, после которых ставится разделительная запятая, а для кодирования числа 0,1 необходим код в виде «0,» с последующими 23027 нулями, после которых ставится 1. Чтобы выйти из этого положения, то есть чтобы заменить такие недопустимо громоздкие коды необходимо сами положения единицы в базисе (10) (ее номера в базисе) кодировать как целые числа, что приводит к ранее найденной мною МСС (31).

2. Особенности известных СС

Коды любых современных СС с целочисленными основаниями представляют значения параметров ближайшими значениями членов арифметических прогрессий (АП) с разностью r , равной единице наименьшего дробного разряда: для целых чисел $r = 1$, для вещественных $r = 1 \cdot a^{-n}$, где a — основание СС, а n — номер наименьшего дробного разряда (5). Следовательно, современные СС, являясь из-за использования в качестве их оснований АП аддитивными (АСС), отличаются равнозначностью по абсолютной погрешности ΔZ всех результатов их кодирования (измерения), равной r или в крайнем случае $r/2$.

Преимущества АСС с целочисленными постоянными основаниями — простота кодирования Z_x (операция суммирования даже не замечается), совмещенная с представлением их значений в их исходных единицах 1ие.

Недостатки АСС с целочисленными основаниями. Если данная r достаточна для малого значения параметра, то для всех больших него, данная разность r АП излишне мала, отчего количество всех разных кодов избыточно, следовательно аппаратура, записывающая числа в ЦВМ (компьютеры) неэкономна. Данные АСС кодируют любые Z_x как точки числовой оси, так и результаты измерений и вычислений, с абсолютными погрешностями [5]

$$\Delta Z_i = Z_{\Pi i} - Z_x, \quad (16)$$

максимальные значения которых $\Delta Z_{\max i}$ без учета случайных погрешностей аналоговых элементов устройств постоянны по всему диапазону, то есть

$$\Delta Z_{\max i} = Z_{0i+1} - Z_{0i} = \text{const} = \Delta Z_{\max}, \quad (17)$$

в которых Z_x — истинное значение параметра Z , $Z_{\Pi i}$ — представительное значение Z_x , Z_{0i} — i -е образцовое значение рабочей меры (числовой шкалы). Следствием (17) является, во-первых, неравноточность по относительной погрешности представления всех Z_x значениями $Z_{\Pi i}$: если ΔZ_{\max} выбран достаточным для Z_{\min} — минимального Z_x , то для всех остальных $Z_x > Z_{\min}$, относительная погрешность будет излишне малой, во-вторых, избыточность количества всех взаимноотличных кодов $\Delta Z_{\min} \leq Z_x \leq \Delta Z_{\max}$, в-третьих, АСС органически не содержат в себе целочисленные логарифмы, следовательно они не могут обеспечить повышенное быстродействие.

Преодоление недостатков АСС достигнуто мною, как и предлагал Г. Г. Гинкин [1], использованием в качестве основы СС соседних значений членов ГП [11, 5], то есть если использовать в качестве показателя точности не абсолютную погрешность, а относительную $\gamma = \Delta Z_i / Z_x \approx \Delta Z_i / Z_{\Pi i}$, и принять ее постоянной по всему диапазону значений Z_x параметра Z , то представительные значения $Z_{\Pi i}$ (коды Z_x), составят члены геометрических прогрессий (ГП).

Действительно, алгоритм детерминированного (беспогрешностного) измерения и кодирования Z_x (получения $Z_{\Pi i}$) имеет вид [5]:

$$Z_x \approx Z_{\Pi i} \text{ при } (Z_{0i} \leq Z_x < Z_{0i+1}), \quad (18)$$

а вероятностного —

$$Z_x \approx Z_{\Pi i} \text{ при } (Z_{0i} \lesssim Z_x \lessdot Z_{0i+1}), \quad (18a)$$

в которых символы \leq и $<$ со знаками \sim над ними являются вероятностными значениями символов \lesssim и \lessdot соответственно. Если при использовании АП в качестве основы кодирования Z_x кортежи значений Z_{0i} составляют значения членов АП, когда $Z_{\Pi i} = Z_{0i}$, или

$Z_{\text{п}i} = Z_{\text{o}i+1}$, или $Z_{\text{п}i} = (Z_{\text{o}i} + Z_{\text{o}i+1})/2$, то из них и вытекают приведенные выше недостатки АП: неравноточность по относительной погрешности множеств $Z_{\text{п}i}$, являющаяся следствием постоянства максимума $\Delta Z_{\text{max } i} = \text{const}$ (17) при различных значениях Z_x ; избыточность же количества взаимно отличных кодов $Z_{\text{п}i}$ со всеми ее последствиями, приведенными выше, является следствием предшествующей особенности АП, третий недостаток АП является следствием невозможности прямого получения из АП логарифмов, уыбстряющих вычисления, а четвертый состоит в том, что работу любых биорецепторов (слуха и зрения в частности) согласно закону Вебера-Фехнера [1], описывает количественно не АП, а ГП.

Относительная погрешность определяется простым γ (или процентным $\delta = \gamma \cdot 100\%$) отношением

$$\gamma_i = (\Delta Z_i / Z) \approx (\Delta Z / Z_{\text{п}i}). \quad (19)$$

Если на (19) наложить естественное для многих случаев условие

$$\delta_{\text{max } i} = \Delta Z_{\text{max } i} / Z_{\text{п}i} = \text{const} = K, \quad (20)$$

откуда

$$\Delta Z_{\text{max } i} = Z_{\text{п}i} K, \quad (21)$$

то при $Z_{\text{п}i} = Z_{\text{o}i}$ с учетом непрерывности Z_x , при котором значение $Z_{\text{п}i+1} = Z_{\text{п}i} + \Delta Z_{\text{max } i} = Z_{\text{п}i} + Z_{\text{п}i} K = Z_{\text{п}i} (1 + K) = Z_{\text{п}i} C$, мы приходим к необходимости использования в качестве основы информатики числовых шкал на основе ГП, когда в общем же случае

$$Z_{\text{п}i} = Z_{\text{по}} C^{\pm i}. \quad (22)$$

Графически для $Z_{\text{п}i} = Z_{\text{o}i}$, когда все $\Delta Z_{\text{max } i} > 0$, их значения представлены на рис. 1, а для $|+\delta_{\text{max}}| = |-\delta_{\text{max}}|$, когда $|+\alpha| = |-\alpha|$, $Z_{\text{п}i} \neq Z_{\text{o}i}$, левая часть $\Delta Z_{\text{max } i}$ (положительная) меньше правой, все составляющие идеальной числовой шкалы представлены на рис. 2, на котором значение $|\alpha|$ вдвое меньше $|\alpha|$ рис. 1, только уменьшено вдвое. Из рис. 2 видно, что правая часть $\Delta Z_{\text{max } i}$ равна левой части очередного шага квантования. Построение этой оптимальной числовой шкалы начинается с точки $Z_{\text{п}i}$, как в порядке, указанном стрелками. Практичнее это делать начиная с $Z_{\text{по}} = 1$. Данная шкала по

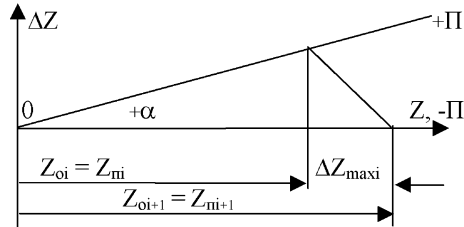


Рис. 1.

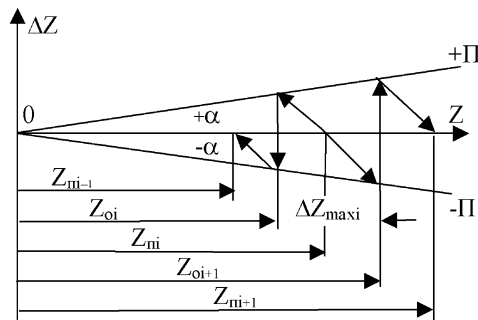


Рис. 2.

