

# Сверхразрешение на основе конечномерной аппроксимации сигналов

А. И. Чуличков, И. В. Богданов, Д. М. Устинин

Предложен метод редукции результата измерения выходного сигнала датчика с недостаточно высоким разрешением к виду, свойственному измерению на идеальном измерительном приборе. Для редукции используется конечномерная аппроксимация измеряемых параметров исследуемого объекта, причем размерность и параметры аппроксимации выбираются на основе измерения выходного сигнала датчика согласованно с его разрешающей способностью и точностью измерения.

## 1. Введение

При анализе результатов измерительных экспериментов из-за недостаточной разрешающей способности регистрирующих систем довольно часто многие особенности сигналов, характеризующих исследуемый объект, оказываются смазанными и неразличимыми на фоне измерительных шумов. Увеличить разрешение путем технического совершенствования измерительных систем не удастся из-за фундаментальных запретов (дифракционных, термодинамических и т. п.) Действительно, например, из-за эффектов дифракции на изображениях принципиально незаметны детали с угловым размером менее чем  $\lambda/D$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $D$  — размер апертуры оптической системы. Однако, если известна математическая модель, в соответствии с которой формируется сигнал, и задан класс измеряемых сигналов, то увеличить разрешение можно с помощью методов теории измерительно-вычислительных систем [1–3]. Эта проблема реша-

ется путем математического преобразования (редукции) результата измерения к виду, какой он имел бы при использовании «идеальной» регистрирующей системы с разрешением, возможно, более высоким, чем позволяют дифракционные и другие ограничения [1].

Методы редукции основаны на анализе математической модели, связывающей результат измерения с параметрами изучаемого объекта. При этом, как известно, чем меньше априорная неопределенность значений параметров объекта, тем точнее оказывается результат редукции. В данной работе предполагается, что изучаемый объект с некоторой точностью характеризуется конечной линейной комбинацией сигналов. Эти сигналы, с одной стороны, принадлежат классу, выбираемому исследователем так, чтобы охарактеризовать наиболее важные с точки зрения решаемой задачи свойства объекта. Параметры этих сигналов и число слагаемых линейной комбинации уточняются на основании результата измерения: предположение о том, что сигнал от объекта может быть представлен в виде выбранной линейной комбинации, не должно противоречить результату измерения.

Поясним, как выбирается эта линейная комбинация. Например, в задачах спектроскопии есть участки спектра, в которых зависимость энергии излучения от длины волны представляет собой набор линий, положение и форма которых априори известны лишь с некоторой точностью. Так как реальный спектрометр обладает конечной разрешающей способностью, то часть информации о структуре линий теряется: близко расположенные линии сливаются в одну, искажаются их амплитуды и т. п. Если исследователь не знает точное количество и форму линий, то естественной представляется следующая стратегия: следует подобрать минимальное количество линий такой формы, чтобы расчетный отклик спектрометра на их комбинацию в наибольшей степени согласовывался бы с результатом измерения, и при этом условии их амплитуды оценивались бы максимально точно.

Аналогичная ситуация встречается при исследовании динамических систем с помощью измерителя ее параметров, обладающего конечным временным разрешением. В этом случае все время эволюции системы можно разбить на участки характерного движения: для перемещающейся цели, например, это интервалы равномерного прямолинейного движения, интервалы ускорений и т. п., однако как пара-

метры движения, так и времена различного типа движений должны выбираться на основании результатов наблюдений.

Еще один важный пример дают исследования достаточно протяженных объектов заданного размера по их изображениям: в этом случае идеальное изображение объекта можно представить набором участков постоянной яркости, передающих особенности светоотражающих поверхностей объектов [4, 5], но ни их расположение, ни яркости априори задать не удастся. В этой ситуации класс исследуемых сигналов составляют линейные комбинации характеристических функций разбиения поля зрения на множества с неизвестными границами. Форма этих множеств должна наилучшим образом согласовываться с предъявленным изображением, а яркость или цвет определяться наиболее точно.

Подчеркнем, что ни значение параметров векторов линейной комбинации, ни их число при подходе, предлагаемом в данной статье, априори неизвестны. В настоящей работе они выбираются на основе измерения выходного сигнала измерительного датчика. В процессе измерения входной сигнал искажается датчиком и шумом, и естественно, информация об объекте изучения частично теряется. Поэтому выбираемая модель входного сигнала, с одной стороны, может быть достаточно идеализированной, то есть отличаться от реального входного сигнала. С другой стороны, это отличие не должно быть заметно в выходном сигнале, маскируясь искажениями датчика и шума. В этом смысле будем говорить не о точной модели входного сигнала, а о ее аппроксимации, согласованной с результатом измерения.

На основе математической модели входного сигнала, в наибольшей степени согласующейся с результатом эксперимента, в работе решаются задачи наиболее точной редукации измеренного сигнала к заданному виду.

