О неконфликтных информационных системах

И. В. Андреев

Построена модель распределения ресурсов между субъектами, доступ которых к ресурсам задается с помощью графа. Рассмотрены задачи о неконфликтности и устойчивости полученных информационных систем в случае, когда этот граф двудольный. Отдельно рассмотрены случаи, когда этот граф полный двудольный или дерево.

1. Введение

В работе рассматриваются информационные системы как совокупности взаимодействующих субъектов и объектов. При этом в роли субъектов могут выступать, например, программы, а в роли объектов — машины, на которых они выполняются. На каждой машине может выполняться одновременно несколько программ и каждая программа может выполняться сразу на нескольких машинах. Для выполнения программе требуется задействовать некоторую машинную мощность на определенное время (мощность может выражаться, например, числом элементарных операций в секунду, необходимых для выполнения программы). Эта мощность может быть обеспечена совместной работой нескольких машин. Но, вообще говоря, программа может иметь доступ не ко всем машинам. В связи с этим возникает вопрос, можно ли машинные ресурсы распределить таким образом, чтобы каждая программа получила требуемую ей мощность. Система, в которой поставленная задача имеет решение (называемое правильным доступом), называется неконфликтной. Также в работе изучается вопрос устойчивости, то есть сохранения неконфликтности, неконфликтных информационных систем к таким сбоям, как потеря мощности машиной (так называемая ρ-устойчивость), выход машины из строя (o-устойчивость) или потеря программой доступа к машине (e-устойчивость). В построенной модели мощность, требуемая программе, называется числом требований субъекта, соответствующего этой программе, а мощность машины называется весом соответствующего этой машине объекта. Для определения, имеет ли субъект s доступ к объекту o, используется специальный граф (называемый графом доступов), в котором для этого должно присутствовать ребро (s, o).

В случае, когда этот граф двудольный, получено, что система неконфликтна точно тогда, когда суммарное число требований любого подмножества субъектов не больше суммарного веса объектов, к которым эти субъекты имеют доступ. Также для информационных систем с двудольным графом доступов получены характеристическое свойство правильного доступа и оценки сверху для числа всех правильных доступов.

В случае, когда граф доступов полный двудольный, получено, что система неконфликтна точно тогда, когда суммарное число требований всех субъектов не превышает суммарный вес всех объектов. Для неконфликтных информационных систем найдены все правильные доступы, получена оценка сверху для их числа, которая является точной только для систем, в которых каждый субъект имеет единственное требование и вес каждого объекта равен 1 (такие системы называются простейшими). Для простейших неконфликтных систем получены достаточные условия e- и o-устойчивости.

В случае, когда граф доступов является деревом без висячих субъектов, доказано, что для простейших систем число всех правильных доступов не меньше максимальной степени субъекта в этом графе и эта оценка точная, только если система содержит единственный субъект. Также доказано, что для простейших систем с n субъектами число всех правильных доступов не меньше $n + 1$ и эта оценка точная, только если степени всех субъектов в графе доступов равны 2. Наконец, найден такой класс деревьев, что для простейших систем с n субъектами, графом доступов которых является дерево из этого класса и максимальная степень субъекта в котором равна d, число всех правильных доступов асимптотически равно d^n при $d \to \infty$ (более того, для таких систем найдено точное число всех правильных доступов).

2. Основные понятия и результаты

Обозначим через N и N_0, соответственно, множества $\{1, 2, \ldots\}$ и $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Весовой функцией называется функция, принимающая значения из N_0.

Графом доступов G называется конечный двудольный граф без кратных ребер, множество вершин которого разбито на два непересекающихся подмножества A и B, таких, что каждое его ребро имеет вид (u, v), где $u \in A$, $v \in B$, и на множестве B задана весовая функция ρ (см. рис. 1). Элементы множества B называются *объектами*, элементы A — *субъектами*. Будем говорить, что *объект o имеет вес α*, где $\alpha \in N_0$, если $\rho(o) = \alpha$.

Пусть $\varnothing \neq X \subseteq A$, $\varnothing \neq Y \subseteq B$. Обозначим через $G(X, Y)$ максимальный подграф G, множество вершин которого $X \cup Y$.

Запросом для множеств X, Y называется пара $(g(X, Y), \lambda)$, где $g(X, Y)$ — подграф $G(X, Y)$, а λ — функция, называемая *функцией требований*, $\lambda : X \to N$. Будем говорить, что *субъект $s \in X$ имеет β требований*, где $\beta \in N$, если $\lambda(s) = \beta$.

Весовую функцию ρ графа доступов и функцию требований запроса $(g(X, Y), \lambda)$ оказывается удобным распространить, соответственно, на множества $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — множество всех подмножеств множества X, а $\widetilde{Y}$ — множество всех подмножеств множества Y (сохранив за ними те же обозначения). Именно, полагаем по определению $\lambda(\varnothing) = \rho(\varnothing) = 0$, $\lambda(P) = \sum\limits_{s \in P} \lambda(s)$, $\rho(Q) = \sum\limits_{o \in Q} \rho(o)$, где $P \in \widetilde{X} \backslash \{\varnothing\}$, $Q \in \widetilde{Y} \backslash \{\varnothing\}$. Будем говорить, что подмножество $Q \in \widetilde{Y}$ имеет вес α, где $\alpha \in N_0$, если $\rho(Q) = \alpha$. Говорим, что подмножество $P \in \widetilde{X}$ имеет β требований, где $\beta \in N$, если $\lambda(P) = \beta$.

Запрос $(g(X, Y), \lambda)$ называется *простейшим*, если для любых $s \in X$ и $o \in Y$ выполнено $\lambda(s) = 1$ и $\rho(o) = 1$. Говоря о простейшем запросе $(g(X, Y), \lambda)$, мы будем упоминать только $g(X, Y)$, опуская λ.

Запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *полным*, если $g(X,Y)$ содержит $X \cup Y$.

Рассматриваем далее некоторый запрос $(g(X,Y),\lambda)$. Пусть $P \subseteq X$.

а) Обозначим через $m(P)$ подмножество всех объектов o из Y таких, что для некоторого $s \in P$ выполнено $(s,o) \in g(X,Y)$.

б) Обозначим через $R(P)$ множество всех ребер $g(X,Y)$, каждое из которых инцидентно некоторой вершине из P.

Доступ для множества P — это пара $(r(P),c)$, где $r(P)$ — подмножество $R(P)$, а c — функция, называемая *функцией назначений*, $c : r(P) \to N$. Будем говорить, что *ребро* $e \in r(P)$ *имеет* γ *назначений*, где $\gamma \in N$, если $c(e) = \gamma$. Говорим, что *субъект* $s \in P$ *получает доступ к объекту* $o \in Y$, если $(s,o) \in r(P)$.

