Свойства частично упорядоченных множеств, задаваемых перестановками

Д. В. Ефремов

1. Основные понятия и формулировки результатов

Введем бинарное отношение доминирования между точками квадрата $[0,1]^2$. Если $a = (a^1, a^2), b = (b^1, b^2) \in [0,1]^2$, то скажем, что $a \prec b$, если $a^1 < b^1$ и $a^2 < b^2$, то есть точка b покоординатно превосходит точку a. Определим понятие *слоя* на конечном множестве $V \subset [0,1]^2$, используя введенное отношение $\prec$. Назовем первым слоем V следующее множество

$$V_1 = \left\{ y \in V : \nexists y' \in V, y' \prec y \right\} —$$

подмножество V, состоящее из его минимальных (не превосходящих никакую другую точку этого множества в смысле отношения $\prec$) точек. Аналогично, определим i-й слой множества V:

$$V_i = \left\{ y \in \left(V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) : \nexists y' \in \left(V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right), y' \prec y \right\},$$

который по сути является первым слоем множества $V \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} V_k$, состоящего из точек, не содержащихся в предыдущих слоях.

Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$ — n-перестановка. В качестве V возьмем множество $I(\pi) = \left\{ \left(\frac{k}{n}, \frac{i_k}{n} \right), k = \overline{1, n} \right\}$ и рассмотрим на нем введенное выше отношение частичного порядка. Перестановку π назовем

k-слойной, если соответствующее ей множество $I(\pi)$ состоит в точности из k слоев. Далее, если это не будет вызывать недоразумений, мы будем говорить не о точках множества $I(\pi)$, а о точках перестановки π.

Определим R_n^k как количество k-слойных n-перестановок. А среднюю по всем перестановкам мощность k-ого слоя n-перестановки при условии равновероятности всех перестановок обозначим за $S_k(n)$.

Теорема 1. *Для чисел R_n^k справедливы формулы*

$$R_n^n = 1, \quad n \geqslant 1;$$
$$R_n^{n-1} = n(n-2)+1, \quad n \geqslant 2;$$
$$R_n^{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+1, \quad n \geqslant 3;$$
$$R_n^{n-3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\big((n-1)(n-3)(n-5)+4\big)+1, \quad n \geqslant 5.$$

Теорема 2. *Для чисел R_n^k справедливо равенство*

$$R_n^k = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=N,\\ n_i>0}} \frac{(n!)^2}{k!}\left(\frac{\Delta(n_1,n_2,\ldots,n_k)}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\right)^2, \tag{1}$$

где $N = n + \frac{k(k-1)}{2}$, а $\Delta(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ — определитель Вандермонда.

Теорема 3. *При любом n и $k<n$ верно неравенство*

$$R_n^k < \left(\frac{n}{n+\frac{k(k-1)}{2}}\right)^{2n} \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} k^{2n}. \tag{2}$$

В работе [1] приводится следующий результат: средняя мощность первого слоя n-перестановки $S_1(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ и $S_1(n) \sim \ln n$ при $n\to\infty$.

Теорема 4. *Для средней мощности второго слоя n-перестановки, при условии равновероятности всех n-перестановок, справедлива формула*

$$S_2(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!},$$

асимптотическое поведение которой описывается как

$$S_2(n) \sim (e-1)\ln n, \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 5. *При любом n и k, $k < n$ и равновероятности всех перестановок верно следующее соотношение*

$$S_k(n) = \sum_{t=k}^{n} \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!}. \tag{3}$$

С использованием этой формулы, получена следующая верхняя оценка, наглядно характеризующая поведение $S_k(n)$ с ростом n:

Следствие 1. *При любом n и k, $k < n$ и равновероятности всех перестановок верна оценка*

$$S_k(n) \leqslant \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \ln n.$$

Часть приведенных результатов была анонсирована в [2].

Автор выражает благодарность Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. О количестве k-слойных n-перестановок

В начале данного раздела рассмотрим несколько частных случаев, а именно выведем формулу для R_n^k при условии определенной зависимости между n и k.