## 2. Математическая модель измерения

Будем считать, что сигнал  $f$  измеряется в эксперименте по схеме

$$\xi = Af + \nu. \quad (1)$$

Сигнал  $\xi$  интерпретируется как искаженный шумом  $\nu$  результат измерения выходного сигнала  $Af$  линейной системы регистрации, на вход которой подан сигнал  $f \in \mathcal{R}$ , где  $\mathcal{R}$  — евклидово пространство. Обозначение  $A$  будем использовать как для самого регистрирующего прибора, так и для его математической модели, заданной в виде линейного ограниченного оператора  $A \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n)$ . О погрешности  $\nu$  будем полагать, что этот случайный вектор имеет нулевое математическое ожидание  $\mathbf{E}\nu = 0$  и известен его корреляционный оператор  $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ , определенный для любого вектора  $x \in \mathcal{R}_n$  равенством  $\Sigma x = \mathbf{E}(x, \nu)\nu$ ; здесь  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathcal{R}_n$ .

### 3. Постановка задачи редукции при конечномерной аппроксимации входного сигнала

#### 3.1. Модель аппроксимации входного сигнала

Задача редукции измерения  $\xi$ , полученного по схеме (1), состоит в таком преобразовании вектора  $\xi$ , которое можно интерпретировать как сигнал, наиболее близкий к выходному сигналу некоторого прибора  $U$ , на вход которого подан тот же сигнал  $f$ , что и в эксперименте (1). На практике прибор, определяемый линейным оператором  $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$ , действующим из  $\mathcal{R}$  в евклидово пространство  $\mathcal{R}_m$ , дает на выходе параметры исследуемого объекта, не искаженные взаимодействием с измерительным прибором<sup>1</sup> [1–3]; как частный случай, может рассматриваться и редукция к входному сигналу  $f$  в (1), при этом оператор  $U$  должен быть выбран единичным  $I \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R})$ .

В основе методов редукции лежит математическая модель реального прибора  $A$ , идеального прибора  $U$ , модель погрешности  $\nu$ , описанные в предыдущем разделе, а также модель входного сигнала  $f \in \mathcal{R}$ . Будем считать, что сигнал  $f$  с некоторой точностью может быть задан линейной комбинацией

$$f^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i e_i(\lambda_i) \quad \lambda^{(N)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Lambda^{(N)}, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Если  $\mathcal{R}$  — бесконечномерное евклидово пространство, то в качестве  $U$  обычно выбирается оператор проецирования на конечномерное подпространство, [2].

где  $N$  — некоторое натуральное число,  $(c_1, \dots, c_N) = c^{(N)} \in \mathcal{R}_N$  —  $N$ -мерный вектор коэффициентов линейной комбинации, аппроксимирующей входной сигнал  $f \in \mathcal{R}$ ; векторы этой линейной комбинации  $e_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , принадлежат заданному классу

$$\mathcal{L}^{(N)} = \left\{ \{e_1(\lambda_1), \dots, e_N(\lambda_N)\}, (\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)} \right\} \subset \mathcal{R},$$

значения параметров  $\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}$  задают векторы разложения из выбранных классов. Здесь  $\mathcal{R}_N$  обозначает  $N$ -мерное векторное пространство, его элементами являются всевозможные наборы из  $N$  чисел.

Вектор  $f^{(N)} \in \mathcal{R}$  аппроксимирует входной сигнал  $f \in \mathcal{R}$ , подаваемый на вход прибора  $A$  в эксперименте (1) с точностью, определяемой величиной

$$\varepsilon^{(N)} = f - f^{(N)} \in \mathcal{R}. \quad (3)$$

### 3.2. Задача редукции для случая конечномерной аппроксимации входного сигнала

При фиксированных  $N$  и  $\lambda^{(N)}$  и произвольных  $c^{(N)} \in \mathcal{R}_N$  класс сигналов, определяемых соотношением (2), представляет собой линейное подпространство в  $\mathcal{R}$  размерности не более  $N$ . Если считать, что входной сигнал  $f$  можно точно представить в виде (2) с заданными  $N$  и  $\lambda^{(N)}$ , то схема измерения (1) может быть переписана в виде

$$\xi = Af^{(N)} + \nu = \sum_{i=1}^N c_i Ae_i(\lambda_i) + \nu = B^{(N)}c^{(N)} + \nu,$$

$$c^{(N)} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N,$$

где линейный оператор  $B^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$  для любого  $c \in \mathcal{R}_N$  определяется соотношением

$$B^{(N)}c = \sum_{i=1}^N c_i Ae_i(\lambda_i), \quad c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N.$$

Выходной сигнал идеального прибора  $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$ , на вход которого подан сигнал  $f$ , определенный в (2), запишется в виде

$$Uf^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i Ue_i(\lambda_i) = W^{(N)}c, \quad c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{R}_N, \quad (4)$$

здесь  $W^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_m)$ .