сравнению со шкалой рис. 1 более, чем вдвое, содержит количество Z_{ni} при той же $|\delta_{\max}|$ на одинаковых сравниваемых диапазонах Z .

В связи с тем, что (см. рис. 1) при принятых равных масштабах осей Z и ΔZ значение $\Delta Z_{\max i} / Z_{oi} = \operatorname{tg} \alpha$, а из (19) оно при $Z_{ni} = Z_{oi}$ равно K , то (см. и вывод (22))

$$1 + K = 1 + \operatorname{tg} \alpha = C, \tag{23}$$

а потому (6) имеет и вид следующей *тангенциальной функции*

$$Z_{ni} = Z_{\text{по}}(1 + \operatorname{tg} \alpha)^{\pm i} = Z_{\text{по}} C^{\pm i}. \tag{24}$$

Числовая шкала рис. 2, в которой отрицательная характеристика преобразования $0, -\Pi$ с углом $-\alpha$, а положительная $0, +\Pi$ с углом $+\alpha = |-\alpha|$ (на рис. 1 $-\alpha = 0$), а значения $\Delta Z_{\max ni} + \Delta Z_{\max ki} = \Delta Z_{\max i}$

$$\Delta Z_{\max ni} = Z_{oi} \cdot \operatorname{tg}(+\alpha), \tag{25}$$

$$-\Delta Z_{\max ki} = Z_{oi+1} \cdot \operatorname{tg}(-\alpha). \quad (26)$$

Отсюда $Z_{oi} = Z_{oi} + Z_{oi} \operatorname{tg}(+\alpha) + Z_{oi+1} \operatorname{tg}(-\alpha) = Z_{oi} + 1$, из чего $Z_{oi}(1 + \operatorname{tg}(+\alpha)) = Z_{oi+1}(1 - |\operatorname{tg}(-\alpha)|)$ и потому при $|(+\alpha)| = |(-\alpha)| = \alpha$

$$\begin{aligned} Z_{oi+1}/Z_{oi} &= (1 + |\operatorname{tg}(+\alpha)|)/(1 - |\operatorname{tg}(-\alpha)|) = \\ &= C = (1 + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \operatorname{tg} \alpha) = (1 + \gamma_{\max})/(1 - \gamma_{\max}) = \\ &= (100 + |\delta_{\max}|)/(100 - |\delta_{\max}|), \quad (27) \end{aligned}$$

δ_{\max} — максимальная допустимая процентная относительная погрешность кодирования Z_x кодами Z_{pi} .

Образцовые же значения числовой шкалы Z_{oi} и их разности, иначе идеальные шаги квантования $\Delta Z_{\max i}$ составляют члены ГП с тем же знаменателем C :

$$Z_{oi} = Z_{o0} C^{\pm i}, \quad (28)$$

$$\Delta Z_{\max i} = Z_{oi+1} - Z_{oi} = \Delta Z_{\max 0} C^{\pm i}. \quad (29)$$

(Если начала всех членов кортежа ГП $\Delta Z_{\max 0} C^{\pm i}$ совместить с началом числовой оси, то их окончания относительно начала числовой оси составят новый кортеж с тем же знаменателем C . В нем можно аналогично найти разности соседних их членов, совместить их с началом числовой оси и вновь получить кортеж членов ГП. Таким образом любой кортеж членов ГП может представляться сросшейся матешкой, между членами которой можно найти количественные взаимосвязи, полезные для технической их реализации).

Коды Z_x в их размерностях в свернутом обобщенном виде МСС, и промежуточные ее коды совместно с их выводом, учитывая (2) и (3), выглядят следующим образом:

$$Z_x \approx \pm Z_{\text{по}} C^{\pm i} = \quad (30)$$

$$= \pm Z_{\text{по}} C^{\pm \sum_{j=0}^m k_j a^j} = \quad (30a)$$

$$= Z_{\text{по}} C^{\pm(k_m a^m + k_{m-1} a^{m-1} + \dots + k_j a^j + \dots + k_1 a^1 + k_0 a^0)} = \quad (30б)$$

$$= Z_{\text{по}} C^{\pm k_m a^m} \cdot C^{\pm k_{m-1} a^{m-1}} \cdot \dots \cdot C^{\pm k_j a^j} \cdot \dots \cdot C^{\pm k_1 a^1} \cdot C^{\pm k_0 a^0} = \quad (30в)$$

$$= \operatorname{sign}(Z_x) |Z_{\text{по}}| \prod_{j=0}^m C^{\operatorname{sign}(i) k_j a^j} = \quad (31)$$

$$= \begin{cases} -|Z_0| \prod_{j=0}^m C^{+k_j a^j} & \text{при } -\infty < Z \leq -|Z_{00}|, \\ -|Z_0| \prod_{j=0}^m C^{-k_j a^j} & \text{при } -|Z_{00}| < Z < 0, \\ +|Z_0| \prod_{j=0}^m C^{-k_j a^j} & \text{при } 0 < Z < |Z_{00}|, \\ +|Z_0| \prod_{j=0}^m C^{+k_j a^j} & \text{при } |Z_{00}| \leq Z < +\infty, \end{cases} \quad (31a)$$

а неполная условная структура МСС представляется следующей формальной записью:

$$\begin{aligned} Z_x \sqsubset \text{sign}(Z) \| \text{sign}(i)(K_m K_{m-1} \dots K_j \dots K_1 K_0)_{a,c,z_0} = \\ = \text{sign}(Z) \| \text{sign}(i) |i|_{a,c,z_0} \equiv \pm(\pm i)_{a,c,z_0}, \end{aligned} \quad (32)$$

где i — номера членов ГП, включая 0, a — основание АСС (в $\pm \sum k_j a^j$, кодирующем i) и количество всех взаимно отличных цифр, используемых в МСС (значения « a » в АСС и МСС могут быть и разными), j — номер разряда, $k_j \in \{1, 2, \dots, (a-1)\}$ — цифры j -го разряда, $Z_{\text{но}}$ — нулевой член представительных значений $Z_{\text{пи}}$, m — количество разрядов, уменьшенное на единицу (они начинаются с нулевого), $\|$ — символ учета знака предшествующего числа, \sqsubset — символ дискретного равенства. Из данной цепочки видно, что i кодируется АСС, входя в показатель степени члена ГП, а затем эта АСС используется в самой МСС, то есть МСС впитала в себя АСС.

Разновидности МСС (31) из двух и S кодов следующие:

МСС из двух кодов получается при наложении на $\pm Z_0 C^{\pm i}$ при $Z_0 = 1$ условия

$$\pm Z_0 C^{\pm i + n(\pm p)} / \pm Z_0 C^{\pm i} = C^{n(\pm p)} = a^{\pm p}. \quad (33)$$

При нем (31) будет равно

$$Z_x \approx Z_i = \pm Z_0 C^{\pm i} = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} = \text{sign}(Z_x) |Z_0| \prod_{j=0}^{\bar{m}} C^{k_j a^j} a^{\pm p}, \quad (34)$$

где $i_0 \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$, $\bar{m} < m, n, p$ — целые числа, а при $(|-i_{\text{max}}| + |+i_{\text{max}}| + 1) = n(|-p_{\text{max}}| + |p_{\text{max}}| + 1)$ все множество

различных Z_i ($| -i_{\max} | + | +i_{\max} | + 1 \ll (n + (| -p_{\max} | + | +p_{\max} | + 1))$, то есть, (34) технически реализуется экономнее (31), а код любого Z_{i+n} отличается от кода Z_i только смещением его разделительной запятой на один разряд вправо.