Пара $(r(P),c)$ называется *доступом без избытка*, если для любого $s \in P$ выполнено

$$\sum_{\substack{e\in r(P),\\ e \text{ инцидентно } s}} c(e) = \lambda(s).$$

Доступ $(r(P),c)$ называется *неконфликтным*, если для всякого $o \in Y$ выполнено

$$\sum_{\substack{e\in r(P),\\ e \text{ инцидентно } o}} c(e) \leqslant \rho(o).$$

Будем считать, что если в данных выше определениях для некоторого субъекта $s \in P$ (или объекта $o \in Y$) в множестве $r(P)$ не имеется ребер, инцидентных ему, то соответствующая сумма равна нулю.

Неконфликтный доступ без избытка называется *правильным*.

Под *доступом для запроса* $(g(X,Y),\lambda)$ мы будем понимать доступ для множества X.

Будем называть запрос *разрешимым*, если для него существует правильный доступ.

Пример 1. Запрос $(g(X,Y),\lambda)$, где $X = \{s_1,s_2,s_3\}$, $Y = \{o_1,o_2,o_3\}$, $\lambda(s_i) = 1$, $\rho(o_i) = 1$, $i = 1,2,3$, а граф $g(X,Y)$ изображен на рис. 2,

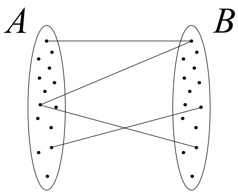

Рис. 1.

имеет правильный доступ $(r(X), c)$, где $r(X) = \{(s_1, o_1), (s_2, o_2), (s_3, o_3)\}$, $c((s_i, o_i)) = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Заметим, что этот доступ единственен.

Напротив, запрос $(g'(X, Y), \lambda)$, отличающийся от запроса $(g(X, Y), \lambda)$ только отсутствием ребра (s_2, o_2) (граф $g'(X, Y)$ см. на рис. 3), очевидно, вообще не имеет правильных доступов.

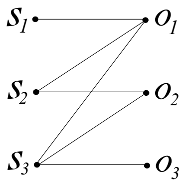

Рис. 2.

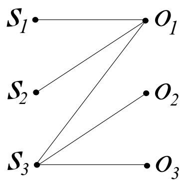

Рис. 3.

У любого правильного доступа $(r(X), c)$ для простейшего запроса $(g(X, Y), \lambda)$ $c \equiv 1$. Поэтому, говоря о правильном доступе для простейшего запроса $(g(X, Y), \lambda)$, мы будем упоминать только $r(X)$, опуская c.

Разрешимый запрос $(g(X, Y), \lambda)$ называется *n-сильно e-устойчивым* (или *n-сильно устойчивым к удалению ребер*), $n \in N$, если запрос $(g'(X,Y),\lambda)$, в котором $g'(X,Y)$ получается из $g(X,Y)$ удалением для каждого $s \in X$ не более n ребер, инцидентных s, также является разрешимым.

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *n-слабо e-устойчивым* (или *n-слабо устойчивым к удалению ребер*), $n \in N$, если запрос $(g'(X,Y),\lambda)$, в котором $g'(X,Y)$ получается из $g(X,Y)$ удалением не более n ребер, также является разрешимым.

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *(k,l)-e-устойчивым* (или *(k,l)-устойчивым к удалению ребер*), $k,l \in N$, если запрос $(g'(X,Y),\lambda)$, в котором $g'(X,Y)$ получается из $g(X,Y)$ удалением для не более, чем k субъектов, для каждого, не более, чем l ребер, инцидентных им, также является разрешимым.

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *n-сильно ρ-устойчивым* (или *n-сильно устойчивым к уменьшению веса объектов*), $n \in N$, если он остается разрешимым и в случае задания для графа доступов любой другой весовой функции ρ', такой, что для любого $o \in Y$ выполнено $\rho(o) - n \leqslant \rho'(o) \leqslant \rho(o)$ (то есть в случае уменьшения веса каждого объекта из Y не более, чем на n).

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *n-слабо ρ-устойчивым* (или *n-слабо устойчивым к уменьшению веса объектов*), $n \in N$, если он остается разрешимым и в случае задания для графа доступов любой другой весовой функции ρ', такой, что для любого $o \in Y$ выполнено $\rho'(o) \leqslant \rho(o)$ и $\sum\limits_{o \in Y} \rho'(o) \geqslant \sum\limits_{o \in Y} \rho(o) - n$ (то есть в случае уменьшения веса объектов из Y, такого, что их суммарный вес уменьшается не более, чем на n).

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *(k,l)-ρ-устойчивым* (или *(k,l)-устойчивым к уменьшению веса объектов*), $k,l \in N$, если он остается разрешимым и в случае задания для графа доступов любой другой весовой функции ρ', такой, что для не более, чем k объектов, для каждого такого объекта $o \in Y$ $\rho(o) - l \leqslant \rho'(o) \leqslant \rho(o)$, для всех остальных объектов $o' \in Y$ $\rho'(o') = \rho(o')$ (то есть в случае уменьшения веса не более, чем k объектов из Y, не более, чем на l).

Разрешимый запрос $(g(X,Y),\lambda)$ называется *n-o-устойчивым* (или *n-устойчивым к удалению объектов*), $n \in N$, если запрос $(g'(X,Y),\lambda)$, в котором $g'(X,Y)$ получается из $g(X,Y)$ удалением не более, чем n объектов, и всех ребер, инцидентных им, также является разрешимым.

В дальнейшем нас будут интересовать две группы проблем: *проблема описания правильных доступов* и *проблемы e-, ρ- и o-устойчивости*. Эти проблемы допускают разбиение на задачи. Так, проблема описания правильных доступов включает в себя следующие задачи:

а) (*задача о разрешимости*) является ли данный запрос разрешимым;

б) (*задача о поиске*) найти правильный доступ для данного разрешимого запроса;

в) (*задача о перечислении*) найти для данного разрешимого запроса все правильные доступы;

г) (*задача о количестве*) найти для данного запроса число всех правильных доступов.

Проблема e-устойчивости включает в себя следующие задачи:

а) (*задача о сильной e-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос n-сильно e-устойчивым для заданного $n \in N$;

б) (*задача о слабой e-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос n-слабо e-устойчивым для заданного $n \in N$;

в) (*задача о* (k, l)*-e-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос (k, l)-e-устойчивым для заданных $k, l \in N$.

Аналогично, проблема ρ-устойчивости включает в себя следующие задачи:

а) (*задача о сильной* ρ*-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос n-сильно ρ-устойчивым для заданного $n \in N$;

б) (*задача о слабой* ρ*-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос n-слабо ρ-устойчивым для заданного $n \in N$;

в) (*задача о* (k, l)*-*ρ*-устойчивости*) является ли данный разрешимый запрос (k, l)-ρ-устойчивым для заданных $k, l \in N$.

Наконец, проблема o-устойчивости включает в себя единственную *задачу об o-устойчивости*: является ли данный разрешимый запрос n-o-устойчивым для заданного $n \in N$.

Сформулируем далее основные полученные результаты.

Теорема 1. *Запрос* $(g(X, Y), \lambda)$ *разрешим точно тогда, когда для любого* $P \subseteq X$ *выполнено* $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$.