Теперь можно записать

$$\xi = B^{(N)}c + \nu, \quad (5)$$

и если заданы оператор  $B^{(N)} \in (\mathcal{R}_N \rightarrow \mathcal{R}_n)$ , ковариационный оператор  $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$  шума  $\nu$ , и  $\mathbf{E}\nu = 0$ , а вектор  $c \in \mathcal{R}_N$  полагается априори неизвестным, то задача редукции сигнала  $\xi \in \mathcal{R}_n$  к виду (4) эквивалентна стандартной задаче редукции измерения (5) для модели  $[B^{(N)}, \Sigma]$ , описанной в работах [1–3]. Эта задача состоит в преобразовании  $R \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_N)$  сигнала  $\xi$  к виду

$$\begin{aligned} R\xi &= RB^{(N)}c + R\nu = W^{(N)}c + (RB^{(N)} - W^{(N)})c + R\nu = \\ &= Uf^{(N)} + (RA - U)f^{(N)} + R\nu, \end{aligned}$$

который можно интерпретировать как искомый сигнал  $Uf^{(N)}$ , искаженный «ложным сигналом»  $(RA - U)f^{(N)} = (RB^{(N)} - W^{(N)})c$  и шумом  $R\nu$ .

Если сигнал  $f^{(N)}$  априори неизвестен, то оценить величину «ложного сигнала» можно, если и только если выполнено равенство

$$RB^{(N)} = W^{(N)}, \quad (6)$$

при этом величина «ложного сигнала» равна нулю. Будем выбирать оператор редукции  $R \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_N)$  из множества преобразований, удовлетворяющих равенству (6), минимизацией среднеквадратичной величины шума  $R\nu$ . Это предложение приводит к вариационной задаче

$$\mathbf{E}\|R_0\nu\|^2 = \inf \left\{ \mathbf{E}\|R\nu\|^2 \mid RB^{(N)} = W^{(N)} \right\}. \quad (7)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (7)  $W^{(N)}(I - (B^{(N)})^{-1}B^{(N)}) = 0$ , ее решение

$$R_0 = W^{(N)} \left( \Sigma^{-1/2} B^{(N)} \right)^{-1} \Sigma^{-1/2}$$

и оценка погрешности редукции

$$\mathbf{E} \left\| R_0 \xi - U f^{(N)} \right\|^2 = \mathbf{E} \| R_0 \nu \|^2 = \text{tr } R_0 \Sigma R_0^* \quad (8)$$

приведены в [1–3]. Здесь  $D^{-1}$  означает оператор, псевдообратный к  $D$ , [2, 3].

### 3.3. О критерии аппроксимации входного сигнала

Замена сигнала  $f$  его аппроксимацией  $f^{(N)}$  вида (2) приведет к тому, что к результату измерения в (5) добавится погрешность  $A\varepsilon^{(N)}$ , определяемая соотношением (3). Однако если эта погрешность незаметна на фоне шума  $\nu$ , то на основании измерения (5) невозможно судить о том, отличается ли сигнал  $f$  от  $f^{(N)}$ . Критерием согласия гипотезы о модели формирования сигнала  $\xi$  в теории измерительно-вычислительных систем является надежность модели, понимаемая как минимальный уровень критерия, принимающего статистическую гипотезу о том, что  $\xi$  сформировано согласно выбранной модели, против заданной альтернативы, см. [1]. Развиваемый далее подход следует методу максимальной надежности, описанному, например, в работе [6].

### 3.4. Надежность аппроксимации входного сигнала

Пусть вектор  $\xi \in \mathcal{R}_n$  сформирован в результате измерения сигнала  $f^{(N)} = \sum_{i=1}^N c_i e_i(\lambda_i)$  с неизвестными значениями  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , число слагаемых  $N$  фиксировано, а погрешность  $\nu$  контролируется нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и невырожденным корреляционным оператором  $\Sigma \in (\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_n)$ . Тогда предположение о том, что модель измерения верна, эквивалентно следующей статистической гипотезе:

случайный вектор  $\xi$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, принадлежащим линейному подпространству  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N))$  в  $\mathcal{R}_n$ , составленного из всех линейных комбинаций векторов  $Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N) \in \mathcal{R}_n$ ,

$$\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), \quad a \in \mathcal{L}. \quad (9)$$

Альтернатива состоит в том, что математическое ожидание вектора  $\xi$  не принадлежит  $\mathcal{L}$ :

$$\xi \sim \mathcal{N}(b, \Sigma), \quad b \notin \mathcal{L}. \quad (10)$$

Как известно [1, 7, 8], в такой задаче существует равномерно наиболее мощный инвариантный критерий, надежность которого, то есть наименьший уровень, при котором гипотеза (9) отвергается в пользу альтернативы (10), равна

$$\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)}) = 1 - F_k \left( \left\| (I - \Pi^{(N)}) \Sigma^{-1/2} \xi \right\|^2 \right), \quad (11)$$

где  $(I - \Pi^{(N)})$  — ортогональный в  $\mathcal{R}_n$  проектор на ортогональное дополнение  $\mathcal{L}_s^\perp$  к линейному подпространству  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}(\Sigma^{-1/2} Ae_1(\lambda_1), \dots, \Sigma^{-1/2} Ae_N(\lambda_N))$ ,  $F_k(\cdot)$  — функция распределения Пирсона ( $\chi_k^2$ ) с числом степеней свободы  $k$ , равным размерности подпространства  $\mathcal{L}_s^\perp$ .