Лемма 1. *Пусть дана n-перестановка $\pi \in S_n$, являющаяся $(n-t)$-слойной. Тогда среди точек множества $A = \{(l,m) :\ l+m \leqslant t+2; l,k \in \mathbb{Z}\}$ есть хотя бы одна точка из $I_1(\pi)$.*

Доказательство. Так как π — $(n-k)$-слойная перестановка, то в $I(\pi)$ есть цепочка из $(n-k)$ упорядоченных точек, а значит при выбрасывании из π некоторых k точек получится $\tilde{\pi} = id \in S_{n-k}$. Предположим, что $A \cap I_1(\pi) = \varnothing$. Поскольку в $I(\tilde{\pi})$ в силу тождественности $\tilde{\pi}$ будет содержаться точка $(1,1)$, то предположение означает, что множество A полностью покрывается теми k строками и k столбцами, которые содержат выбрасываемые точки. Если пронумеровать эти строки и столбцы по номеру точки, на них лежащей, то становится ясно, что с множеством A может пересекаться либо i-ая строка либо i-ый столбец. Значит сумма строк и столбцов, пересекающихся с A не превосходит k. Так как множество A содержит в себе точки из $k+1$ строки (столбца), то оно не покрывается k строками, более того: s строк оставляют не покрытыми ровно $k+1-s$ строк, которые, в свою очередь, не могут быть покрытыми $k-s$ столбцами. Получили противоречие, означающее, что $A \cap I_1(\pi) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Эта лемма позволяет нам ограничить множеством A перебор возможных расположений точки из $I_1(\pi)$ среди всех точек $I(\pi)$, где $\pi \in S_n$ — заданная $(n-t)$-слойная перестановка, что упрощает получение рекуррентных соотношений для R_n^{n-t}, более того, из нее следует, что точка из $A \cap I_1(\pi)$ является началом длиннейшей цепочки из упорядоченных точек.

Доказательство теоремы 1

Будем проводить доказательство через получение рекуррентных соотношений на интересующие нас величины, классифицируя все перестановки по виду точек их первого слоя.

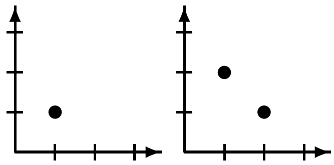

Рис. 0^o. Рис. 1^o.

0^o. Для чисел R_n^{n-k}, $k \geqslant 0$ получаем, что множество $A \supset (1,1)$, значит $(n-k)$-слойных перестановок $\pi \in S_n$, содержащих эту точку, есть ровно R_{n-1}^{n-k-1}, так как на оставшейся $(n-1)$ точке должен образоваться ровно $(n-k-1)$ слой (еще один слой ($(n-k)$-ый) дает точка $(1,1)$, являющаяся единственной минимальной).

При $k=0$ имеем:

$$R_n^n = R_{n-1}^{n-1} = \ldots = R_1^1 = 1.$$

1^o. Для $k \geqslant 1$ получается, что $A \supset \{(l,m) : l+m=3\} = \{(1,2),(2,1)\}$. Таким образом, из леммы следует, что при $k \geqslant 1$ в любой $(n-k)$-слойной перестановке π, не соответствующей случаю 0^o, хотя бы одна из этих точек является минимальной.

$1^o a)$ Если π удовлетворяет случаю $1^o a)$, то таких перестановок получается ровно R_{n-2}^{n-k-1}, так как эти две точки образуют 1 слой, а оставшиеся $(n-2)$ точек должны образовать $(n-k-1)$ слой.

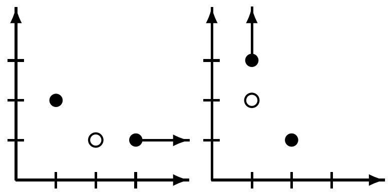

Рис. 1^o*б*). Рис. 1^o*б'*).

1^o*б*). Обе изображенные на рис. 1*б* точки лежат в первом слое (и только они). Число $\pi^{-1}(1)$ может принимать $(n-2)$ значения (от 3 до n), а оставшиеся $(n-2)$ точки должны образовать $(n-k-1)$ слой. Так как случаи 1^o*б*) и 1^o*б'*) симметричны друг другу, то получаем, что количество таких перестановок : $2(n-2)R_{n-2}^{n-k-1}$.