Условные коды чисел Z МСС (34) представляются следующим образом:

$$Z_x \approx Z_i = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} = \\ = \text{sign}(Z) \parallel \text{sign}(p) [(K_m K_{m-1} \dots K_j \dots K_1 K_0)_{a,C,Z_0}] a^{\pm p}, \quad (35)$$

в котором \parallel — «символ учета знака предшествующего числа» — необходим, чтобы алгебраически не взаимодействовали два последовательных знака \pm и не свелись бы при этом к двум знакам вместо необходимых четырех комбинаций $++$, $+-$, $-+$ и $--$.

Поскольку в (34) значения a и C заданы, к тому же C — дробное, то искомое по (33) n оказывается вещественным, а оно необходимо целое, следовательно, беря ближайшее целое $n_{\text{ц}} = n + (1 - \text{ост})$, где «ост» — дробная часть вычисленного n , для удовлетворения равенства (33) необходимо уточнить значение C исходя из $C^{n_{\text{ц}}} = a$, получаемого при $p = 1$, или извлечением корней $\pm p$ -й степени из обеих частей (33), например выражением $C = \exp(\ln a / n_{\text{ц}})$, но точнее — подбором C . ($n_{\text{ц}}$ лучше брать большим вычисленного, чтобы не увеличить заданное δ_{\max} (31)).

При сокращении $\pm \delta_{\max}$ n пропорционально растет, а $\pm p$ не изменяется. Отсюда вытекает целесообразность разбиения кода (31), не только на два кода (34), но и на три, а в общем случае на s кодов. При этом следует разбивать не (31), а равный ему (34) и именно первую его часть C^{i_0} .

МСС (31) из трех кодов будет выглядеть в виде:

$$Z \approx Z_i = \pm Z_0 C^{\pm i} = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} = \pm Z_0 C^{i_{00}} C^{i_{01} n_0} a^{\pm p} = \\ = \pm Z_0 \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} a^{\pm p}, \quad (36)$$

а из S кодов:

$$Z \approx Z_i = \pm Z_0 C^{\pm i} = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \pm Z_0 C^{i_{00}} C^{i_{01}n_0} C^{i_{02}n_0n_1} \dots C^{i_{0i}n_0n_1n_2\dots n_{i-1}} \dots C^{i_{0s-2}n_0n_1\dots n_{s-3}} a^{\pm p} = \\
 &= \pm Z_0 \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} \dots \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} \dots \prod_{j=0}^m C^{k_j a^j} a^{\pm p}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

В (36) для соблюдения его равенства $C^{i_0} = C^{i_{00}} C^{i_{01}n_0}$ должно соблюдаться равенство $n = m_0 m_1$, но оно может достигаться в общем случае только при вещественных m_0 и m_1 , каковые неприемлемы (это — количества разрядов!) Поэтому вместо них следует брать целые числа, а для того, чтобы удовлетворялось разрушенное упомянутое равенство, следует изменить значение C , желательнее без понижения исходно принятой точности, то есть ближайшие целые для вещественных m_0 и m_1 , назовем их соответственно $m_{0ц}$ и $m_{1ц}$, следует брать большими вещественных, и по их произведению уточнить C , исходя из $C^n = C^{m_{0ц}} C^{m_{1ц}} = C^{m_{0ц}+m_{1ц}} = a$. В случае $m_0 = m_1 = m_q$, когда $m_0 m_1 = n$, значение $m_q = \sqrt{n}$. Оно увеличивается до ближайшего целого $m_{qц}$, по которому уточняется C согласно $C = \exp((\ln m_{qц})/n)$.

Для (37) аналогично уточняется C . Поскольку в (37)

$$n_0 n_1 n_2 \dots n_i \dots n_{s-2} = n, \quad (38)$$

то при $n_0 = n_1 = n_2 = \dots = n_i = \dots = n_{s-2} = n_i$ значение

$$n_i = \sqrt[s-1]{n}. \quad (39)$$

Полученное отсюда вещественное n_s заменяется на ближайшее большее целое $n_{сц}$, и из $(n_{сц})^{s-1} = t$, при котором C^t должно быть равным $C^n = a$, уточняем C согласно $C = \exp(\ln t/n)$.

В случаях, когда $i_{0i} \leq a$, множители $\prod C^{k_j a^j}$ (13) превращаются в $C^{i_{0i}}$, и поскольку $n_0 n_1 n_2 \dots n_i \dots n_{s-2} = n$, то (38) превращается в (10).

Если не использовать сомножитель $a^{\pm p}$, то (37) превращается в исходное (34).

МСС (31) при $a = \text{var}$ превращается в следующую его разновидность:

$$Z \approx Z_i = \pm Z_0 C^{\pm i} = \text{sign}(Z) |Z_0| \prod_{j=0}^m C^{\text{sign}(i)k_j \prod_{p=0}^{j-1} a_p}, \quad (36)$$

где при $j = 0$ верхний предел изменения $l = j - 1 = -1$. Но поскольку $j = -1$ нет, то есть нет a_{-1} , то k_0 ни на что не умножается, а любое k_j умножается на произведение $(a_0 a_1 a_2 \dots a_{j-1})$.

Разновидность (31) с $\pm k_m$. Старший разряд МСС, в отличие от остальных, может иметь множество цифр K_m , во-первых, не равных по количеству принятой ричности a (как в меньшую, так и в большую сторону), во-вторых, цифры K_m могут быть разнознаковыми, то есть $K_m \in \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$. При этом модуль отрицательного числа $-K_{m(\max)}$ может быть не равным модулю положительного числа $+K_{m(\max)}$, то есть $|-K_{m(\max)}| \neq |+K_{m(\max)}|$. Такая разновидность МСС обеспечивает построение аналого-цифровых преобразователей и логарифматоров-антилогарифматоров [5], занимающих практически целую числовую полуось кроме ее нулевой точки и ее окрестности и бесконечности [5, с. 211]. При этом полная свернутая структура МСС (при $K_m \geq 0$, $K_m < 0$ и остальных $K_j \geq 0$) имеет вид:

$$\begin{aligned} Z &= Z(\uparrow) \overline{\neg} F_{\text{д}}(Z_i \uparrow) = \pm Z_0 C^{\pm i} = \text{sign}(Z) |Z_0| C^{\text{sign}(k_m) |k_m| + \sum_{j=0}^{m-1} k_j a^j} = \\ &= \text{sign}(Z) |Z_0| C^{\sum_{j=0}^{m-1} \text{sign}(k_m) |k_j a^j|} = \text{sign}(Z) |Z_0| \prod_{j=0}^m C^{\text{sign}(k_m) |k_j a^j|} = \\ &= \begin{cases} + |Z_0| \prod_{j=0}^m C^{\text{sign}(k_m) |k_j a^j|} & \text{при } Z > 0, \\ |Z_0| \prod_{j=0}^m C^{\text{sign}(k_m) |k_j a^j|} & \text{при } Z < 0, \end{cases} \quad (37) \end{aligned}$$

где \geq означает «больше, меньше или равно», а неполная структура данной разновидности МСС определяется следующей формальной записью:

$$Z \overline{\neg} \text{sign}(Z) \parallel \text{sign}(K_m) (|\pm K_m| K_{m-1} \dots K_j \dots K_1 K_0)_{a,c,z_0} \equiv \pm (\pm i)_{a,c,z_0}. \quad (38)$$

Данная разновидность МСС в отличие от МСС (31а) разбивает всю числовую ось не на 4, а на 2 части — положительную и отрицательную, чем упрощает схему аналого-цифровых преобразователей, работающих на ГП со знаменателем C для (37). Вместе с этим

она включила в себя для старшего разряда свойство симметричных АСС — цифра k_m помимо естественного положительного знака стала иметь и отрицательный.