### 3.5. Геометрическая интерпретация надежности модели аппроксимации

Назовем расстоянием в  $\mathcal{R}_n$  функцию  $\rho(x, y) = \|\Sigma^{-1/2}(x - y)\|$ ,  $x, y \in \mathcal{R}_n$ . Тогда, согласно (11), надежность  $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$  определяется расстоянием от вектора  $\xi \in \mathcal{R}_n$  до  $N$ -мерного подпространства  $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}_n$ . Если сигнал  $f$ , измеряемый в эксперименте (1), в точности является сигналом вида (2), то расстояние

$$\rho(\xi, \mathcal{L}) = \inf_{x \in \mathcal{L}(e_1(\lambda_1), \dots, e_N(\lambda_N))} \rho(\xi, Ax) \quad (12)$$

от вектора  $\xi$  до подпространства  $\mathcal{L}$  равно длине разности между вектором  $\xi \in \mathcal{R}_n$  и его проекцией на  $\mathcal{L}$ , определяется только проекцией

вектора шума  $\nu$  на  $\mathcal{L}^\perp$  и контролируется распределением  $\chi_k^2$  с числом степеней свободы, равным  $k = n - \dim \mathcal{L}$ . Надежность  $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$  в этом случае имеет равномерное на  $[0, 1]$  распределение [1]. Если же  $f$  в (1) не является линейной комбинацией функций вида (2), расстояние  $\rho(\xi, \mathcal{L})$  в (12) определится не только вектором шума, но и составляющей вектора  $f$ , не принадлежащей  $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ . Его распределение в этом случае контролируется нецентральным распределением  $\chi_{(\vartheta, k)}^2$  с  $k$  степенями свободы и параметром нецентральности, равным  $\vartheta = \|(I - \Pi_{\lambda^{(N)}}^{(N)})\Sigma^{-1/2}Af\|^2$ , а распределение надежности  $\alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)})$  концентрируется вблизи нуля, [1]. Величина надежности характеризует, таким образом, заметность отличия сигнала  $f$  от его аппроксимации вида (2) по результату измерения  $\xi$  в (1) на фоне шума  $\nu$ .

### 3.6. Задача редукции для наиболее надежной модели аппроксимации входного сигнала заданной размерности

Пусть число слагаемых  $N$  в (2) задано. Выберем значение  $\widehat{\lambda}^{(N)}$  параметров  $\lambda^{(N)}$  так, чтобы надежность  $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$  соответствующей гипотезы была максимальна:

$$\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)}) = \sup_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \alpha^{(N)}(\xi, \lambda^{(N)}). \quad (13)$$

Заметим, что в результате минимизации (13), в соответствии с определением надежности (11) и ее геометрической интерпретацией выбирается подпространство входных сигналов  $\widehat{\mathcal{L}}_f = \mathcal{L}(e_1(\widehat{\lambda}_1), \dots, e_N(\widehat{\lambda}_N)) \subset \mathcal{R}$ , для которых соответствующее пространство наблюдаемых сигналов  $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(Ae_1(\widehat{\lambda}_1), \dots, Ae_N(\widehat{\lambda}_N)) \subset \mathcal{R}_n$  наиболее близко к реализации случайного вектора  $\xi \in \mathcal{R}_n$ . Поэтому распределение надежности  $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$ , определенной в (13), при  $f \in \mathcal{L}_f$  будет несколько отличаться от равномерного, однако по величине  $\rho(\xi, \widehat{\mathcal{L}}) = \inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$  или зависящей от него величины надежности  $\alpha^{(N)}(\xi, \widehat{\lambda}^{(N)})$  по-прежнему можно судить о заметности отличий сигнала  $f$  от его аппроксимации.

Воспользуемся полученной конечномерной моделью входного сигнала, найдем решение задачи редукции (7). Если  $\widehat{R}^{(N)} \in \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_m$  — ее решение, то вектор  $\widehat{R}^{(N)}\xi$  интерпретируется как оценка выходного сигнала  $Uf$  идеального прибора  $U$ , полученная в рамках модели  $[\widehat{B}^{(N)}, \Sigma]$ , наилучшая в следующем смысле:

- конечномерная аппроксимация входного сигнала вида  $f^{(N)} \in \widehat{\mathcal{L}}_f$  с максимальной надежностью согласуется с результатом измерения (1);
- в предположении, что на вход прибора  $A$  поступает сигнал, имеющий вид  $f \in \widehat{\mathcal{L}}_f$ , вектор  $\widehat{R}^{(N)}\xi$  является наиболее точной оценкой сигнала  $Uf \in \mathcal{R}_m$ .

Оценка  $\widehat{R}^{(N)}\xi$  сопровождается погрешностью, вычисляемой по формуле (8) на основании  $N$ -мерной аппроксимации модели входного сигнала, согласующейся с результатом измерения с надежностью, определенной в (13).