При $k=1$:

$$R_n^{n-1} = \underbrace{R_{n-1}^{n-2}}_{0^o} + \underbrace{(2n-3)R_{n-2}^{n-2}}_{1^o a, б, б')} = R_{n-1}^{n-2} + (2n-3).$$

$$R_n^{n-1} = \sum_{t=3}^{n} \left(R_t^{t-1} - R_{t-1}^{t-2}\right) + R_2^1 = \sum_{t=3}^{n}(2t-3) + 1 = (n-1)^2.$$

Здесь и далее суммирование многочленов производится их разложением в сумму многочленов вида $(t+k)!/t! = (t+k)_k = C_{t+k}^k k!$ и использованием доказываемого, например, по индукции тождества:

$$\sum_{t=0}^{n} C_{k+t}^{k} = C_{k+1+n}^{k+1}. \qquad (*)$$

2^o. Для $k \geqslant 2$, если перестановка π не описывается случаями 0^o и 1^o, то рассмотрим подмножество $A \supset \{(l,m) : l+m=4\}$.

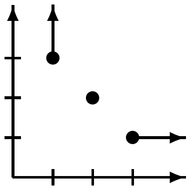
Рис. $2^o a$).

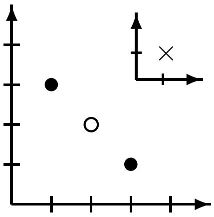
Рис. $2^o б$).

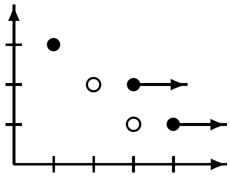
Рис. $2^o в$).

$2^o a$). Поскольку точка $(2,2)$ в любом случае, очевидно, будет той минимальной, с которой начинается основная $(n-k)$-цепочка упорядоченных точек, то точки $(\pi^{-1}(1),1)$ и $(1,\pi(1))$ на количество слоев в данном случае влиять не могут, а значит получаем: $(n-2)^2 R_{n-3}^{n-k-1}$.

$2^o б$). На оставшихся $(n-2)$-х точках необходимо получить $(n-k-1)$ слой, но так, чтобы данный случай отличался от случая $2^o a$), то есть $\tilde{\pi}^{-1}(1) \neq 1$, а следовательно имеем: $R_{n-2}^{n-k-1} - R_{n-3}^{n-k-2}$.

$2^o в$). При $k=2$ из леммы следует, что точка $(1,3)$ — единственная возможная начальная точка длиннейшей цепочки упорядоченных элементов, а значит точки $(\pi^{-1}(1),1)$ и $(\pi^{-1}(2),2)$ на количество слоев в данном не симметричном случае влиять не могут, таким образом, получаем $2(n-3)^2 R_{n-3}^{n-3}$ (при $k>2$ эта формула не верна).

Пусть $k=2$:

$$R_n^{n-2} = \underbrace{R_{n-1}^{n-3}}_{0^o} + \underbrace{(2n-3)R_{n-2}^{n-3}}_{1^o a,б)} + \underbrace{(n-2)^2 R_{n-3}^{n-3}}_{2^o a)} + $$
$$+ \underbrace{R_{n-2}^{n-3} - R_{n-3}^{n-4}}_{2^o б)} + \underbrace{2(n-3)^2 R_{n-3}^{n-3}}_{2^o в)}.$$

$$R_n^{n-2} - R_{n-1}^{n-3} = 2(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$R_n^{n-2} = \sum_{t=4}^{n} (R_t^{t-2} - R_{t-1}^{t-3}) + R_3^1 = \sum_{t=4}^{n} 2(t-1)(t-2)(t-3) + 1.$$

$$R_n^{n-2} = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3) + 1.$$

$3^o a$). Поскольку точки (2,3) и (3,2) в любом случае будут теми минимальными, с которых начинается длиннейшая $(n-k)$-цепочка

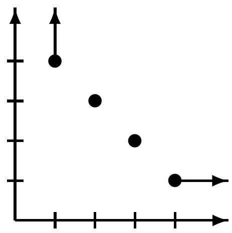

Рис. 3^o *а*).

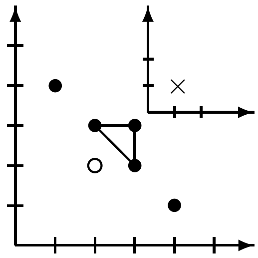

Рис. 3^o *б*).

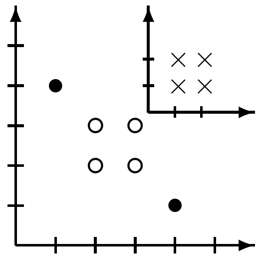

Рис. 3^o *в*).