Возможны другие разновидности МСС (31), например, получаемые при использовании различных ричностей в одной МСС и использовании различных знаков при цифрах любого разряда, при этом следует учитывать уже не два, а три знака в коде МСС: первые два как и в (31), (37) — один знак из \pm задает знак числа Z_x , второй — знак i , а третий говорит о знаке цифры j -го разряда.

Поскольку ГП, члены которой кодируют МСС, является показательной функцией, то существует взаимосвязь между МСС и другими показательными функциями [5]:

$$d^z \stackrel{\sqsubset}{=} d^{z'(\pm i)} = C^{z''(\pm i)},$$

в которой d, z, z', z'', C — вещественные числа, i — целое число со знаком, $\stackrel{\sqsubset}{=}$ — детерминированное дискретное равенство, означающее, что $d^{z'(\pm i)} \leq d^z < d^{z'(\pm i+1)}$. При этом d — основание показательной функции — любое вещественное число, включающее и значение основания натуральных логарифмов; d^z — непрерывная функция, поскольку d и z принимают любые вещественные значения, а $z'(\pm i)$, и потому $d^{z'(\pm i)}$ и равная ей $C^{z''(\pm i)}$ — решетчатые (точечные) функции, причем значения точек $d^{z'(\pm i)}$ и $C^{z''(\pm i)}$ составляют ГП, значения которой кодируются МСС. Иначе, поскольку $Z_0 C^{\pm i} = Z_0 E^{M(\pm i)}$ при $M = \ln C / \ln E$ (когда $E^M = C$), то значения $\pm i$ -х членов ГП со знаменателем C содержатся в экспоненте $Z_0 E^{M(\pm i)}$ [5]. Следовательно, во-первых, физическими разбиениями процессов, описываемых любыми экспонентами, можно формировать соответствующие члены ГП (19), необходимые для построения АЦПп, во-вторых, определенные точки любых экспонент из-за того, что в них содержатся члены ГП, могут кодироваться МСС. Так, в экспоненте, например, напряжения разряжающегося конденсатора на резистор содержатся члены ГП [5]. Используемые кривые кодирования в цифровой телефонии отражают используемое согласно им квантование по ГП, к каковому я призывал еще в 1979 [20].

Технические целочисленные логарифмы (ТЦЛ) [14], их разновидности и выводы следующие.

1. Одночисловые ТЦЛ $Z > 0$ получают логарифмированием значения Z , предварительно заменяемого на $Z_0 C^{\pm i}$, при $Z_0 = 1$ по основанию C (11):

$$\log_C Z = L_f Z \doteq L_f Z_0 C^{\pm i} = \pm i, \quad (39)$$

Одночисловые ТЦЛ для всех $Z \geq 0$ получим, представив Z в виде $\text{sign}(Z) \| |Z_0 C^{\pm i}| \approx Z$ и прологарифмировав его модуль при $Z_0 = 1$ и $C > 1$ следующим образом:

$$\text{sign}(Z_x) \| L_f C^{\pm i} = \text{sign}(Z_x) \| \text{sign}(i) |i| \equiv \pm(\pm i), \quad (40)$$

где \geq — знак «больше или меньше», $\|$ — символ учета знака предшествующего числа, L_f — обозначение ТЦЛ (в него математиками [6] введена 1-я буква моей фамилии).

2. Двухчисловые ТЦЛ [5–8] обеспечивают более экономные аппаратные затраты. Они, как и обычные логарифмы, представляют числа мантиссой $i_0 \in 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, но только целочисленной, и порядком $\pm p = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$, а получают из (33): $Z_0 C^{\pm i + n(\pm p)} / Z_0 C^{\pm i} = a^{\pm p}$.

При этом каждый именованный n -й член ГП относительно любого i -го отличается только смещением разделительной запятой на один разряд вправо. Таким образом, двухчисловые ТЦЛ исходя из (34) при $Z_0 = 1$ (из $Z_x \approx Z_i = \pm Z_0 C^{\pm i} = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} = \text{sign}(Z_x) \| |Z_0| \| |C^{i_0} a^{\pm p}|$) имеют вид:

$$\begin{aligned} L_f Z_x &= \text{sign}(Z_x) \| |Z_0| \| L_f |C^{i_0} a^{\pm p}| = \text{sign}(Z_x) \| i_0 + (\pm p) L_f a = \\ &= \text{sign}(Z_x) \| i_0 + (\pm p) n \equiv i_0, \pm p, \end{aligned} \quad (41)$$

где $L_f a = n$ потому, что из (34) $a = C^n$.

Трехчисловые ТЦЛ, легче обеспечивающие аппаратную их реализацию и алгоритмы их использования, описаны в [5], а любые S -числовые получают из двухчисловых. В них n разбивается на $s-1$ сомножителей. При этом $Z \approx \pm Z_0 C^{\pm i} = \pm Z_0 C^{i_0} a^{\pm p} = \pm Z_0 C^{i_1} C^{i_2 n_1} C^{i_3 n_1 n_2} \dots C^{i_\gamma n_1 n_2 n_3 \dots n_{\gamma-1}} \dots C^{i_{s-1} n_1 n_2 n_3 \dots n_{s-2}} a^{\pm p}$. Логарифмируя его по основанию C при $|\pm Z_0| = 1$ с учетом знака Z и $L_f a = n$ (из $C^n = a$), имеем:

$$\begin{aligned} \text{sign} |Z_0| \|L_f [C^{i_1} C^{i_2 n_1} C^{i_3 n_1 n_2} \dots C^{i_\gamma n_1 n_2 n_3 \dots n_{\gamma-1}} \dots \\ \dots C^{i_{s-1} n_1 n_2 n_3 \dots n_{s-2}} a^{\pm p}] = \text{sign} |Z_0| \| [i_1 + i_2 n_1 + i_3 n_1 n_2 + \dots \\ \dots + i_\gamma n_1 n_2 n_3 \dots n_{\gamma-1} + \dots + i_{s-1} n_1 n_2 n_3 \dots n_{s-2} + (\pm p)n] \equiv \\ \equiv \pm (i_1, i_2, i_3, \dots, i_\gamma, \dots, i_{s-1}, \pm p)_{a,C,n}, \end{aligned}$$

где S чисел ТЦЛ $_S$ следующие:

$$\begin{aligned} 1\text{-е число} & - i_1 \in \{0, 1, 2, \dots, (n_1 - 1)\}, \\ 2\text{-е число} & - i_2 \in \{0, 1, 2, \dots, (n_2 - 1)\}, \\ \dots & \dots \\ \gamma\text{-е число} & - i_\gamma \in \{0, 1, 2, \dots, (n_\gamma - 1)\}, \\ \dots & \dots \\ s - 1\text{-е число} & - i_{s-1} \in \{0, 1, 2, \dots, (n_{s-1} - 1)\}, \\ \dots & \dots \\ s\text{-е число} & - \pm p. \end{aligned} \tag{42}$$

При этом $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_\gamma \dots n_{s-1} = n$, а при $n_\gamma = \text{const}$ $n_\gamma = \sqrt[s-1]{n}$. Вещественные n_γ заменяются ближайшими целыми, а C уточняется из $C^n = a$ — выражением $C = \exp((\ln a)/n)$, или точнее — подбором его. Иногда полезно $n_\gamma = \text{var}$.

При $n_\gamma = a$ число $i_{0\gamma}$ кодируется одной цифрой, а Z — МСС.