### 3.7. Выбор размерности аппроксимации

Проделав процедуру, описанную в предыдущем разделе, для каждого значения  $N = 1, 2, \dots$ , получим семейство решений задачи редукции. С ростом  $N$  расстояние  $\inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$  от вектора  $\xi$  до ближайшего к нему подпространства из класса  $\{\mathcal{L}(Ae_1(\lambda_1), \dots, Ae_N(\lambda_N)), \lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}\}$ , очевидно, не возрастает. Чем меньше это расстояние, тем больше надежность соответствующей модели аппроксимации (при заданном  $N$ ), и тем менее возможно заметить отличие сигнала  $f$  от его конечномерной аппроксимации по результату  $\xi$  измерения сигнала  $Af$  на фоне шума  $\nu$ , решая соответствующую задачу проверки статистической гипотезы или вычисляя ее надежность. А значит, и тем меньше причин считать, что сигнал  $f$  имеет более сложную форму.

В то же время стремление к слишком большому значению надежности модели в (13) путем увеличения размерности аппроксимации  $N$  приводит к тому, что вместо аппроксимации сигнала  $f$  все с большей подробностью начинает аппроксимироваться шум. Действительно, если все составляющие сигнала  $f \in \mathcal{R}$ , заметные на фоне

шумов в сигнале  $Af \in \mathcal{R}_n$ , уже вошли в линейную комбинацию сигналов, аппроксимирующую  $f$ , то дальнейшее увеличение размерности аппроксимации на единицу будет всякий раз приводить к уменьшению числа степеней свободы распределения  $\chi^2$  случайной величины  $\|(I - \Pi_{\lambda^{(N)}}^{(N)})\Sigma^{-1/2}\xi\|^2$ , определяющей надежность соответствующей модели. Этот переход от аппроксимации сигнала к аппроксимации шума можно оценить по характеру убывания расстояния  $\inf_{\lambda^{(N)} \in \Lambda^{(N)}} \rho(\xi, \mathcal{L})$  в зависимости от  $N$ : резкое замедление скорости убывания свидетельствует о том, что основные информативные составляющие сигнала  $f$  уже отражены в его конечномерной аппроксимации.

#### 4. Конечномерная аппроксимация при отсутствии ограничений на базисные векторы

Рассмотрим вырожденную ситуацию, когда о классе входных сигналов ничего не известно. С формальной точки зрения это означает, что класс векторов  $\Lambda^{(N)}$  в (2) составляют любые комбинации из  $N$  векторов пространства  $\mathcal{R}$ . Речь идет о том, чтобы по заданной модели  $[A, \Sigma]$  измерения (1) определить линейное подпространство в  $\mathcal{R}$  размерности не больше  $N$ , такое, чтобы его линейные комбинации в наилучшей степени согласовывались бы с результатом измерения. Так как согласие модели входного сигнала с результатом измерения, как следует из предыдущего раздела, определяется расстоянием от вектора  $\xi$  до линейного подпространства вида  $\{Af, f \in \mathcal{R}\}$ , то наилучшей моделью входного сигнала в этом случае будет линейная комбинация вектора  $A^{-}\xi \in \mathcal{R}$  с нужным числом векторов из нульпространства оператора  $A$ . Легко видеть, что в этом случае задача редукции к прибору  $U \in (\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_m)$  ничем не отличается от задачи несмещенного синтеза сигнала  $Uf$  [1, 3]; она разрешима тогда и только тогда, когда  $U(I - A^T A) = 0$ , и ее решение дается оператором  $R_0 = U(\Sigma^{-1/2} A)^{-}\Sigma^{-1/2}$  и редукция  $R\xi$  сопровождается погрешностью  $h(U) = \mathbf{E}\|R\xi - Uf\|^2 = \text{tr}(U(A\Sigma^{-1}A^*)U^*$ .

Для того, чтобы получить более содержательный результат, следует наложить более жесткие ограничения на класс векторов, задающих линейные комбинации, аппроксимирующие сигнал  $f \in \mathcal{R}$ .

Заметим, что в рассматриваемом случае к более содержательным задачам приводит постановка, в которых требуется определить подпространство в  $\mathcal{R}$  заданной размерности, определяющей результат редукции с наименьшей погрешностью среди всех проекций той же размерности. Речь идет о задачах, связанных с понятием эффективного ранга модели линейных измерений с погрешностью. Им посвящены работы [9–13].

## 5. Модель кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда в качестве аппроксимации для  $f \in \mathcal{R}$  используется кусочно-постоянный сигнал. Будем считать  $f$  элементом пространства функций  $L_2(X)$ , заданных на некотором множестве  $X$  и квадратично интегрируемых на этом множестве, и запишем кусочно-постоянную аппроксимацию  $f^{(N)}(\cdot) \in L_2(X)$  сигнала  $f(\cdot)$  в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i(x); \quad x \in X, \quad \chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i, \\ 0, & x \notin A_i, \end{cases} \quad (14)$$

здесь  $f^{(N)}(x)$  — амплитуда сигнала  $f^{(N)}(\cdot)$  в точке  $x \in X$ ,  $\chi_i(\cdot)$  — индикаторная функция подмножества  $A_i$  множества  $X$ , амплитуда сигнала  $f^{(N)}(\cdot)$  в любой точке множества  $A_i$  имеет одно и то же значение  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Множества  $A_i$  с одинаковой амплитудой сигнала  $u$  попарно не пересекаются,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , и в сумме составляют все  $X$ :  $\bigcup_{i=1}^N A_i = X$ .