упорядоченных элементов, то точки $(1, \pi(1))$ и $(\pi^{-1}(1), 1)$ на количество слоев не влияют, а значит получаем:

$$(n-3)^2 R_{n-4}^{n-4}.$$

3^o*б*). Здесь, на рис. 3*б*, треугольник означает фактическое наличие лишь одной из своих вершин, то есть рассматриваются сразу три возможности:

$$3(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})$$

(R_{n-4}^{n-5} исключает совпадение, например, с 3^o*а*).

3^o*в*). Здесь все нежелательные конфигурации описываются случаями 0^o, 1^o*а,б*) и 2^o*а*) с той только разницей, что вместо n следует брать $(n-2)$.

$$R_{n-2}^{n-4} - \underbrace{R_{n-3}^{n-5}}_{0^o} - \underbrace{R_{n-4}^{n-5}}_{1^o a)} - \underbrace{2(n-4)R_{n-4}^{n-5}}_{1^o б)} - \underbrace{(n-4)^2 R_{n-5}^{n-5}}_{2^o a)}.$$

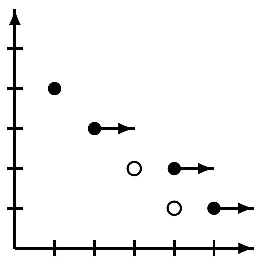

Рис. 3^o *г*).

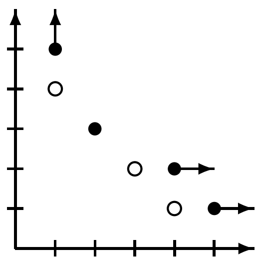

Рис. 3^o *д*).

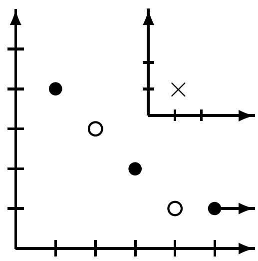

Рис. 3^o *е*).

3^o*г*). Хотя бы одна из точек $(1,4)$ и $(\pi^{-1}(3),3)$ обязательно будет началом длиннейшей цепочки, потому что по лемме никакие другие точки лежать в ее начале не могут. В этом несимметричном случае точки $(\pi^{-1}(1),1)$ и $(\pi^{-1}(2),2)$ могут принимать по $(n-4)$ значения, а $(\pi^{-1}(3),3)$ — оставшиеся $(n-3)$: $2(n-3)(n-4)^2R^{n-4}_{n-4}$.

3^o*д*). В этом несимметричном случае лишь точка $(2,3)$ может быть началом длиннейшей цепочки, а точки $(1,\pi(1)),(\pi^{-1}(2),2)$ и $(\pi^{-1}(1),1)$ могут, соответственно, принимать любые допустимые значения: $2(n-4)^3R^{n-4}_{n-4}$.

3^o*е*). По лемме точка $(\pi^{-1}(1),1)$ началом основной цепочки не является, а значит $(\pi^{-1}(1),1)$ может принимать любое из $(n-4)$ допустимых значений. Более того, следует исключить возможность совпадения этого случая со случаем 3^o*а*) и учесть его несимметричность: $2(n-4)(R^{n-4}_{n-3}-R^{n-5}_{n-4})$.

И, наконец, аналог случая 2^o*в*) для $k=3$, который уже не требует объяснений:

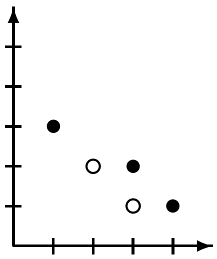

Рис. 3^o*ж*).

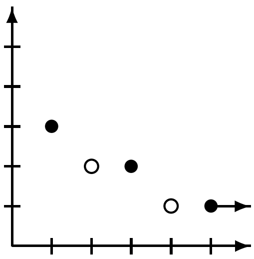

Рис. 3^o*з*).

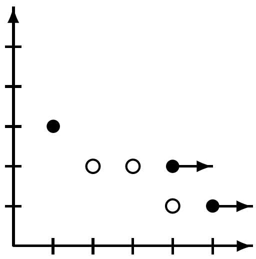

Рис. 3^o*и*).

$$2R^{n-4}_{n-3}. \tag{3^oж)}$$

$$2(n-4)R^{n-4}_{n-3}. \tag{3^oз)}$$

$$2(n-4)^2R^{n-4}_{n-3}. \tag{3^oи)}$$

3^o*к*)
$$2(R^{n-4}_{n-2}-\underbrace{R^{n-5}_{n-3}}_{0^o}-\underbrace{(n-3)R^{n-5}_{n-4}}_{1^o\,а,б\ (без\ б')}).$$

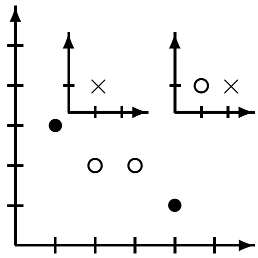

Рис. 3^o *к*).