С учетом теоремы 1 показывается справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Для полного двудольного графа* $g(X, Y)$ *полный запрос* $(g(X, Y), \lambda)$ *разрешим точно тогда, когда* $\lambda(X) \leqslant \rho(Y)$.

Пусть $(g(X, Y), \lambda)$ — запрос, $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$. Очевидно, что каждый доступ $(r(X), c)$ для этого запроса однозначно задается матрицей $\widetilde{X} = (x^i_j)^{j=\overline{1,m}}_{i=\overline{1,n}}$ с n строками и m столбцами (здесь x^i_j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — элемент этой матрицы из i-ой строки и j-го столбца), где

$$x^i_j = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } (s_i, o_j) \notin r(X); \\ p \in N, & \text{если ребро } (s_i, o_j) \in r(X) \text{ и } c((s_i, o_j)) = p. \end{cases}$$

В этом случае $\widetilde{X}$ является *матрицей доступа* $(r(X), c)$.

Очевидно, что если $(g(X, Y), \lambda)$ — полный запрос и граф $g(X, Y)$ — полный двудольный, то для любой матрицы $\widetilde{X} = (x^i_j)^{j=\overline{1,m}}_{i=\overline{1,n}}$, такой, что $x^i_j \in N_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, существует доступ $(r(X), c)$ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$, матрицей которого является $\widetilde{X}$. Таким образом, если $(g(X, Y), \lambda)$ — полный запрос, а граф $g(X, Y)$ — полный двудольный, то между множеством всех доступов для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ и множеством всех матриц $(x^i_j)^{j=\overline{1,m}}_{i=\overline{1,n}}$, $x^i_j \in N_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, установлено взаимно однозначное соответствие.

В следующей теореме формулируется характеристическое свойство правильного доступа для произвольного запроса. Заметим, что в статье, если для некоторой суммы верхний предел суммирования меньше нижнего, мы считаем, что эта сумма равна нулю.

Теорема 2. *Если* $(g(X, Y), \lambda)$ *— запрос,* $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$, $\lambda_i = \lambda(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\rho_j = \rho(o_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $P_k = \sum\limits_{i=k}^{m} \rho_i$, $k = 2, 3, \ldots, m$, *то доступ с матрицей*

$\widetilde{X} = (x_j^i)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ *для запроса* $(g(X,Y),\lambda)$ *является правильным точно тогда, когда матрица* $\widetilde{X}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lambda_k - \sum_{i=1}^{l-1} x_i^k - P_{l+1} + \sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} x_i^j \leqslant x_l^k \leqslant \min(\rho_l - \sum_{i=1}^{k-1} x_l^i, \lambda_k - \sum_{i=1}^{l-1} x_i^k),$$

$$x_m^k = \lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^k,$$

$$k = 1,2,\ldots,n, \quad l = 1,2,\ldots,m-1.$$

Следствие 1. *Если* $(g(X,Y),\lambda)$ *— запрос,* $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$, $\lambda_i = \lambda(s_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\rho_j = \rho(o_j)$, $j = 1,2,\ldots,m$, $\rho_{i_0} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \rho_i$, *то для числа* $N_{п.д.}$ *всех правильных доступов для запроса* $(g(X,Y),\lambda)$ *выполнено:*

а) $N_{п.д.} \leqslant \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} (\lambda_i+1)^{m-1}$;

б) если $m \geqslant 2$, *то* $N_{п.д.} \leqslant \prod\limits_{\substack{i\neq i_0,\\ 1\leqslant i\leqslant m}} (\rho_i+1)^n$.

Следующие два следствия дают решения, соответственно, задачи о поиске и задачи о перечислении для полного разрешимого запроса, граф которого является полным двудольным.

Следствие 2. *Если* $g(X,Y)$ *— полный двудольный граф,* $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$, $\lambda_i = \lambda(s_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\rho_j = \rho(o_j)$, $j = 1,2,\ldots,m$, $P_k = \sum\limits_{i=k}^{m} \rho_i$, $k = 2,3,\ldots,m$, *и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный разрешимый запрос, то доступ с матрицей* $(x_j^i)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, *где*

$$x_l^k = \max(0, \lambda_k - \sum_{i=1}^{l-1} x_i^k - P_{l+1} + \sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} x_i^j),$$

$$x_m^k = \lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^k, \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad l = 1,2,\ldots,m-1,$$

является правильным доступом для этого запроса.

Следствие 3. *Если $g(X,Y)$ — полный двудольный граф, $X = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$, $n, m \in N$, $\lambda_i = \lambda(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\rho_j = \rho(o_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $P_k = \sum\limits_{i=k}^{m} \rho_i$, $k = 2, 3, \dots, m$, и $(g(X,Y), \lambda)$ — полный разрешимый запрос, то все правильные доступы для этого запроса и только они задаются матрицами $(x_j^i)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, $x_j^i \in N_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, такими, что*

$$\lambda_k - \sum_{i=1}^{l-1} x_i^k - P_{l+1} + \sum_{i=l+1}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} x_i^j \leqslant x_l^k \leqslant \min(\rho_l - \sum_{i=1}^{k-1} x_l^i, \lambda_k - \sum_{i=1}^{l-1} x_i^k),$$

$$x_m^k = \lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m-1.$$

Теорема 3. *Если $g(X,Y)$ — полный двудольный граф и $(g(X,Y), \lambda)$ — полный разрешимый запрос, то число $N_{п.д.}$ всех правильных доступов для этого запроса удовлетворяет неравенству*

$$N_{п.д.} \leqslant \frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y) - \lambda(X))!}$$

и это неравенство обращается в равенство точно тогда, когда запрос $(g(X,Y), \lambda)$ простейший.

Теорема 4. *Если $g(X,Y)$ — полный двудольный граф, $n = |X|$, $m = |Y|$ и $(g(X,Y), \lambda)$ — полный простейший разрешимый запрос, то выполнено следующее:*

- *а) если $m > n$, то запрос $(g(X,Y), \lambda)$ $(m-n)$-сильно-е-устойчив и $(m-n)$-о-устойчив;*
- *б) если $m > 1$, то запрос $(g(X,Y), \lambda)$ $(m-1)$-слабо-е-устойчив;*
- *в) если $k \in N$, $k \leqslant n$, $k \leqslant m-1$, то запрос $(g(X,Y), \lambda)$ $(k, m-k)$-е-устойчив.*

Теорема 5. *Если $g(X,Y)$ — дерево без висячих субъектов, $(g(X,Y), \lambda)$ — полный простейший запрос, $s \in X$ и $\deg(s)$ — степень субъекта s в графе $g(X,Y)$, то для числа $N_{п.д.}$ всех правильных доступов для запроса $(g(X,Y), \lambda)$ выполнено неравенство*

$$N_{п.д.} \geqslant \max_{s \in X}(\deg(s))$$

и оно обращается в равенство точно тогда, когда $|X| = 1$.