Множества  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и их количество  $N$  априори неизвестны и должны быть выбраны в соответствии с результатом измерения (1). В согласии с предлагаемым подходом, разбиение множества  $X$ , состоящее из непересекающихся подмножеств одинаковой амплитуды, происходит максимизацией (13), где в качестве векторов  $e_i^{(N)}(\lambda_i^{(N)})$  используются индикаторные функции множеств  $A_i$ , а их параметрами  $\lambda_i^{(N)}$  являются границы этих множеств,  $i = 1, \dots, N$ .

Эта максимизация эквивалентна минимизации расстояния  $\rho(\cdot, \cdot)$  от вектора  $\xi$  до проекции  $\xi$  на множество кусочно-постоянных сигналов вида (14); минимизация происходит выбором разбиения  $X$ .

## 6. Связь с методом максимального правдоподобия

Рассмотрим несколько более простую ситуацию, когда известно, что входной сигнал  $f \in \mathcal{L}_2(X)$  задается кусочно-постоянной функцией вида (14), заданной на отрезке  $X$  числовой прямой,  $X = [a_0, a_N]$ , множества  $A_j \subset X$  являются отрезками  $[a_{j-1}, a_j]$ , а вектор шума измерения  $\nu \in \mathcal{R}_n$  в (1) контролируется нормальным распределением  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ . В этом случае оценку множеств  $A_j$  и значения  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , сигнала  $f$  на этих множествах можно найти как оценки максимального правдоподобия [7]. Логарифм функции правдоподобия в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} l(\xi, a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N) &= \\ &= k_0 - \frac{1}{2} \left\| \Sigma^{-1/2} \left( \xi - \sum_{i=1}^N c_i A \chi_i \right) \right\|^2, \quad k_0 = \text{const}, \quad (15) \end{aligned}$$

и оценка максимального правдоподобия определяется как решение задачи на максимум

$$\begin{aligned} l(\xi, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_{N-1}, \widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_N) &= \\ &= \sup_{a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N} l(\xi, a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N). \quad (16) \end{aligned}$$

**Теорема 1.** В рассматриваемом случае оценка максимального правдоподобия, полученная как решение задачи (16), совпадает с оценкой, полученной при решении задачи (13), и сводится к задаче на минимум

$$\left\| \Sigma^{-1/2} \left( \xi - \sum_{i=1}^N \widehat{c}_i A \widehat{\chi}_i \right) \right\|^2 =$$

$$= \inf_{a_1, \dots, a_{N-1}, c_1, \dots, c_N} \left\{ \left\| \Sigma^{-1/2} \left( \xi - \sum_{i=1}^N c_i A \chi_i \right) \right\|^2 \right\}. \quad (17)$$

Эта оценка сходится к точному значению сигнала  $f$  при  $\Sigma \rightarrow 0$ .

**Доказательство** теоремы опирается на свойства оценок максимального правдоподобия, приведенные в [7]. Существенным при этом является дифференцируемость функции правдоподобия по параметрам  $a_1, \dots, a_{N-1}; c_1, \dots, c_N$ , которая следует из ее явного вида (15).

### 6.1. Вычислительный эксперимент

Проиллюстрируем эффективность предложенных методов оценки входного сигнала в серии вычислительных экспериментов в ситуации, когда в качестве системы линейно независимых векторов  $\{e_i^{(N)}(\lambda_i^{(N)})\}$  используются индикаторные функции разбиения области  $X$ , а параметры  $\lambda_i^{(N)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определяют границы множеств, составляющих разбиение.

В первом эксперименте на вход измерительной системы поступает кусочно-постоянный сигнал, содержащий 4 уровня яркости, его график изображен на рис. 1а. Результат его регистрации, сопровождающийся размытием и аддитивным шумом, составляющим 8% от полезного сигнала, приведен на рис. 1б.

Минимизация функционала (17) производится последовательно. На начальном этапе выбирается начальное разбиение области задания сигнала  $f \in \mathcal{R}_{49}$  на  $N$  областей постоянного значения. Для этого все координаты сигнала  $f$  группируются в  $N$  наборов, имеющих одинаковые значения. Далее определяется значение этих координат решением задачи (7).

На следующем этапе при фиксированных  $N$  значениях кусочно-постоянного сигнала, найденных на предыдущем шаге, определяются  $N$  групп координат сигнала  $f$ , минимизирующие невязку (17). В данном случае это производилось полным перебором значений сигнала  $f$  в окрестности пиков. Процедура повторяется до тех пор, пока изменение невязки (17) не станет незначительным.