Операция умножения на одночисловых ТЦЛ при $|\pm X_{01}| = |\pm X_{02}| = |X_0| = 1$:

$$\begin{aligned} Y = \pm X_1 \cdot (\pm X_2) \approx \pm X_{01} C^{\pm i_1} \cdot [\pm X_{02} C^{\pm i_2}] = L_f^{-1}(L_f Y) = \\ = \text{sign}(\pm X_1 \cdot (\pm X_2)) L_f^{-1} [\text{sign}(\pm i_1 + (\pm i_2)) | \pm i_1 + (\pm i_2) |]. \end{aligned} \tag{43}$$

Операция деления на одночисловых ТЦЛ при $|\pm X_{01}| = |\pm X_{02}| = |X_0| = 1$:

$$\begin{aligned} Y = \pm X_1 / (\pm X_2) \approx \pm X_{01} C^{\pm i_1} / [\pm X_{02} C^{\pm i_2}] = L_f^{-1}(L_f Y) = \\ = \text{sign}(\pm X_1 / (\pm X_2)) L_f^{-1} [\text{sign}(\pm i_1 / (\pm i_2)) | \pm i_1 - (\pm i_2) |]. \end{aligned} \tag{44}$$

Операция умножения на двухчисловых ТЦЛ при $|\pm X_{01}| = |\pm X_{02}| = |X_0| = 1$:

$$\begin{aligned} Y = \pm X_1 \cdot (\pm X_2) \approx \pm X_{01} C^{\pm i_{01}} \cdot [\pm X_{02} C^{\pm i_{02}}] = \\ = \text{sign}(\pm X_{01})(a^{p_1} L_f^{-1} i_{01})(\text{sign}(\pm X_{02})(a^{p_2} L_f^{-1} i_{02})) = \end{aligned}$$

$$= \text{sign}(\pm X_1 \cdot (\pm X_2)) |X_0|^2 \begin{cases} a^{p_1+p_2+1} \cdot L_f^{-1}(i_{01} + i_{02} - n) \\ \quad \text{при } (i_{01} + i_{02}) \geq n, \\ a^{p_1+p_2} \cdot L_f^{-1}(i_{01} + i_{02}) \\ \quad \text{при } (i_{01} + i_{02}) < n. \end{cases} \quad (45)$$

Операция деления на двухчисловых ТЦЛ при $|\pm X_{01}| = |\pm X_{02}| = |X_0| = 1$:

$$\begin{aligned} Y &= \pm X_1 / (\pm X_2) \approx \pm X_{01} C^{\pm i_{01}} / [\pm X_{02} C^{\pm i_{02}}] = \\ &= [\text{sign}(\pm X_{01}) (a^{p_1} L_f^{-1} i_{01})] / [(\text{sign}(\pm X_{02}) (a^{p_2} L_f^{-1} i_{02}))] = \\ &= \text{sign}(\pm X_1 / (\pm X_2)) |X_0|^0 \begin{cases} a^{p_1-p_2-1} \cdot L_f^{-1}(i_{01} - i_{02} + n) \\ \quad \text{при } i_{01} < i_{02}, \\ a^{p_1-p_2} \cdot L_f^{-1}(i_{01} - i_{02}) \\ \quad \text{при } i_{01} \geq i_{02}. \end{cases} \quad (46) \end{aligned}$$

Умножение $q > 2$ чисел на двухчисловых ТЦЛ при $|\pm X_{0i}| = \text{const} = |X_0| = 1$:

$$\begin{aligned} Y &= \prod_{\gamma=1}^m (\pm X_\gamma) \approx \text{sign} \left(\prod_{\gamma=1}^q (\pm X_\gamma) \right) \prod_{\gamma=1}^q a^{\pm p_\gamma} \cdot C^{i_{0\gamma}} = \\ &= \text{sign} \left(\prod_{\gamma=1}^q (\pm X_\gamma) \right) \prod_{\gamma=1}^q a^{\pm p_\gamma} \cdot L_f^{-1} \left(L_f \prod_{\gamma=1}^q C^{i_{0\gamma}} \right) = \\ &= \text{sign} \left(\prod_{\gamma=1}^q (\pm X_\gamma) \right) \cdot \left\{ a^{\left[\sum_{\gamma=1}^q (\pm p_\gamma) + \text{ц.ч.} \left(\left(\sum_{\gamma=1}^q i_{0\gamma} \right) / n \right) \right]} \right\} \times \\ &\quad \times L_f^{-1} \text{ост.} \left[\left(\sum_{\gamma=1}^q i_{0\gamma} \right) / n \right], \quad (47) \end{aligned}$$

где ц.ч. — целая часть частного, ост. — остаток частного (целое число, меньшее n).

Двойные ТЦЛ — ТЦЛ от ТЦЛ. Они необходимы для выполнения операций возведения в степень с дробными показателями и

для извлечения корней. Например, вычисление $y = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ на первичном ТЦЛ выглядит в виде:

$$y = L_f^{-1} L_f y = L_f^{-1} (m/n) \cdot L_f a, \quad (48)$$

то есть остаются операции деления и умножения (L_f^{-1} — антилогарифм). Чтобы и их свести к коротким операциям, соответственно, к вычитанию и сложению, необходимо вычислить последнее равенство повторно на ТЦЛ в виде:

$$\begin{aligned} y &= L_f^{-1} [L_f^{-1} (L_f (L_f y))] = L_f^{-1} [L_f^{-1} (L_f ((m/n) \cdot L_f a))] = \\ &= L_f^{-1} [L_f^{-1} (L_f m - L_f n + L_f (L_f a))]. \end{aligned} \quad (49)$$

В последнем выражении представлен двойной (вторичный) ТЦЛ. При этом в нем целесообразно использовать основание, равное основанию первичного ТЦЛ. Это не потребует дополнительной таблицы логарифмов и сохранит практически ту же точность вычислений, хотя потребуются лишь небольшая часть вторичных ТЦЛ (от значений, располагаемых между целыми числами первичного ТЦЛ, вторичные оказываются ненужными).

3. Перевод кодов чисел АСС в коды МСС и обратно

Перевод кодов чисел МСС (32) в коды чисел в АСС (6) производится путем вычислений (31) по правилам АСС с $a = 10$. При этом получим код (6) с $a = 10$. Если необходимо иметь код с АСС с другим целочисленным основанием, то необходимо использовать известные правила перевода кодов АС с одного основания в другое.

Перевод кодов чисел АСС (6) в коды МСС (32) возможен двумя основными вычислительными способами: по правилам АСС с использованием двухсторонних именованных неравенств, представляющих образцовые значения числовой шкалы и использованием логарифмирования переводимого числа с последующим переводом в требуемое количество используемых всех различных цифр. Общей особенностью обоих основных методов является использование требуемого

знаменателя ГП « C » и ричности МСС « a » — количества всех взаимно отличных ее цифр. На основе заданных « C » и « a » вычисляется числовая шкала: весь требуемый кортеж образцовых значений Z_{oi} (28) и все его представительные значения Z_{pi} (22). Затем все Z_{oi} пакетируются по « a », нумеруются в качестве образцовых значений первого разряда $Z_{oi,j=1}$ (Z_{oi} — значения нулевого разряда МСС, назовем его $Z_{oi,j=0}$). Затем пакетируются также по « a » штук образцовые значения первого разряда, чем организуются образцовые значения второго разряда $Z_{oi,j=2}$. Такие пакетирования проводятся до m -го разряда, образцовые значения которого равны $Z_{oi,j=m}$, превышающего своим $a - 1$ -м значением значение переводимого кода $Z_{x(\text{acc})}$. На основе вычисленной числовой шкалы производится перевод кода числа АСС в код МСС рекуррентно, начиная с m -го (старшего) разряда до нулевого включительно, конкретизацией (19) — двухсторонним неравенством. Первая значащая цифра m -го разряда обнаруживается согласно $k_m = i$ в $(Z_{oi,j=m} \leq Z_{x(\text{acc})} < Z_{oi+1,j=m})$,

k_{m-1} согласно $k_{m-1} = i$ в

$$[Z_{oi,j=m-1} \leq (Z_{x(\text{acc})} - C^{k_m a^m}) < Z_{oi+1,j=m}],$$

k_{m-2} согласно $k_{m-2} = i$ в

$$[Z_{oi,j=m-2} \leq (Z_{x(\text{acc})} - C^{k_m a^m} \cdot C^{k_{m-1} a^{m-1}}) < Z_{oi+1,j=m}],$$