Следствие 4. *Если* $g(X,Y)$ *— дерево без висячих субъектов и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный простейший запрос, то для этого запроса существует не менее 2 правильных доступов.*

Теорема 6. *Если* $g(X,Y)$ *— дерево без висячих субъектов и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный простейший запрос, то число* $N_{п.д.}$ *всех правильных доступов для этого запроса удовлетворяет неравенству*

$$N_{п.д.} \geqslant |X| + 1$$

и оно обращается в равенство точно тогда, когда степень каждого субъекта $g(X,Y)$ *равна 2.*

Пусть $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос и $g(X,Y)$ — дерево. Будем говорить, что дерево $g(X,Y)$ *максимальное*, если в нем каждому субъекту смежно не более двух объектов степени 2 и ни одного объекта большей степени.

Теорема 7. *Если* $g(X,Y)$ *— максимальное дерево, степень каждого субъекта которого равна* $d \geqslant 3$, $n = |X|$ *и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный простейший запрос, то для числа* $N_{п.д.}$ *всех правильных доступов для этого запроса выполнено*

$$N_{п.д.} = \frac{d^2 + d\sqrt{d^2-4} - 2}{2\sqrt{d^2-4}} \left(\frac{d+\sqrt{d^2-4}}{2}\right)^{n-1} + \\ + \frac{d\sqrt{d^2-4} - d^2 + 2}{2\sqrt{d^2-4}} \left(\frac{d-\sqrt{d^2-4}}{2}\right)^{n-1}.$$

Следствие 5. *Если* $g(X,Y)$ *— максимальное дерево, степень каждого субъекта которого равна* $d \geqslant 3$, $n = |X|$ *и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный простейший запрос, то для числа* $N_{п.д.}$ *всех правильных доступов для этого запроса выполнено*

$$N_{п.д.} \sim d^n \text{ при } d \to \infty.$$

Очевидно, что если $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос, $n = |X|$ и $d = \max\limits_{s\in X}(\deg(s))$, где $\deg(s)$, $s \in X$, — это степень субъекта s в графе $g(X,Y)$, то число всех правильных доступов для этого запроса не больше d^n. Из теоремы 7 следует, что при увеличении d в классе деревьев можно найти дерево, число всех правильных доступов в котором сколь угодно близко к d^n (под правильным доступом в дереве мы понимаем правильный доступ для полного простейшего запроса, графом которого это дерево является).

3. Случай двудольных графов

Рассмотрим задачу о разрешимости для произвольного запроса.

Доказательство теоремы 1

Необходимость. Предположим, что запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим, и существует такое подмножество $P \subseteq X$, что $\rho(m(P)) < \lambda(P)$. Очевидно, что в этом случае для подмножества P не существует правильного доступа, следовательно, правильного доступа не существует и для запроса $(g(X,Y),\lambda)$, но он разрешим, и мы пришли к противоречию.

Достаточность. Предположим, что всегда при $P \subseteq X$ выполнено $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Будем доказывать разрешимость запроса $(g(X,Y),\lambda)$ индукцией по числу требований множества X. Предположим, что $\lambda(X) = 1$. Так как $\lambda(X) = \sum\limits_{s\in X} \lambda(s)$ и функция λ принимает натуральные значения, то $|X| = 1$. Обозначим элемент множества X через s. По условию $\lambda(X) \leqslant \rho(m(X))$, следовательно, $\rho(m(\{s\})) \geqslant 1$. Положим $e = (s,o)$, где $o \in m(\{s\})$, $\rho(o) \neq 0$, $r(X) = \{e\}$, $c(e) = 1$. Возьмем в качестве правильного доступа для множества X доступ $(r(X),c)$, следовательно, запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим.

Предположим теперь, что утверждение верно для любого $\lambda(X) < n$, $n \in \{2,3,\ldots\}$. Докажем его для $\lambda(X) = n$. Для этого рассмотрим два случая.

1) Для любого непустого $P \subseteq X$ $\lambda(P) < \rho(m(P))$. Тогда возьмем любой субъект $s \in X$. По условию $\rho(m(\{s\})) > \lambda(\{s\}) \geqslant 1$. Поло-

жим $e = (s, o)$, где $o \in m(\{s\})$, $\rho(o) \neq 0$. Рассмотрим новую весовую функцию ρ' для графа доступов, такую, что ρ' совпадает с ρ всюду, кроме объекта o, причем $\rho'(o) = \rho(o) - 1$. Предположим, что $\lambda(s) \neq 1$ (случай $\lambda(s) = 1$ рассматривается аналогично). Рассмотрим новый запрос $(g(X, Y), \lambda')$, здесь λ' совпадает с λ всюду, кроме субъекта s, причем $\lambda'(s) = \lambda(s) - 1$ (в случае, когда $\lambda(s) = 1$, нужно рассмотреть запрос $(g'(X', Y), \lambda')$, где $X' = X \backslash \{s\}$, граф $g(X', Y)$ получается из $g(X, Y)$ удалением вершины s и всех инцидентных ей ребер, функция λ' является сужением функции λ на множество X'). Очевидно, что для запроса $(g(X, Y), \lambda')$ при новой весовой функции ρ' для графа доступов выполнено условие: если $P \subseteq X$, то $\lambda'(P) \leqslant \rho'(m(P))$. При этом $\lambda'(X) = \lambda(X) - 1 = n - 1 < n$. Следовательно, по предположению индукции запрос $(g(X, Y), \lambda')$ в случае задания для графа доступов весовой функции ρ' разрешим, то есть имеет правильный доступ $(r(X), c)$. Если $e \in r(X)$, то определим функцию назначений c' так, чтобы она совпадала с c всюду, кроме e, причем $c'(e) = c(e) + 1$. В этом случае $(r(X), c')$, очевидно, — правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ при старой весовой функции ρ. Если же $e \notin r(X)$, то положим $r'(X) = r(X) \cup \{e\}$ и пусть функция c' совпадает с c на множестве $r(X)$ и $c'(e) = 1$. Тогда $(r'(X), c')$ — нужный правильный доступ. Таким образом, построен правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$, а значит он разрешим.

2) Существует непустое подмножество $P_0 \subseteq X : \lambda(P_0) = \rho(m(P_0))$. Будем считать, что $P_0 \neq X$ (если $\lambda(P_0) = \rho(m(P_0))$ только при $P_0 = X$, то доказательство аналогично первому пункту).

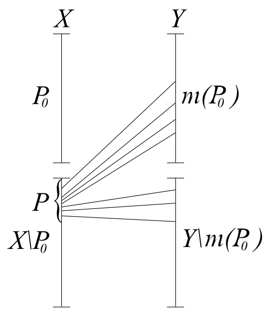

Рис. 4.