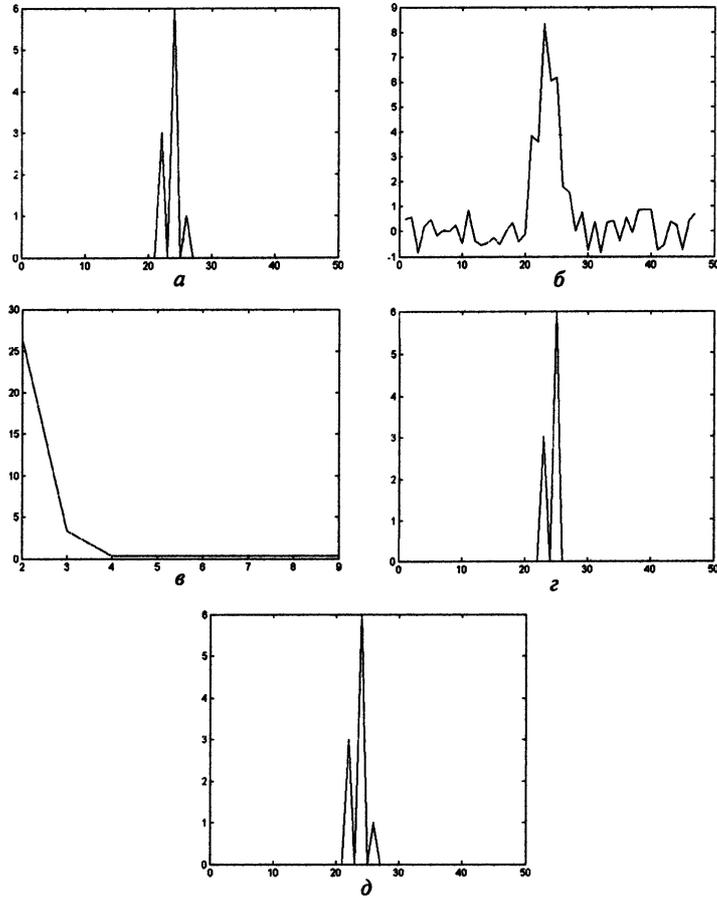


Рис. 1. *a* — входной сигнал, *б* — результат измерения (отношение шум/сигнал равно 0.08), *в* — график  $y(N)$  в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала, *г* — оценка входного сигнала при  $n = 3$ , *д* — оценка входного сигнала при  $n = 4$ .

На рис. 1в приведена зависимость минимума невязки (17) от числа уровней значений сигнала  $N$ . Видно, что при  $N > 4$  значение минимума невязки с ростом  $N$  уменьшается незначительно, что свидетельствует в пользу того, чтобы выбрать значение  $N = 4$  в качестве достаточно надежного для кусочной аппроксимации входного сигнала.

На рис. 1*з* приведено решение задачи кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала при  $N = 3$ . Верно определено положение двух пиков, с хорошей точностью оценена их амплитуда, однако потеряны третий пик малой амплитуды.

На рис. 1*д* число уровней значения сигнала  $f$  увеличено до оптимального  $N = 4$ . Качество оценки входного сигнала достаточно высокое.

На рис. 2*а-г* приведены аналогичные результаты для того же входного сигнала, но в ситуации, когда шум при измерении составляет 20%. Как видно из рисунков, результат восстановления достаточно устойчив по отношению к погрешности измерений.

На рис. 3, 4 приведены результаты вычислительного эксперимента для входного сигнала, не являющегося кусочно-постоянным. Входной

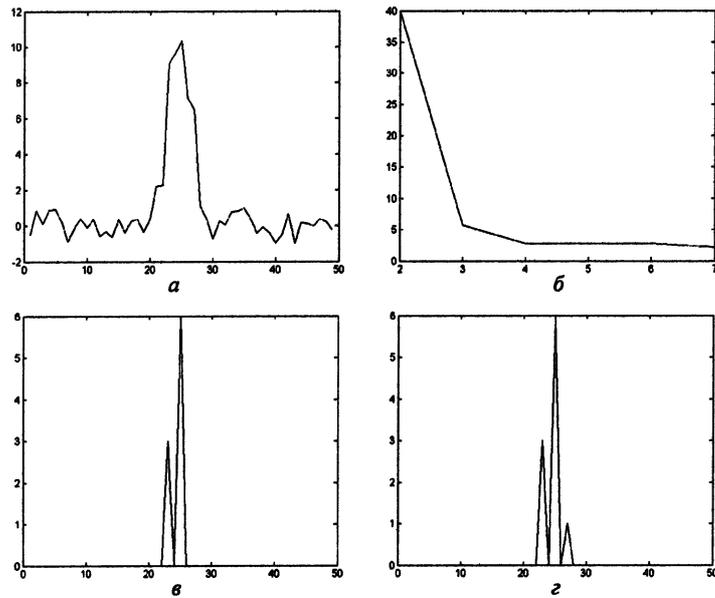


Рис. 2. *а* — результат измерения (отношение шум/сигнал равно 0.2), *б* — график  $y(N)$  в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала, *в* — оценка входного сигнала при  $n = 3$ , *г* — оценка входного сигнала при  $n = 4$ .

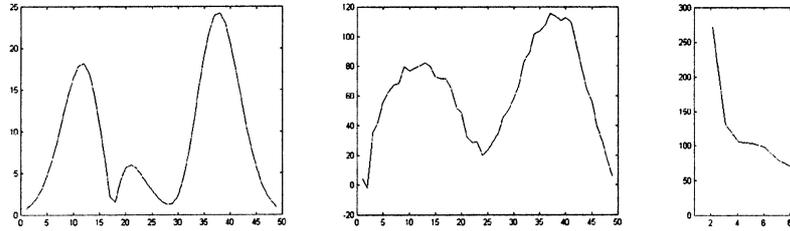


Рис. 3. *a* — входной сигнал, *б* — результат измерения, *в* — график  $y(N)$  в зависимости от числа уровней кусочно-постоянного сигнала.