.....

k_0 согласно $k_0 = i$ в

$$[Z_{oi,j=m-2} \leq (Z_{x(\text{acc})} - C^{k_m a^m} \cdot C^{k_{m-1} a^{m-1}} \cdot \dots \cdot C^{k_1 a^1}) < Z_{oi+1,j=m}].$$

Второй метод перевода кода $Z_{x(\text{acc})}$ (6) в код $Z_{x(\text{мсс})}$ (32) базируется на исходной замене кодируемого $Z_{x(\text{acc})}$ ближайшим значением члена ГП (30) $Z_x \approx \pm Z_{\text{по}} C^{\pm i}$ при $Z_{\text{по}} = 1$ (что как правило и имеет место, а при $Z_{\text{по}} \neq 1$ так же этот метод годен, но требует дополнительной корректировки результата). Суть описываемого перевода состоит в логарифмировании $Z_{x(\text{acc})}$, и по найденному при этом значению i отыскиваем искомую последовательность k_j кода (32) простым переводом кода АСС значения i , полученного при логарифмировании в код АСС (32а) с основанием « a », являющимся одновременно значени-

ем « a » кода МСС (31). Полученная последовательность k_j будет искомой последовательностью (32). Поскольку при логарифмировании $Z_{x(\text{acc})}$ обычными непрерывными логарифмами (если нет возможности логарифмировать ТЦЛ) результат в общем случае оказывается содержащим дробную часть, а искомый $\pm i$ — целое число, дробный логарифм следует заменить на целочисленный ТЦЛ с основанием, равным требуемому знаменателю ГП S .

СЧгп необходимы также для:

- 1) цифровой телефонии и цифрового телевидения, поскольку именно ГП отражает работу биорецепторов (слуха и зрения), как это нашли Вебер и Фехнер, о чем я докладывал в Ленинграде в 1979 г. [20] по телефонии и в 1980 г. в Тбилиси по телевидению [21];
- 2) перекрытия больших динамических диапазонов параметров;
- 3) вычислений на логарифмах, ускоряющих выполнение «длинных» операций;
- 4) банковских расчетов на сложных процентах, являющихся ГП [19];
- 5) получения равноточной информации об отношениях значений двух параметров;
- 6) простого построения ЦВМ с перестраиваемой точностью, а потому и быстродействием, что является заменой комплексов из быстрых АВМ и точных ЦВМ;
- 7) реализация тенденции формы представления и использования чисел в ЭВМ.

К тому же: к ГП призывал переходить от АП в книге Г. Г. Гинкин [1, с. 242] еще в 1962 г.

На НЛ с укороченными мантиссами за рубежом и у нас выполняются с 1971 г. ускоренные вычисления [3, 4].

Переход на ГП является естественным развитием ЭВМ: сначала они строились работающими на числах с фиксированной запятой, затем с плавающей, иначе в полулогарифмической форме, а ГП обеспечивают не только логарифмическую форму, но и ТЦЛ.

Решения дифференциальных уравнений, как пишет Г.И. Лозгачев, сопровождается использованием ГП.

ГП отражает развитие многих неживых процессов и в особенности живых организмов.

Устройства информатики на обычных (дискретных) ГП [5–8] от традиционных устройств аналогичного назначения и диапазона действия, работающих на основе арифметических прогрессий (АП) и на кодирующих их значения АСС и обычных (непрерывных) логарифмах НЛ, каждому из которых теоретически соответствует одно прологарифмированное ими число и наоборот, отличаются сочетанием:

- во-первых, наилучшего приближения к равноточности (по относительной погрешности) всех результатов их функционирования;
- во-вторых, меньшим, именно минимально возможным количеством всех взаимно отличных кодов, что снижает их сложность, стоимость, вес, повышает надежность и быстродействие и проще обеспечивает построение вычислительных устройств предельного быстродействия — на функциональных преобразователях, использующих запоминающие устройства, выдающие (при предъявлении им двух аргументов и разновидности требуемой операции между ними) готовые, записанные в них результаты вычислений;
- в-третьих, более высокого быстродействия вычислений не только из-за меньшего набора чисел, но и из-за проведения их на логарифмах, к тому же целочисленных;
- в-четвертых, обеспечивает самую экономную цифровую телефонию и самое экономное цифровое телевидение, о важности чего говорит массовость использования в наше время этих средств массовой информации.

Разработка МСС и ТЦЛ на ГП завершила первый (дискретный) этап второго жизненного цикла количественной математики и информатики — заменила несчетные и счетные множества значений параметров на минимальные их множества. (Первый этап первого цикла — дискретный — использовались лишь отдельные числа, второй этап первого цикла — непрерывный — использовались все числа [12].)

В целом открывается возможность построить ЦВМ (см. рис. 3) с ббльшим быстродействием, чем это достигается в России и США (INTEL), поскольку их путь развития ЦВМ на АП является эволюционным, а использование же ЧСгп (МСС с ТЦЛ) — революционный, который по этой причине нельзя нам упускать. ТЦЛ содержат в себе возможности частичного и даже полного исключения вычислительных операций с плавающей запятой, содержащих дробные части чисел, заменив их на целочисленные логарифмы. ГП и ТЦЛ, имея меньшее, именно минимально возможное количество взаимно различных кодов, лучше, чем АП, открывают возможность создания ЦВМ, в которых вместо АЛУ используются функциональные преобразователи (ФП), выдающие результаты вычислений простым считыванием готовых результатов, записанных в ПЗУ.

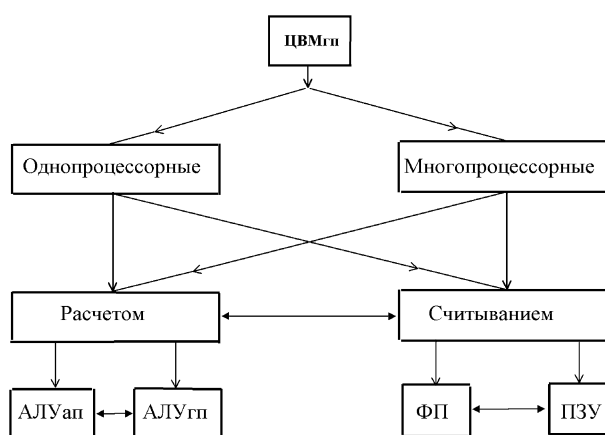


Рис. 3.

Здесь расчеты производятся на АЛУгп: — вычисления операций умножения и деления на ТЦЛ [1–4], возведения в степени и извлечения корней на двойных ТЦЛ [5–7]. Их запись требует использования трех знаков \pm : первый из которых определяет знак Z , второй — знак i (2), а третий — знак i ТЦЛ от ТЦЛ, причем отрицательный знак последнего проставляется только перед одним числом, именно для $i = 0$ первого ТЦЛ.

Операции же сложения и вычитания выполняются на АЛУап — на

именованных числах, в которые однократно переводятся ТЦЛ [5–7], а затем обратно.

Возможно проведение операций сложения и вычитания и на самих ТЦЛ, как это делается на НЛ [22] с сокращенным числом разрядов мантисс, только при ТЦЛ эти операции упрощаются из-за их целочисленности. Максимальное же быстродействие достигается считыванием с ФП и ПЗУ, заменяющих основное АЛУ.

ЦВМ на ГП легко составляются с перестраиваемой числовой шкалой за счет исключения на время быстрых, но менее точных вычислений, части ее членов ГП [21].