Пусть $P \subseteq X \backslash P_0$ (см. рис. 4). Рассмотрим подмножество $P_0 \cup P$. По условию $\rho(m(P_0 \cup P)) \geqslant \lambda(P_0 \cup P)$. Но $\rho(m(P_0)) = \lambda(P_0)$ и $\lambda(P_0 \cup P) = \lambda(P_0) + \lambda(P)$. Следовательно, $\rho(m(P) \cap (Y \backslash m(P_0))) \geqslant \lambda(P)$. Значит, по предположению индукции для запроса $(g'(X \backslash P_0, Y \backslash m(P_0)), \lambda')$, где граф $g'(X \backslash P_0, Y \backslash m(P_0))$ получается из графа $g(X, Y)$ удалением вершин из множеств P_0 и $m(P_0)$ и инцидентных им ребер, а функция λ' является сужением функции λ на множество $X \backslash P_0$, существует правильный доступ $(r(X \backslash P_0), c)$. Кроме того, по предположению индукции для запроса $(g''(P_0, m(P_0)), \lambda'')$, где граф $g''(P_0, m(P_0))$ получается из графа $g(X, Y)$ удалением вершин из множеств $X \backslash P_0$ и $Y \backslash m(P_0)$ и инцидентных им ребер, а функция λ'' является сужением функции λ на множество P_0, также существует правильный доступ $(r'(P_0), c')$. Определим на множестве $r(X \backslash P_0) \cup r'(P_0)$ функцию c'' таким образом, чтобы на множестве $r(X \backslash P_0)$ она совпадала с функцией c, а на множестве $r'(P_0)$ — с функцией c'. Очевидно, что $(r(X \backslash P_0) \cup r'(P_0), c'')$ — правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$, следовательно, запрос $(g(X, Y), \lambda)$ разрешим. Теорема доказана.

Замечание. Если запрос $(g(X, Y), \lambda)$ является полным и простейшим, то вопрос о разрешимости этого запроса сводится к вопросу о существовании в графе $g(X, Y)$ паросочетания, отображающего X в Y, и теорема 1 сводится к теореме Кенига-Холла (см. [1]). Также про паросочетания см. [2] и [4].

С учетом теоремы 1 показывается справедливость предложений 2, 3 и 4.

Предложение 2. *Если $(g(X, Y), \lambda)$ — запрос, для любых $s \in X$ и $o \in Y$ выполнено $\lambda(s) = i$ и $\rho(o) = j \neq 0$, то он разрешим точно тогда, когда для любого $P \subseteq X$ справедливо*

$$|m(P)| \geqslant \frac{i}{j}|P|.$$

Доказательство. По теореме 1 запрос $(g(X, Y), \lambda)$ разрешим тогда и только тогда, когда для любого $P \subseteq X$ выполнено $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Так как $\lambda(P) = \sum\limits_{s \in P} \lambda(s) = i|P|$, а $\rho(m(P)) = \sum\limits_{o \in m(P)} \rho(o) = j|m(P)|$, то это условие можно переписать в виде: если $P \subseteq X$, то $i|P| \leqslant j|m(P)|$.

Итак, учитывая, что $j \neq 0$, окончательно получаем, что запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим тогда, и только тогда, когда для любого $P \subseteq X$ выполнено $|m(P)| \geqslant \frac{i}{j}|P|$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Справедливы положения:*

а) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим, то для любого $P \subseteq X$ выполнено

$$|P| \leqslant \frac{\max\limits_{o\in Y}(\rho(o))}{\min\limits_{s\in X}(\lambda(s))}|m(P)|,$$

б) если $(g(X,Y),\lambda)$ — запрос, и для любого $P \subseteq X$ выполнено

$$|P| \leqslant \frac{\min\limits_{o\in Y}(\rho(o))}{\max\limits_{s\in X}(\lambda(s))}|m(P)|,$$

то он разрешим.

Доказательство. Если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим, то по теореме 1 для любого $P \subseteq X$ выполнено $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Тогда для любого подмножества $P \subseteq X$ справедлива цепочка неравенств

$$\min_{s\in X}(\lambda(s))|P| \leqslant \sum_{s\in P}\lambda(s) \leqslant \lambda(P) \leqslant \rho(m(P)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{o\in m(P)}\rho(o) \leqslant \max_{o\in Y}(\rho(o))|m(P)|.$$

Итого, мы получили

$$\min_{s\in X}(\lambda(s))|P| \leqslant \max_{o\in Y}(\rho(o))|m(P)|, \text{ то есть } |P| \leqslant \frac{\max\limits_{o\in Y}(\rho(o))}{\min\limits_{s\in X}(\lambda(s))}|m(P)|,$$

и положение а) доказано.

Если, теперь, для запроса $(g(X,Y),\lambda)$ выполнено условие положения б), то перепишем его в виде: если $P \subseteq X$, то $\max\limits_{s\in X}(\lambda(s))|P| \leqslant \min\limits_{o\in Y}(\rho(o))|m(P)|$. Так как $\max\limits_{s\in X}(\lambda(s))|P| \geqslant \sum\limits_{s\in P}\lambda(s) = \lambda(P)$ и

$\min\limits_{o\in Y}(\rho(o))|m(P)| \leqslant \sum\limits_{o\in m(P)} \rho(o) = \rho(m(P))$, то для любого $P \subseteq X$ выполнено $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$, следовательно, по теореме 1 запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим. Предложение доказано.

Пусть в графе $g(X,Y)$ запроса $(g(X,Y),\lambda)$ нет изолированных субъектов. Тогда назовем *характеристическим числом* этого запроса

$$\chi(g(X,Y)) = \max_{\substack{P\subseteq X,\\ P\neq\varnothing}} \left(\frac{|P|}{|m(P)|}\right).$$

Предложение 4. *Если для любых $s \in X$, $o \in Y$ выполнено $\lambda(s) = i$ и $\rho(o) = j$, в графе $g(X,Y)$ нет изолированных субъектов и $(g(X,Y),\lambda)$ — запрос, то он разрешим точно тогда, когда*

$$\chi(g(X,Y)) \leqslant \frac{j}{i}. \qquad (*)$$

Доказательство. Предположим, что $j \neq 0$. Тогда по предложению 2 запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим точно тогда, когда если $P \subseteq X$, то $|m(P)| \geqslant \frac{i}{j}|P|$. Указанное условие эквивалентно условию

$$\text{если } P \subseteq X \text{ и } P \neq \varnothing, \text{ то } \frac{|P|}{|m(P)|} \leqslant \frac{j}{i},$$

которое, очевидно, эквивалентно условию

$$\chi(g(X,Y)) = \max_{\substack{P\subseteq X,\\ P\neq\varnothing}} \left(\frac{|P|}{|m(P)|}\right) \leqslant \frac{j}{i}.$$

Предположим, что $j = 0$. Но в этом случае, очевидно, запрос $(g(X,Y),\lambda)$ не имеет правильного доступа, а значит неразрешим. Заметим, что условие $(*)$ в этом случае не выполняется, так как $\chi(g(X,Y))$ всегда больше нуля. Предложение доказано.

Очевидно, что выполнено следующее утверждение.