Итого, при $k=3$, имеем:

$$R_n^{n-3} = \underbrace{R_{n-1}^{n-4}}_{0^o} + \underbrace{(2n-3)R_{n-2}^{n-4}}_{1^o\,а,б)} + \underbrace{(n-2)^2R_{n-3}^{n-4}}_{2^o\,а)} +$$

$$+ \underbrace{R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5}}_{2^o\,б)} + \underbrace{(n-3)^2R_{n-4}^{n-4}}_{3^o\,а)} + \underbrace{3(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})}_{3^o\,б)} +$$

$$+ \underbrace{R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5} - (2n-7)R_{n-4}^{n-5} - (n-4)^2R_{n-5}^{n-5}}_{3^o\,в)} +$$

$$+ \underbrace{2(n-4)^2(n-3)R_{n-4}^{n-4}}_{3^o\,г)} + \underbrace{2(n-4)^3R_{n-4}^{n-4}}_{3^o\,д)} +$$

$$+ \underbrace{2(n-4)(R_{n-3}^{n-4} - R_{n-4}^{n-5})}_{3^o\,е)} + \underbrace{2R_{n-3}^{n-4}}_{3^o\,ж)} + \underbrace{2(n-4)R_{n-3}^{n-4}}_{3^o\,з)} +$$

$$+ \underbrace{2(n-4)^2R_{n-3}^{n-4}}_{3^o\,и)} + \underbrace{2(R_{n-2}^{n-4} - R_{n-3}^{n-5} - (n-3)R_{n-4}^{n-5})}_{3^o\,к)}.$$

После раскрытия всех уже известных формул и необходимых преобразований получаем:

$$R_n^{n-3} - R_{n-1}^{n-4} = \frac{1}{2}(2n^5 - 25n^4 + 116n^3 - 247n^2 + 242n - 88).$$

$$R_n^{n-3} = \sum_{k=5}^{n}\left(R_k^{k-3} - R_{k-1}^{k-4}\right) + R_4^1.$$

$$R_n^{n-3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Big((n-1)(n-3)(n-5)+4\Big)+1.$$

Указанные в формулировке теоремы нижние пределы для n у каждой формулы возникают при выводе рекуррентных соотношений, например, R_n^{n-1} выражается через R_{n-1}^{n-2} и R_{n-2}^{n-2}, которые имеют смысл, самое меньшее, при $n = 3$, однако и при $n = 2$ формула для R_n^{n-1} оказывается верной. Теорема 1 доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению общего случая, когда между n и k отсутствует какая бы то ни было связь, то есть R_n^k рассматривается как функция, существенно зависящая от двух аргументов.

Доказательство Теоремы 2

Принимая во внимание описанное, например, в [3] соответствие между n-перестановками и упорядоченными парами табло Янга, где каждая пара состоит из двух табло одинаковой формы по n ячеек в каждом, заметим, что в левой части (1) стоит число всех n-перестановок, количество слоев у которых равно k. В терминах табло Янга это означает, что оба табло (имеющие, как уже было упомянуто, одинаковую форму) состоят из k строк. Если обозначить числами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ длины 1-ой, 2-ой, …, k-ой строк табло заданной формы соответственно, где $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k > 0$, то правая часть (1) должна равняться сумме по всем таким допустимым наборам $m_1, m_2, \ldots, m_k$ количеств пар табло, имеющих форму, задаваемую этим набором. Используя формулу Мак-Магона [3]:

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_k) = n! \frac{\Delta(m_1 + k - 1, m_2 + k - 2, \ldots, m_k)}{(m_1 + k - 1)!(m_2 + k - 2)! \ldots (m_k)!},$$

выражающую количество различных табло заданной формы, получаем:

$$R_n^k = \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n, \\ m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k > 0}} \left(n! \frac{\Delta(m_1 + k - 1, m_2 + k - 2, \ldots, m_k)}{(m_1 + k - 1)!(m_2 + k - 2)! \ldots (m_k)!} \right)^2 .$$

Здесь условие суммирования означает перебор всех возможных форм табло из n ячеек и k строк, а квадрат в каждом слагаемом возникает, так как мы рассматриваем сразу два табло заданной конфигурации.