На основе выбранной структуры ЦВМ составляется ее набор команд.

4. Аналоговые преобразования временных функций [22]

Данные преобразования абсцисс непрерывных, непрерывно-дискретных и любых точечных временных функций во времени, осуществляются без изменения их ординат линейными характеристиками запаздывания $0-K$ с углами α , представлены для $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ на рис. 4, для $135^\circ < \alpha < 180^\circ$ на рис. 5, а в целом для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ качественно на рис. 6. На рис. 4 катеты малого прямоугольного треугольника арв, равные между собой ($ар = ав = \Delta\tau$), представляют приращение значения замедления $\Delta\tau$ точки 2 входного интервала $\Delta t_{вх}$, испытываемое ею за время этого интервала. Оно из равенства угла между прямыми др и да значению α определяется равенством $\Delta\tau = \Delta t_{вх} \operatorname{tg} \alpha$ и является положительной величиной. Отсюда значение

$$\Delta t_{вых} = \Delta t_{вх} + \Delta\tau = \Delta t_{вх} + \Delta t_{вх} \operatorname{tg} \alpha = \Delta t_{вх}(1 + \operatorname{tg} \alpha) = \Delta t_{вх} C. \quad (50)$$

В данном случае (для $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) значения $1 < [C = (1 + \operatorname{tg} \alpha)] < +\infty$, а потому $\Delta t_{вых} > \Delta t_{вх}$.

Для $135^\circ < \alpha < 180^\circ$, (см. рис. 6) $ав = вр = \Delta\tau = \Delta t_{вх} \operatorname{tg} \alpha$, тангенс данных углов отрицателен, потому

$$\Delta t_{вых} = \Delta t_{вх} - \Delta\tau = \Delta t_{вх} - \Delta t_{вх} \operatorname{tg} \alpha = \Delta t_{вх}(1 - \operatorname{tg} \alpha) = \Delta t_{вх} C. \quad (51)$$

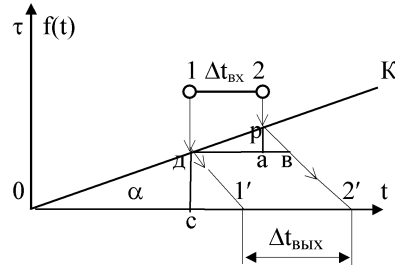


Рис. 4.

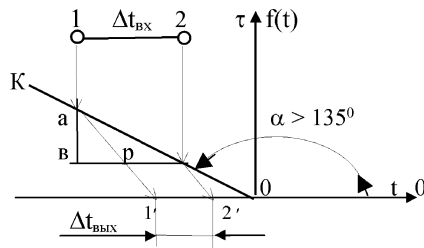


Рис. 5.

то есть в данном случае значения $0 < [C = (1 - \operatorname{tg} \alpha)] < 1$, а потому $\Delta t_{\text{вых}} < \Delta t_{\text{вх}}$.

Для случая $\alpha = 116^\circ 34'$ значение $\operatorname{tg} \alpha = -2$, а значение $C = (1 - \operatorname{tg} \alpha) = -1$, откуда вытекает тот факт, что $\Delta t_{\text{вх}} = |-\Delta t_{\text{вых}}|$, то есть модули $\Delta t_{\text{вх}}$ и $\Delta t_{\text{вых}}$ равны друг другу, но начальная и конечные точки $\Delta t_{\text{вых}}$ обратны соответствующим точкам временного интервала $\Delta t_{\text{вх}}$.

Из (23) и (50) видно, что количественные и аналоговые преобразования имеют одинаковые тангенциальные функции преобразования. Только угол α количественных преобразований близок, но превышает 0° , а аналоговых $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, отсюда, соответственно значения C первых больше, но близки к 1, а вторых лежат в диапазоне $-\infty \leq C \leq +\infty$.

Важнейшей особенностью временных преобразований является использование ими условно названных мною непрерывных ГП — прогрессий с нулевыми шагами квантования и показателями степени все-

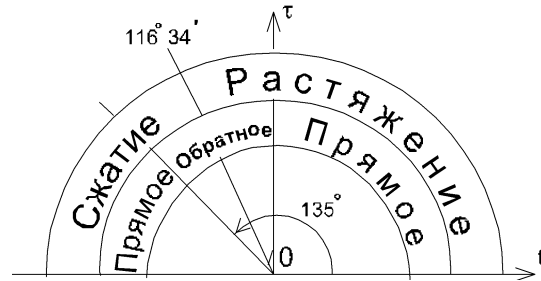


Рис. 6.

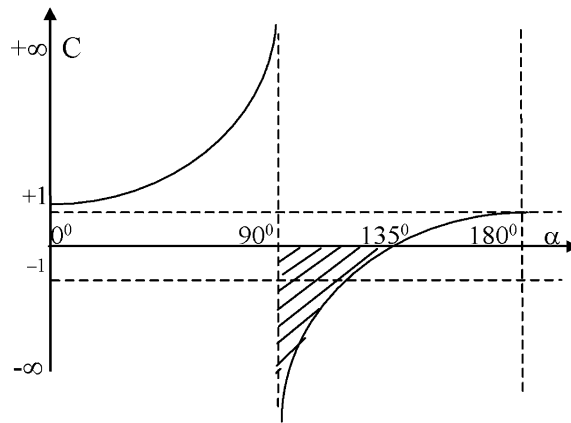


Рис. 7.

гда равными единице 1, обеспечивающими девиации (смещения) моментов времени временных функций в любые стороны (сближениями или удалениями их друг от друга), достигаемыми различными для каждого из них запаздываниями, количественно определяемыми тангенциальной функцией.

Графическое представление самих значений коэффициентов преобразования абсцисс временных функций $C = (1 + \operatorname{tg} \alpha)$, [5], дано на рис. 7. Из него видно: при $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ $C < 0$ — кривая $C = f(\alpha)$ (она на рис. 7 заштрихована) отражает на выходе обратный порядок следования точек (см. рис. 6) преобразуемой временной функции, при $\alpha = 0^\circ$ $C = +1$, а при $\alpha = 116^\circ 34'$ $C = -1$.

Детально в идеальном (беспгрешностном) случае линейное преобразование было рассмотрено, когда характеристики времени замедления (характеристики запаздывания $0-K$ см. рис. 5) относительно оси времени (оси абсцисс) t имеют углы $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, поскольку при $\alpha > 180^\circ$ нарушается причинно-следственная связь — на выходе преобразователя функция не может появляться до ее подачи на его вход.

Данные аналоговые преобразования обеспечивают: сжатие временных функций, их растяжение как с прямым, так и обратным порядком следования их точек; организацию новых каналов связи, допускающую совместное использование других методов организации каналов связи; криптографию, аналоговые вычисления и при нелинейных преобразованиях ($\alpha = \text{var}$) во-первых, новый вид модуляции — изменением плотности во времени ординат несущей временной функции даже имеющей неизменные во времени ординаты, во-вторых, увеличенные возможности криптографии: линейные сжатия, растяжения и изменения порядка следования выходных точек относительно входных дополняются нелинейными.