Предложение 5. *Справедливы положения:*

а) если в графе запроса есть изолированный субъект, то этот запрос неразрешим;

б) *если в графе запроса есть изолированный объект или объект, вес которого равен нулю, то никакому правильному доступу для этого запроса не принадлежит ребро, инцидентное данному объекту.*

Доказательство теоремы 2

Пусть $(r(X), c)$ — доступ с матрицей $\widetilde{X} = (x^i_j)^{j=\overline{1,m}}_{i=\overline{1,n}}$ для запроса $(g(X,Y), \lambda)$.

Необходимость. Предположим, что доступ $(r(X), c)$ является правильным, и покажем, что в этом случае матрица $\widetilde{X}$ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, если $\lambda_1 > P_2$, то множеству $r(X)$ принадлежит ребро $e = (s_1, o_1)$, причем $c(e) \geqslant \lambda_1 - P_2$ (в противном случае суммарное число назначений по ребрам из $r(X)$, инцидентным субъекту s_1, будет меньше $P_2 + (\lambda_1 - P_2) = \lambda_1$, что невозможно, так как $(r(X), c)$ — правильный доступ). Применительно к матрице $\widetilde{X}$ это означает, что если $\lambda_1 - P_2 > 0$, то $x^1_1 \geqslant \lambda_1 - P_2$. Если $\lambda_1 - P_2 \leqslant 0$, то $x^1_1 \geqslant \lambda_1 - P_2$, так как $x^1_1 \geqslant 0$ по определению матрицы $\widetilde{X}$. Таким образом, $x^1_1 \geqslant \lambda_1 - P_2$. Кроме того, очевидно, что $x^1_1 \leqslant \rho_1$ и $x^1_1 \leqslant \lambda_1$. Итак, мы получили, что выполняются условия для x^1_1

$$\lambda_1 - P_2 \leqslant x^1_1 \leqslant \min(\rho_1, \lambda_1).$$

Далее, зафиксировав x^1_1, аналогично получаем, что в случае $\lambda_1 - x^1_1 > P_3$ будет выполняться $x^1_2 \geqslant \lambda_1 - x^1_1 - P_3$. Учитывая, что $x^1_2 \geqslant 0$, $x^1_2 \leqslant \rho_2$ и $x^1_2 \leqslant \lambda_1 - x^1_1$, мы получаем, что выполняются условия для x^1_2

$$\lambda_1 - x^1_1 - P_3 \leqslant x^1_2 \leqslant \min(\rho_2, \lambda_1 - x^1_1).$$

Таким же образом получаются условия для $x^1_3, x^1_4, \ldots, x^1_{m-1}$. Наконец, по определению правильного доступа

$$x^1_m = \lambda_1 - \sum_{i=1}^{m-1} x^1_i.$$

Заметим, что «доступный» вес каждого объекта o_j теперь уменьшился на x^1_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Учитывая это, аналогично условиям для x^1_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, получаются и все остальные условия.

Достаточность. Предположим теперь, что матрица $\widetilde{X}$ доступа $(r(X), c)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда из условия для x_m^1 получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^1 = \lambda_1$, из условия для x_m^2 получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = \lambda_2$ и т. д., из условия для x_m^n получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^n = \lambda_n$. Далее, из условия для x_1^n мы получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_1^i \leqslant \rho_1$, из условия для x_2^n мы получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_2^i \leqslant \rho_2$ и т. д., из условия для x_{m-1}^n мы получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{m-1}^i \leqslant \rho_{m-1}$. Наконец, из условий для x_{m-1}^n и x_m^n следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^n - \sum_{i=1}^{m-2} x_i^n - \rho_m + \sum_{j=1}^{n-1} x_m^j \leqslant x_{m-1}^n,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{n} x_m^i \leqslant \rho_m.$$

Таким образом, доступ $(r(X), c)$ является правильным. Теорема доказана.

В предложениях 6, 7, 8 и 9, которые непосредственно следуют из определений, формулируется связь между различными видами устойчивости. Так, в следующем предложении формулируется связь между различными видами e-устойчивости.

Предложение 6. *Если $(g(X, Y), \lambda)$ — запрос, $n = |X|$ и $k, l, p \in N$, то справедливы следующие утверждения:*

а) запрос $(g(X, Y), \lambda)$ k-сильно e-устойчив точно тогда, когда он (n, k)-e-устойчив;

б) если запрос $(g(X, Y), \lambda)$ k-сильно e-устойчив, то он k-слабо e-устойчив;

в) если запрос $(g(X, Y), \lambda)$ l-сильно e-устойчив, то он (k, l)-e-устойчив;

г) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *nk-слабо e-устойчив, то он k-сильно e-устойчив;*

д) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *p-слабо e-устойчив и* $kl \leqslant p$*, то он* (k,l)*-e-устойчив.*

Аналогично, в предложении 7 формулируется связь между различными видами ρ-устойчивости.

Предложение 7. *Если* $(g(X,Y),\lambda)$ *— запрос,* $m = |Y|$ *и* $k,l,p \in N$*, то справедливы следующие утверждения:*

а) запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *k-сильно* ρ*-устойчив точно тогда, когда он* (m,k)*-*ρ*-устойчив;*

б) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *k-сильно* ρ*-устойчив, то он k-слабо* ρ*-устойчив;*

в) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *l-сильно* ρ*-устойчив, то он* (k,l)*-*ρ*-устойчив;*

г) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *mk-слабо* ρ*-устойчив, то он k-сильно* ρ*-устойчив;*

д) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *p-слабо* ρ*-устойчив и* $kl \leqslant p$*, то он* (k,l)*-*ρ*-устойчив.*

В предложениях 8 и 9 формулируется, соответственно, связь между o-устойчивостью и слабой e-устойчивостью и связь между o-устойчивостью и различными видами ρ-устойчивости.

Предложение 8. *Если запрос* $(g(X,Y),\lambda)$ *k-o-устойчив, где* $k \in N$*, то он k-слабо e-устойчив.*

Предложение 9. *Если* $(g(X,Y),\lambda)$ *— запрос и* $k,l \in N$*, то справедливы следующие утверждения:*

а) если $\rho_{\max} = \max\limits_{o \in Y}(\rho(o)) \neq 0$*, то запрос* $(g(X,Y),\lambda)$ *k-o-устойчив точно тогда, когда он* $(k,\rho_{\max})$*-*ρ*-устойчив;*

б) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *k-o-устойчив, то он k-слабо* ρ*-устойчив;*

в) если запрос $(g(X,Y),\lambda)$ *k-o-устойчив, то он* (k,l)*-*ρ*-устойчив.*

4. Случай полных двудольных графов

Рассмотрим задачу о разрешимости для запроса, граф которого является полным двудольным.

Доказательство предложения 1

По теореме 1 запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим тогда, и только тогда, когда

$$\text{если } P \subseteq X, \text{ то } \lambda(P) \leqslant \rho(m(P)). \qquad (*)$$

Предположим, что запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим. Тогда, используя условие $(*)$, получаем, что $\lambda(X) \leqslant \rho(m(X))$. Но запрос $(g(X,Y),\lambda)$ является полным, а граф $g(X,Y)$ — полным двудольным, поэтому $m(X) = Y$ и $\lambda(X) \leqslant \rho(Y)$.

