О форме конфигураций, растущих в симметрических однородных структурах

А. Г. Данилов

В настоящей работе изучаются некоторые геометрические свойства однородных структур. Однородная структура представляет собой множество одинаковых автоматов, каждый из которых функционирует в дискретном времени с учетом своего состояния и состояния соседних автоматов. Рассматриваются симметрические пороговые двумерные однородные структуры, имеющие два состояния ячейки 0 и 1. Для конфигураций в этих однородных структурах вводится понятие бесконечного роста и решается задача нахождения асимптотических очертаний бесконечно растущих конфигураций.

Однородной структурой (сокращенно ОС) σ называется набор

$$(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi).$$

Здесь $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называют *ячейками* однородной структуры σ. Элементы множества $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ называются *состояниями ячейки* ОС σ. $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных ненулевых элементов из $\mathbb{Z}^k$ называется *шаблоном соседства* ОС σ. Набор V определяет для каждой ячейки α ОС σ набор $\vec{V}(\alpha) = (\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1})$, называемый *упорядоченной окрестностью* ячейки α. Множество $\{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α и обозначается $V(\alpha)$. Функция $\varphi : (E_n)^h \to E_n$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$ называется *локальной функцией переходов* ОС σ.

Состоянием однородной структуры σ называется произвольная функция f, определенная на множестве $\mathbb{Z}^k$ и принимающая значения из E_n. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ и f состояние ОС σ, то значение $f(\alpha)$ называется *значением ячейки* α, определяемым состоянием f ОС σ. На множестве Σ всех состояний ОС σ определена *глобальная функция переходов* Φ однородной структуры σ, полагая $\Phi(f) = g$, если $f, g \in \Sigma$ и выполняется тождество

$$g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1})).$$

Выделим подкласс Σ' класса Σ всех состояний ОС σ, полагая $f \in \Sigma'$ тогда и только тогда, когда равенство $f(\alpha) = 0$ выполняется для всех ячеек α, кроме, быть может, конечного их числа. Состояния ОС σ, принадлежащие Σ', называются *конфигурациями* этой ОС. Легко видеть, что если $f \in \Sigma'$, то $\Phi(f) \in \Sigma'$.

Конфигурацию f однородной структуры σ назовем *бесконечно растущей*, если с течением времени число ненулевых ячеек конфигурации бесконечно увеличивается.

Далее в работе рассматриваются только однородные структуры размерности $k = 2$.

Расстоянием $\rho(A, B)$ между двумя замкнутыми множествами A и B точек плоскости называем величину:

$$\max\left(\max_{x\in A}\min_{y\in B}\rho(x,y),\ \max_{y\in B}\min_{x\in A}\rho(x,y)\right).$$

Далее каждой ячейке сопоставим на плоскости единичный квадрат с центром в ней самой и сторонами, параллельными главным осям. Для произвольной заданной конфигурации f рассмотрим объединение всех точек плоскости, содержащихся в квадратах ненулевых ячеек конфигурации. Данное множество точек плоскости будем называть *покрытием конфигурации* f и обозначать через $U(f)$.

Рассмотрим два односвязных замкнутых множества G_1 и G_2 точек плоскости, причем $G_1 \subset G_2$. Если для данной бесконечно растущей конфигурации f в ОС σ и некоторых положительных вещественных чисел α, β, v выполнено:

$$(\alpha + vt) \cdot G_1 \subset U(\Phi^t(f)) \subset (\beta + vt) \cdot G_2,$$

при всех t, начиная с некоторого, то говорим, что конфигурация f является (G_1, G_2)-растущей со скоростью v.

Если далее, в ОС σ каждая бесконечно растущая конфигурация является (G_1, G_2)-растущей со скоростью v, для некоторых v, G_1 и G_2, то такую однородную структуру называем *правильной* для данного типа роста конфигураций.

Рассмотрим далее некоторую бесконечную последовательность $\{\sigma_m, G'_m, G''_m, v_m\}_{m=1}^{\infty}$, где σ_m — однородная структура, v_m — положительное вещественное число и G'_m, G''_m — односвязные замкнутые множества. Причем, для каждого m и некоторого односвязного замкнутого множества G выполнено:

$$G'_m \subset G \subset G''_m, \;\; G'_m \subset G'_{m+1}, \;\; G''_{m+1} \subset G''_m,$$
$$\lim_{m\to\infty} \rho(G, G'_m) = 0, \;\; \lim_{m\to\infty} \rho(G, G''_m) = 0.$$

Пусть также каждая ОС σ_m является правильной для (G'_m, G''_m)-роста конфигураций со скоростью v_m для всех m, начиная с некоторого m_0. В таком случае называем последовательность ОС $\{\sigma_m\}_{m=1}^{\infty}$ *аппроксимирующей* G-рост.

Далее через $\sigma(2m+1, H)$, $H \in N$ и $H \leqslant (2m+1)^2$ будем обозначать двумерную однородную структуру, имеющую два состояния ячейки 0 и 1, окрестность ячейки в виде квадрата $\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \big| \, |x| \leqslant m, |y| \leqslant m\big\}$ и симметрическую пороговую локальную функцию перехода. Причем локальная функция перехода принимает значение 1, если число активных ячеек в локальной окрестности больше или равно величины H, и 0 в остальных случаях.

Рассмотрим замкнутое множество на плоскости, которое симметрично относительно горизонтали, вертикали и диагоналей, и в первом октанте его граница задается уравнением:

$$y = \frac{D}{2} + \frac{S}{2x - D}, \text{ где } D > 0, \; S \in (0, D^2/2) \text{ и } x \in \left[\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{S}{2}}, \frac{D}{2} - \frac{S}{D}\right].$$

Обозначим данное множество через $M(D, S)$.

Теорема 1. *Последовательность ОС* $\left\{\sigma(2m+1, km^2)\right\}_{m=1}^{\infty}$, $0<k<2$ *является аппроксимирующей* $M(2,k)$*-рост.*

Автор выражает благодарность А. С. Подколзину за постановку задачи.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.