Формирование новых каналов связи достигается использованием на передающей стороне периодически линейно сжимающих четырехполосников, работающих при определенном $90^\circ < \alpha < 135^\circ$, обеспечивающем заданное n -кратное сжатие равных временных интервалов $y = f(t)$ (допустимо и не равных, что сложнее, но дополнительно придающее свойства криптографии). В линию связи при этом поступают от каждой преобразованной временной функции ее периодически сжатые интервалы. Образующиеся при этом «пустые» интервалы заполняются другими $n - 1$ периодически сжатыми функциями в соответствующем порядке их подачи. На приемной стороне в каждые из n приемных каналов поступают периодически сжатые функции принадлежащих им номеров и периодически растягиваются в те же n раз n -кратно сжатые на входе интервалы. Этим восстанавливаются исходные функции и поступают своим потребителям. При этом вместо одной временной функции по линии связи передается n временных функций, например, n телефонных разговоров, что подключает дополнительно $n - 1$ временных функций. Для формирования, например, трех каналов связи, периодически сжима-

ющий четырехполосник передающей стороны типа рис. 5 должен иметь угол $\alpha > 135^\circ$, обеспечивающий $\operatorname{tg} \alpha = -(2/3)$, при котором $C = (1 - \operatorname{tg} \alpha) = 1/3$. При этом каждый элемент входного сигнала, равный периоду работы данного четырехполосника $\Delta t_{\text{вх}}$, сожмется во времени в три раза: $\Delta t_{\text{вых}} = \Delta t_{\text{вх}} C = \Delta t_{\text{вх}}/3$ (см. (28)). Растягивающий же четырехполосник приемной стороны типа рис. 4 при этом должен иметь угол $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, обеспечивающий $\operatorname{tg} \alpha = 2$, при котором $C = (1 + \operatorname{tg} \alpha) = 3$ (см. тангенциальную функцию (27)).

Технические реализации данных аналоговых преобразований возможны прежде всего на магнитофонах соответствующей переменной скоростью протяжки ленты, на электронно-лучевых трубках и их модификациях, в перспективе на световых преобразователях, а возможно и на торсионных полях.

Особенность модуляции в АПИ состоит в изменении плотности во времени значений непрерывных функций. По этой причине в качестве «несущей» основы модулированных сигналов может быть даже постоянное значение непрерывной величины.

Рассматриваемые количественные преобразования на ГП и аналоговые в своих основах имеют одну общую тангенциальную функцию $(1 + \operatorname{tg} \alpha)$ (см. (23) и (50)), каковая с перечисленными возможностями и реализующими их устройствами представлена на рис. 8.

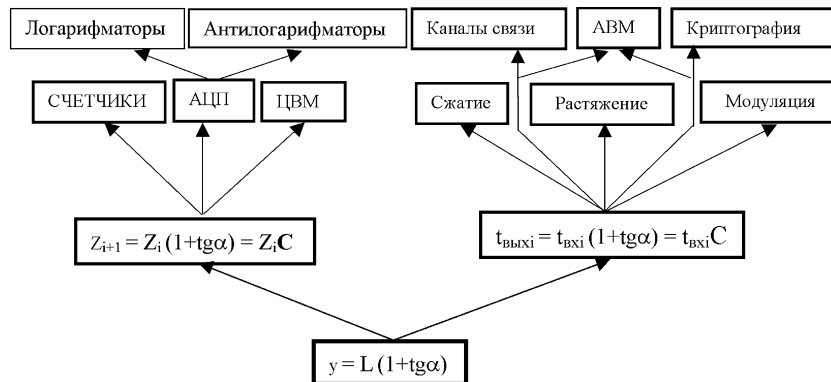


Рис. 8.

Заключение

Разработанные *все* количественные преобразования информации на единой геометрической прогрессии с моей точки зрения являются важнейшим принципиальным развитием количественной информатики, которая заменит современную (работающую в целом всеми своими устройствами (счета, измерений и вычислений) на основе арифметических прогрессий), поскольку она равноточна, экономна и предельно быстродействующая. Она более перспективна, чем развиваемая в России вычислительная техника и развиваемая до 2011 г. корпорацией INTEL. Причины — они работают на арифметических прогрессиях, заставляющих использовать дробные числа, а геометрические прогрессии в расчетах могут использовать только целые числа.

Разработанные теоретически аналоговые преобразования информации на той же тангенциальной функции, что и количественные преобразования, также с моей точки зрения должны развиваться и внедряться в России, если она не хочет оставаться только лишь покупательницей информационной техники.

Список литературы

- [1] Гинкин Г. Г. Логарифмы, децибелы, децилоги. М.–Л.: ГЭИ, 1962. 362 с.
- [2] Оранский А. М. Аппаратные методы в цифровой вычислительной технике. Минск: Изд-во БГУ, 1977. 205 с.
- [3] Kingsbury N. C., Rayner P. J. Digital filtering using logarithmic arithmetic // Electron letters. Vol. 7, № 2. 1971. P. 56–58.
- [4] Коновалов С. С. Построение бортовых алгоритмов управления и обработки информации с использованием логарифмической арифметики. Автореферат кандидатской диссертации. Н. Новгород, 1988. 16 с.
- [5] Филиппов Н. А. Теория и устройства неравномерного квантования. Бишкек: Илим, 1994. 280 с.

- [6] Филиппов Н. А. Количественная информационная техника на основе геометрических прогрессий / Учебное пособие. Бишкек: БПИ, 1991. 104 с.
- [7] Филиппов Н. А. Вычислительные устройства, работающие на технических целочисленных логарифмах / Учебное пособие. Фрунзе: ФПИ, 1990. 84 с.
- [8] Филиппов Н. А. Математические основы количественной информационной техники на геометрических прогрессиях / Учебное пособие для учащихся школ. МНО Киргизской ССР. Фрунзе, 1990. 14 с.
- [9] Filippov N. A. The Theory and Devices of nonlinear Quantization. Certificate-Licence. Creator. IINRC. № 000202. 18.10.1996.
- [10] Filippov N. A. The Multiplicative Systems of Numeration and Technical Wholenumbers Logarithms. Certificate-Licence. Systems. IINRC. № 223. 25.11.96.
- [11] Filippov N. A. The Algorithm of Measurement with using of Arithmetical and Geometrical Progressions. Certificate-Licence. Algorithm. IINRC. № 210. 18.10.96.
- [12] Фомин С. В. Системы счисления. М.: Наука, 1975. 48 с.
- [13] Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. Киев: Вища школа, 1982. 96 с.
- [14] Андреева Е., Фалина И. Информатика: Системы счисления и компьютерная арифметика. М., 1999. 145 с.
- [15] Филиппов Н. А. Сигналы телеуправления как числа смешанной системы счисления // Юбилейная научная сессия Академии наук Кирг. ССР. ОТН. Фрунзе, 1958. С. 211–219.
- [16] Филиппов Н. А. О взаимосвязи сложности сигналов и аппаратуры систем телеуправления // Автоматика и телемеханика. Т. XXIII, № 12. М., 1962. С. 1680–1685.
- [17] Bergman G. F. Number system with an irrational base // Mathematics Magazine. 1957. № 31. P. 98–119.
- [18] Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 152 с.

- [19] Филиппов Н. А. Геометрические прогрессии как средство предельной экономизации и улучшения характеристик информационной техники и источник доходов // Тезисы Международной научно-методической конференции «Методика преподавания статистики, эконометрики и экономико-математических дисциплин в экономических вузах». 2–6 февраля 1999 г. М.: МЭСИ, 1999. С. 150–151.
- [20] Филиппов Н. А. Экономное кодирование амплитуд непрерывного сигнала речи // Доклад на XXXIV-й областной НТК конференции по узловым проблемам радиотехники, электроники и связи. 9–13 апреля 1979. Л. 1979.
- [21] Филиппов Н. А. Экономичный быстродействующий кодирователь изображений // Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума «Проблемы цифрового кодирования и преобразования изображений». Тбилиси, 1980. С. 72–73.
- [22] Filippov N. A. The Transformations of Temporal Function in Time. Certificate-Licence. Theory. PINRC. № 000202. 18.10.1996.
- [23] Филиппов Н. А. Один из путей выхода России на разработку и производство лучших в мире цифровых вычислительных машин // Труды Международного форума по проблемам науки, техники и образования. 9–12 декабря 1997 г. М. С. 59.