Предположим теперь, что $\lambda(X) \leqslant \rho(Y)$. Возьмем произвольное непустое подмножество $P \subseteq X$ (заметим, что $0 = \lambda(\varnothing) \leqslant \rho(m(\varnothing)) = \rho(\varnothing) = 0$). Очевидно, что $\lambda(P) \leqslant \lambda(X)$. Далее, используя то, что $(g(X,Y),\lambda)$ — полный запрос, а граф $g(X,Y)$ является полным двудольным, получаем, что $m(P) = Y$, следовательно, $\rho(m(P)) = \rho(Y)$ и $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Мы получили, что выполняется условие $(*)$, а значит запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим. Предложение доказано.

Следствие 6. *Если $(g(X,Y),\lambda)$ — полный разрешимый запрос, граф $g(X,Y)$ которого является полным двудольным, а $\lambda(X) < \rho(Y)$, то он $(\rho(Y) - \lambda(X))$-слабо-ρ-устойчив.*

Далее мы будем доказывать теорему 3.

Лемма 1. *Если $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший разрешимый запрос и $g(X,Y)$ — полный двудольный граф, то для числа $N_{п.д.}$ всех правильных доступов для этого запроса выполнено*

$$N_{п.д.} = \frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y) - \lambda(X))!}.$$

Доказательство. Так как запрос $(g(X,Y),\lambda)$ является простейшим, то в каждом правильном доступе $r(X)$ для этого запроса для любого субъекта $s \in X$ множеству $r(X)$ принадлежит единственное ребро, инцидентное s. Кроме того, для любого объекта $o \in Y$ множеству $r(X)$ принадлежит не более одного ребра, инцидентного o. Таким образом, учитывая, что запрос $(g(X,Y),\lambda)$ полный, а граф $g(X,Y)$ полный двудольный, получаем, что число $N_{\text{п.д.}}$ всех правильных доступов для этого запроса равно числу всех инъективных отображений из X в Y. Так как запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим, то найдется как минимум одно такое отображение, следовательно, $|X| \leqslant |Y|$ и $N_{\text{п.д.}} = A_{|Y|}^{|X|} = \frac{|Y|!}{(|Y|-|X|)!}$. Но $\rho(Y) = \sum\limits_{o\in Y}\rho(o) = \sum\limits_{o\in Y} 1 = |Y|$ и $\lambda(X) = \sum\limits_{s\in X}\lambda(s) = \sum\limits_{s\in X} 1 = |X|$. Таким образом, $N_{\text{п.д.}} = \frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y)-\lambda(X))!}$. Лемма доказана.

Для запроса $(g(X,Y),\lambda)$, такого, что для любого $o \in Y$ выполнено $\rho(o) \neq 0$, определим новый запрос $(g'(X',Y'),\lambda')$, называемый *разверткой* запроса $(g(X,Y),\lambda)$. Пусть $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$. Положим

$$X' = \{s_1^1, s_2^1, \ldots, s_{\lambda(s_1)}^1, s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{\lambda(s_2)}^2, \ldots, s_1^n, s_2^n, \ldots, s_{\lambda(s_n)}^n\},$$
$$Y' = \{o_1^1, o_2^1, \ldots, o_{\rho(o_1)}^1, o_1^2, o_2^2, \ldots, o_{\rho(o_2)}^2, \ldots, o_1^m, o_2^m, \ldots, o_{\rho(o_m)}^m\},$$
$$\text{для любого } s_j^i \in X' \ \lambda'(s_j^i) = 1.$$

Множеством вершин графа $g'(X',Y')$ является множество $X' \cup Y'$, и ребро (s_i^k, o_j^l) принадлежит $g'(X',Y')$, где $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $l \in \{1,2,\ldots,m\}$, $i \in \{1,2,\ldots,\lambda(s_k)\}$, $j \in \{1,2,\ldots,\rho(o_l)\}$, если ребро (s_k, o_l) принадлежит графу $g(X,Y)$. При определении развертки $(g'(X',Y'),\lambda')$ мы считаем, что все ребра и вершины графа $g'(X',Y')$ принадлежат графу доступов, кроме того, говоря о запросе $(g'(X',Y'),\lambda')$ мы считаем, что для графа доступов задана весовая функция ρ', принимающая единичные значения на множестве Y'. Заметим, что развертка является полным и простейшим запросом.

Далее, для запроса $(g(X,Y),\lambda)$, развертка $(g'(X',Y'),\lambda')$ которого является разрешимым запросом и $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$, обозначим через $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображение, определенное на множестве всех правильных доступов для запроса $(g'(X',Y'),\lambda')$, отображающее каждый правильный доступ $(r'(X'), c')$ для этого запроса в правильный доступ $(r(X), c)$ для запроса $(g(X,Y),\lambda)$ следующим образом: множество $r(X)$ содержит ребро $e = (s_k, o_l)$ для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ тогда, и только тогда, когда множество $r'(X')$ содержит ребро (s_i^k, o_j^l) для некоторых $i \in \{1, 2, \dots, \lambda(s_k)\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho(o_l)\}$, причем $c(e)$ равно числу таких ребер (s_i^k, o_j^l) в множестве $r'(X')$. Очевидно, что $(r(X), c)$ является правильным доступом для запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Из определения отображения $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ следует, что запрос, развертка которого является разрешимым запросом, разрешим.

Лемма 2. *Если $(g'(X', Y'), \lambda')$ — разрешимый запрос, являющийся разверткой запроса $(g(X, Y), \lambda)$, то отображение $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ является сюръективным отображением множества всех правильных доступов для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$ в множество всех правильных доступов для запроса $(g(X, Y), \lambda)$.*

Доказательство. Пусть $(r(X), c)$ — некоторый правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Построим правильный доступ $(r'(X'), c')$ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, который $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображает в $(r(X), c)$. Пусть $X = \{s_1,\ s_2, \dots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$, $n, m \in N$. Будем обозначать ребра (s_i, o_j) графа $g(X, Y)$ через $e_{i,j}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Строим множество $r'(X')$ следующим образом. Предположим, что

$$e_{1,i_1^1}, e_{1,i_2^1}, \dots, e_{1,i_{n_1}^1},$$
$$n_1 \in \{1, 2, \dots, m\},\ \ i_j^1 \in \{1, 2, \dots, m\},\ \ j = 1, 2, \dots, n_1,$$