Обозначим $n_i = m_i + k - i$ и получим:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m_1 + k - 1 + m_2 + k - 2 + \ldots + m_k = \\ = m_1 + m_2 + \ldots + m_k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 1 = \\ = n + \frac{k(k-1)}{2} =: N, \end{aligned}$$

$$R_n^k = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=N, \\ n_1>n_2>\ldots>n_k>0}} \left(n! \frac{\Delta(n_1, n_2, \ldots, n_k)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \right)^2 = \\ = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=N, \\ n_i>0}} \frac{(n!)^2}{k!} \left(\frac{\Delta(n_1, n_2, \ldots, n_k)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \right)^2 .$$

Последнее равенство справедливо, ибо

а) при наличии в наборе $n_1, n_2, \ldots n_k$ хотя бы двух равных чисел определитель Вандермонда зануляется;

б) условие убывания чисел в наборе $n_1, n_2, \ldots n_k$ можно снять, учитывая, что квадрат определителя Вандермонда — симметричная функция, а упорядочить такой набор можно $k!$ способами (то есть без условия убывания сумма увеличивается ровно в $k!$ раз). Теорема 2 доказана.

Для того, чтобы нагляднее представить характер зависимости данной величины от своих аргументов, докажем теорему 3, дающую нам верхнюю оценку для чисел R_n^k.

Лемма 2. *Пусть $n_1, n_2, \ldots n_k$ — упорядоченный по возрастанию набор различных натуральных чисел, сумма которых равна N, тогда справедливо неравенство:*

$$\Delta^2(n_1, n_2, \ldots n_k) < \left(\frac{2N}{k} \right)^{k(k-1)} . \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму положительных по условию леммы слагаемых:

$$\sum_{k\geqslant i>j\geqslant 1}(n_i-n_j)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i-1}(n_i-n_j)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i-1}n_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(i-1)n_i<\sum_{i=1}^{k}(k-1)n_i=(k-1)N.$$

Теперь используем эту оценку, подставив ее в неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом:

$$\sqrt[\frac{k(k-1)}{2}]{\Delta(n_1,n_2,\dots n_k)}\leqslant\frac{2}{k(k-1)}\sum_{k\geqslant i>j\geqslant 1}(n_i-n_j)<\frac{2N}{k}.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $k(k-1)$, получим доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Используя доказанную выше Лемму 2, приступим к доказательству верхней оценки для чисел R_n^k.

Доказательство Теоремы 3

Из определения полиномиальных коэффициентов следует, что

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N\\ n_i\geqslant 0}}\left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)=k^N,$$

поэтому справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N\\ n_i>0}}\left(\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=N\\ n_i\geqslant 0}}\frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\right)^2\leqslant k^{2N}. \quad (5)$$

Оценим величину $\left(\frac{n!}{N!}\right)(N)^{k(k-1)/2}$:

$$\left(\frac{n!}{N!}\right)(N)^{k(k-1)/2}=\prod_{t=1}^{T:=k(k-1)/2}\left(\frac{n+T}{n+t}\right)<$$

(сделаем замену $n'=n+T$, $t'=T-t=\overline{0,T}$)

$$<\prod_{t'=0}^{T}\left(\frac{n'}{n'-t'}\right)=\exp\left[\sum_{t'=0}^{T}\ln\frac{n'}{n'-t'}\right]=:\exp A.$$

$$A<\int\limits_0^T\ln\frac{n'}{n'-t'}dt=(T-n')\ln\frac{n'}{n'-T}+T.$$

После обратной замены получим:

$$\exp A<\left(\frac{n+T}{n}\right)^{-n}e^T\to 1.$$

Значит $\left(\frac{n!}{N!}\right)^2(N)^{k(k-1)}<\left(\frac{n}{n+k(k-1)/2}\right)^{2n}e^{k(k-1)}<e^{k(k-1)}$.