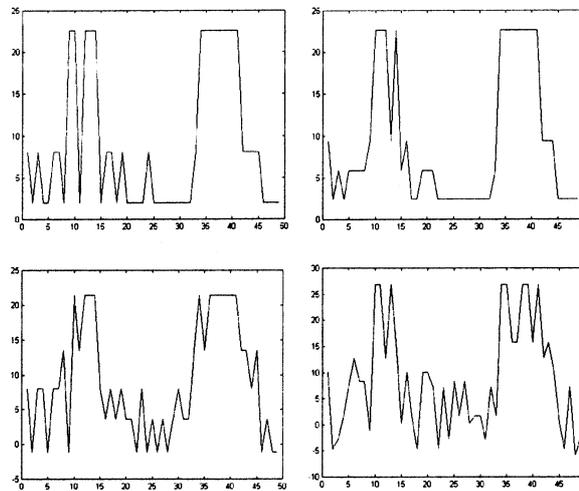


Рис. 4. *a* — оценка входного сигнала при  $N = 3$ , *б* — при  $N = 4$ , *в* — при  $N = 5$ , *г* — при  $N = 12$ .

сигнал  $f \in \mathcal{R}_{49}$  изображен на рис. 3*a*. Он измеряется в эксперименте по схеме (1), результат его измерения — сигнал  $\xi \in \mathcal{R}_{49}$  — представлен на рис. 3*б*. Погрешности измерения  $\nu_i$ ,  $i = 1, \dots, 49$  некоррелированы и обладают среднеквадратичным отклонением, равным 10 (8%).

Вычисляется кусочно-постоянная аппроксимация входного сигнала и решается задача редукции к идеальному прибору  $U = I \in (\mathcal{R}_{49} \rightarrow \mathcal{R}_{49})$ , причем множества  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , не предполагаются односвязными. На рис. 3*в* приведен график зависимости аргу-

мента  $y(N) = \|(I - \Pi)\Sigma^{-1/2}\xi\|^2$  функции распределения  $F_k(\cdot)$ , определяющего надежность модели измерения (11); она дается монотонно невозрастающей функцией аргумента  $N$ . Эта зависимость резко убывает до значения  $N = 4$ , далее скорость убывания заметно снижается. Можно предположить, что, начиная с  $N = 4$ , увеличение числа множеств разбиения  $X$  приведет лишь к аппроксимации искажений оценки сигнала  $f$ , вызванных погрешностью измерения.

Графики оценок при  $N = 3, 4, 5, 12$  приведены, соответственно, на рис. 4а–г. Видно, что увеличение числа уровней действительно приводит к высокочастотной погрешности, не имеющей отношения к истинному сигналу  $f$ .

### Заключение

В работе предложен метод конечномерной аппроксимации входного сигнала линейного измерительного прибора, основанный на наиболее точной оценке значений амплитуд входного сигнала при контроле надежности модели аппроксимации. В вычислительных экспериментах продемонстрирована эффективность предложенного метода для кусочно-постоянной аппроксимации входного сигнала.

Работа поддержана грантами РФФИ № 02–01–00579 и № 02–01–06093.

### Список литературы

- [1] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
- [2] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989.
- [3] Чуличков А. И. Основы теории измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения. Линейные стохастические измерительно-вычислительные системы. Тамбов: Изд-во Тамбовского гос. тех. ун-та, 2000.

- [4] Пытьев Ю. П. Задачи морфологического анализа изображений // В сб. Математические методы анализа природных ресурсов Земли из Космоса. М.: Наука, 1984.
- [5] Чуличков А. И. Анализ изображений с точки зрения их формы // В сб. Синергетика. Том 4. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. С. 74–80.
- [6] Пытьев Ю. П., Сухорукова Г. В., Чуличков А. И. Задачи дистанционного зондирования: математическое моделирование, анализ и интерпретация результатов // Матем. моделирование. 1994. Т. 6, № 11.
- [7] Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
- [8] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
- [9] Пытьев Ю. П., Бондаренко С. П. Об эффективном ранге модели линейных измерений с ошибкой // ЖВМ и МФ. 1995. Т. 35, № 1.
- [10] Пытьев А. Ю., Пытьев Ю. П. Об эффективной размерности множества измерений // Журнал выч. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 4. С. 682–697.
- [11] Громов М. А., Сердобольская М. Л. Об эффективном ранге конечномерных приближений бесконечномерной линейной модели измерения // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 4. С. 33–45.
- [12] Сердобольская М. Л. Об эффективном ранге бесконечномерной линейной модели измерения // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3: Физика, астрономия. 2000. № 5. С. 5–8.
- [13] Пытьев Ю. П., Голубцов П. В., Чуличков А. И. Задачи оптимальной редукции измерений в физическом эксперименте // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3: Физика, астрономия. Т. 27, № 2. 1986.