Используя последнее неравенство, а также соотношения (1) и (4), получим:

$$R_n^k=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=N,\\ n_i>0}}\left(\frac{n!}{N!}\right)^2\Delta^2(n_1,n_2,\ldots,n_k)\left(\frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\right)^2<$$

$$<\frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{N!}\right)^2\left(\frac{2N}{k}\right)^{k(k-1)}\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=N,\\ n_i>0}}\left(\frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\right)^2<$$

$$<\frac{1}{k!}\left(\frac{n!}{N!}\right)^2\left(\frac{2N}{k}\right)^{k(k-1)}\left(k^2\right)^N<$$

$$<\left(\frac{n}{n+k(k-1)/2}\right)^{2n}\frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!}\left(k^2\right)^n<\frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!}\left(k^2\right)^n.$$

Тем самым теорема 3 доказана.

Заметим, что при фиксированном k ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{R_n^k}{n!}$ — сходится, так как используя (2), получаем, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{R_n^k}{n!} < \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\left(k^2\right)^n}{n!} < \frac{(2e)^{k(k-1)}}{k!} e^{k^2}. \tag{6}$$

3. Оценки средней мощности слоев

В данном разделе приводится точная формула и ее верхняя оценка для функции $S_k(n)$, определяющей, как уже было упомянуто, среднюю мощность k-ого слоя n-перестановки.

В работе [1] приводится следующий результат: средняя мощность первого слоя n-перестановки $S_1(n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ и $S_1(n) \sim \ln n$ при $n \to \infty$.

3.1. Средняя мощность второго слоя

Перед тем, как приступить к выводу общей формулы, рассмотрим еще один частный случай ($k = 2$).

Доказательство Теоремы 4

Пусть некоторая точка $(k, i_k), k \geqslant 1$ лежит во втором слое. Значит все точки, меньшие ее, должны лежать исключительно в одном, а значит первом, слое, то есть быть несравнимыми. Точки (j, i_j) и (k, i_k) несравнимы при $j < k$, только если $i_j > i_k$. Таким образом, набор точек, упорядоченный по первой координате в порядке возрастания, образует один слой, только если вторые координаты при этом упорядочены в порядке убывания. Подсчитаем количество k-перестановок, в которых точка (k, i_k) лежит во втором слое. Все точки, у которых вторая координата будет меньше i_k, а их ровно $i_k - 1$, могут быть выбраны из $k-1$ точки ровно $C_{k-1}^{i_k-1}$ способами, а оставшиеся $k-i_k$ точек могут быть расставлены произвольным образом $(k - i_k)!$ способами. Итого получаем $(k - i_k)! C_{k-1}^{i_k-1} = \frac{(k-1)!}{(i_k-1)!}$ перестановок. Поскольку i_k в общем случае нам не известно, а количество точек, меньших k-ой (то есть той, у которой первая координата равна k), не может превосходить $k-1$, то количество k-перестановок, у которых k-ая точка лежит во втором слое, равно

$$\sum_{t=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{t!}.$$

Очевидно, что если мы рассматриваем принадлежность k-ой точки n-перестановки второму слою, то на количество интересующих нас перестановок не могут влиять те точки, у которых хотя бы одна координата больше k, поскольку такие точки просто не могут быть меньшими k-ой. Таким образом, приведенные выше рассуждения о k-ой точке k-перестановок справедливы и для k-ой точки n-перестановок, где $n \geqslant k$. Значит сумма вероятностей того, что k-ые точки, $k=\overline{2,n}$, лежат во втором слое равна

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{t=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{t!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{t!},$$

а это и есть математическое ожидание такой случайной величины от перестановки как количество точек во втором слое, подсчитанное разложением на элементарные события: принадлежность k-ой точки, $k=\overline{2,n}$, второму слою. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Так как для функции $f(x)=e^x$ на всей действительной прямой справедливо разложение в ряд Тейлора в точке $x_0=0$

$$e^x=\sum_{t=0}^{n}\frac{x^t}{t!}+r_n,\ \text{где } r_n=\sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{x^t}{t!},$$

то при $x=1$, используя оценку

$$r_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}c^{n+1}, c\in(0,1),$$

получим

$$e=\sum_{t=0}^{n}\frac{1}{t!}+\frac{e^c c^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\sum_{t=0}^{n}\frac{1}{t!}+\frac{e}{(n+1)!}.$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{1}{t}$:

$$1+\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x+1}\leqslant\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}\leqslant 1+\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x};$$

$$1+\ln(x+1)\Big|_1^n=1-\ln 2+\ln(n+1)\leqslant\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}\leqslant 1+\ln x\Big|_1^n=1+\ln n,$$

$$\text{значит}\ \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}\sim\ln n\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Ясно, что

$$S_2(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{t!}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}(e-1).$$

Теперь оценим $S_2(n)$ снизу:

$$S_2(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}(e-1-r_k)=(e-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{r_k}{k},$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{r_k}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{e}{k(k+1)!}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{e}{k!}\leqslant e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e^2.$$

Значит $S_2(n)\sim(e-1)\ln n$, так как ее оценки снизу и сверху являются асимптотически равными функциями. Утверждение доказано.

3.2. Оценки средней мощности слоев для произвольного k

Теперь, имея достаточное количество информации о числах R_n^k, перейдем к доказательству общей формулы для $S_k(n)$:

$$S_k(n)=\sum_{t=k}^{n}\frac{1}{t}\sum_{m=k-1}^{t-1}\frac{R_m^{k-1}}{m!},$$

а именно, докажем теорему 5.

Рассмотрим p_t^k — вероятность того, что t-ая точка $(t, \pi(t))$ n—перестановки лежит в k-м слое. Ясно, что для этого необходимо, чтобы $\pi(t) \geqslant k$. Обозначим $m := \pi(t)$. Также очевидно, что точки, у которых хотя бы одна координата превосходит t, не могут влиять и не влияют на то, в какой слой попадает t-ая точка, поэтому, без ограничения общности, рассматриваем t-перестановку. Поскольку у точек, меньших $(t, \pi(t))$, вторая координата не превосходит $\pi(t) - 1$ по определению нашего частичного порядка, то именно эти $\pi(t) - 1$ точек должны образовывать ровно $k - 1$ слой для того, чтобы точка $(t, \pi(t))$ лежала точно в k-м слое. Количество таких «образований» есть R_m^{k-1}, где $m = \overline{k-1, t-1}$. Более того, для этих точек надо выбрать значения первых координат, что можно сделать C_{t-1}^m способами. Оставшиеся $t - (m + 1)$ точки с большими чем $\pi(t)$, а значит уже определившимися по построению, первыми координатами могут располагаться произвольным образом друг относительно друга, что дает $(t - m - 1)!$ возможностей. Если при этом вспомнить, что всего t-перестановок существует ровно $t!$ штук, то получим:

$$p_t^k = \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}\, C_{t-1}^m\, (t-m-1)!}{t!} = \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!}.$$

Введем случайную величину $\xi(\pi) := |I_k(\pi)|$, где $\pi \in S_n$, n — фиксировано, а все перестановки равновероятны. Тогда $E\xi = \sum_{\pi \in S_n} \frac{|I_k(\pi)|}{n!}$. Рассмотрим (0,1)-матрицу $\|a_{ij}\|$ размера $n! \times n$ такую, что

$$a_{ij} = 1 \;\Leftrightarrow\; (j, \pi_i(j)) \in I_k(\pi_i),$$

i означает некоторую нумерацию перестановок. Тогда $E\xi$ — это не что иное как ортонормированная $(\frac{1}{n!})$ сумма всех единиц этой матрицы, сгруппированная по строкам. Если же перегруппировать эту сумму по столбцам, получим

$$E\xi = \sum_{t=1}^{n} P\{(t, \pi(t)) \in I_k(\pi)\} = \sum_{t=1}^{n} p_t^k = \sum_{t=k}^{n} p_t^k.$$

Последнее верно в силу того, что $p_t^k = 0$ при $t < k$. Таким образом получено, что

$$S_k(n) = \sum_{t=k}^{n} \frac{1}{t} \sum_{m=k-1}^{t-1} \frac{R_m^{k-1}}{m!},$$

то есть теорема 5 доказана.

Используя неравенство (6) для формулы (3), получаем верхнюю оценку

$$S_k(n) < \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \sum_{t=k}^{n} \frac{1}{t} < \frac{(2e)^{k(k-1)} e^{k^2}}{k!} \ln n,$$

что доказывает следствие из Теоремы 5.

Список литературы

[1] Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[2] Ефремов Д. В. О некоторых свойствах частично упорядоченных множеств, задаваемых перестановками // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIII Международной конференции (Казань, 27–31 мая 2002 г.) Часть I. — М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2002. — С. 62.

[3] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Том 3: Сортировка и поиск. — М.: Мир, 1987.