— все ребра из множества $r(X)$, инцидентные субъекту s_1. Добавим ко множеству $r'(X')$, которое изначально считаем пустым, ребра

$$(s_1^1, o_1^{i_1^1}),\ (s_2^1, o_2^{i_1^1}),\ \dots,\ (s_{c(e_{1,i_1^1})}^1, o_{c(e_{1,i_1^1})}^{i_1^1}),$$
$$(s_{c(e_{1,i_1^1})+1}^1, o_1^{i_2^1}),\ (s_{c(e_{1,i_1^1})+2}^1, o_2^{i_2^1}),\ \dots,\ (s_{c(e_{1,i_1^1})+c(e_{1,i_2^1})}^1, o_{c(e_{1,i_2^1})}^{i_2^1}),$$
$$\dots,$$
$$(s^1_{\sum\limits_{p=1}^{n_1-1} c(e_{1,i_p^1})+1}, o_1^{i_{n_1}^1}),\ (s^1_{\sum\limits_{p=1}^{n_1-1} c(e_{1,i_p^1})+2}, o_2^{i_{n_1}^1}),\ \dots,$$

$$(s^1_{\sum\limits_{p=1}^{n_1-1} c(e_{1,i^1_p})+c(e_{1,i^1_{n_1}})}, o^{i^1_{n_1}}_{c(e_{1,i^1_{n_1}})}).$$

Далее, пусть

$$e_{2,i^2_1}, e_{2,i^2_2}, \ldots, e_{2,i^2_{n_2}},$$
$$n_2 \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \ i^2_j \in \{1, 2, \ldots, m\},\ \ j = 1, 2, \ldots, n_2,$$

— все ребра из множества $r(X)$, инцидентные субъекту s_2. Доопределим функцию c на множество всех ребер графа $g(X, Y)$ таким образом, чтобы она была равна нулю на всех ребрах этого графа, не принадлежащих множеству $r(X)$. Добавим ко множеству $r'(X')$ ребра

$$(s^2_1, o^{i^2_1}_{c(e_{1,i^2_1})+1}),\ (s^2_2, o^{i^2_1}_{c(e_{1,i^2_1})+2}),\ \ldots,\ (s^2_{c(e_{2,i^2_1})}, o^{i^2_1}_{c(e_{1,i^2_1})+c(e_{2,i^2_1})}),$$
$$(s^2_{c(e_{2,i^2_1})+1}, o^{i^2_2}_{c(e_{1,i^2_2})+1}),\ (s^2_{c(e_{2,i^2_1})+2}, o^{i^2_2}_{c(e_{1,i^2_2})+2}),\ \ldots,$$
$$(s^2_{c(e_{2,i^2_1})+c(e_{2,i^2_2})}, o^{i^2_2}_{c(e_{1,i^2_2})+c(e_{2,i^2_2})}),$$
$$\ldots,$$
$$(s^2_{\sum\limits_{p=1}^{n_2-1} c(e_{2,i^2_p})+1}, o^{i^2_{n_2}}_{c(e_{1,i^2_{n_2}})+1}),\ (s^2_{\sum\limits_{p=1}^{n_2-1} c(e_{2,i^2_p})+2}, o^{i^2_{n_2}}_{c(e_{1,i^2_{n_2}})+2}),\ \ldots,$$
$$(s^2_{\sum\limits_{p=1}^{n_2-1} c(e_{2,i^2_p})+c(e_{2,i^2_{n_2}})}, o^{i^2_{n_2}}_{c(e_{1,i^2_{n_2}})+c(e_{2,i^2_{n_2}})}).$$

Аналогично рассматриваем все ребра из множества $r(X)$, инцидентные субъектам $s_3, s_4, \ldots, s_n$. Положим для любого $e' \in r'(X')$ $c'(e') = 1$. Очевидно, что $(r'(X'), c')$ — правильный доступ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, а также то, что этот правильный доступ $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображает в правильный доступ $(r(X), c)$ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 2 следует, что если $(g'(X', Y'), \lambda')$ — развертка запроса $(g(X, Y), \lambda)$ и для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ существует правильный доступ, то правильный доступ существует и для запроса

$(g'(X',Y'),\lambda')$. Иными словами, развертка разрешимого запроса является разрешимым запросом. Таким образом, выполнено следующее следствие.

Следствие 7. *Развертка запроса разрешима точно тогда, когда этот запрос разрешим.*

Следствие 8. *Если $(g'(X',Y'),\lambda')$ — развертка запроса $(g(X,Y),\lambda)$, то число всех правильных доступов для запроса $(g'(X',Y'),\lambda')$ не меньше числа всех правильных доступов для запроса $(g(X,Y),\lambda)$.*

Заметим, что граф развертки полного запроса, граф которого полный двудольный, является полным двудольным.

Лемма 3. *Если $(g'(X',Y'),\lambda')$ — развертка разрешимого запроса $(g(X,Y),\lambda)$, не являющегося простейшим, то отображение $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ не является инъективным.*

Доказательство. Так как запрос $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим, то по следствию 7 запрос $(g'(X',Y'),\lambda')$ также является разрешимым, а значит отображение $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ определено. Пусть $X=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$, $Y=\{o_1,o_2,\ldots,o_m\}$, $n,m\in N$. Так как запрос $(g(X,Y),\lambda)$ не является простейшим, то в нем найдется объект, вес которого больше единицы, или субъект, число требований которого больше единицы. Рассмотрим отдельно эти два случая.

1. Для некоторого $l\in\{1,2,\ldots,m\}$ $\rho(o_l)>1$. Тогда, по построению, множеству Y' принадлежат объекты o_1^l и o_2^l. Возьмем произвольный правильный доступ $(r'(X'),c')$ для запроса $(g'(X',Y'),\lambda')$. Возможны следующие случаи.

а) Множеству $r'(X')$ принадлежит ребро (s_i^k,o_1^l) для некоторых $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i\in\{1,2,\ldots,\lambda(s_k)\}$ и не принадлежит ни одного ребра, инцидентного объекту o_2^l. Тогда положим $r''(X')=(r'(X')\backslash\{(s_i^k,o_1^l)\})\cup\{(s_i^k,o_2^l)\}$.

б) Множеству $r'(X')$ принадлежат ребра $(s_{i_1}^{k_1},o_1^l)$ и $(s_{i_2}^{k_2},o_2^l)$ для некоторых $k_1,k_2\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i_1\in\{1,2,\ldots,\lambda(s_{k_1})\}$, $i_2\in\{1,2,\ldots,\lambda(s_{k_2})\}$. Тогда положим $r''(X')=(r'(X')\backslash(\{(s_{i_1}^{k_1},o_1^l)\}\cup\{(s_{i_2}^{k_2},o_2^l)\}))\cup\{(s_{i_1}^{k_1},o_2^l)\}\cup\{(s_{i_2}^{k_2},o_1^l)\}$.

в) Множеству $r'(X')$ не принадлежат ребра, инцидентные объектам o_1^l или o_2^l. Так как $(r'(X'), c')$ — правильный доступ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, то для некоторых $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, \rho(o_i)\}$ множеству $r'(X')$ принадлежит ребро (s_1^1, o_j^i). Пусть $r''(X') = (r'(X') \backslash \{(s_1^1, o_j^i)\}) \cup \{(s_1^1, o_1^l)\}$ и определим функцию c'' так, чтобы она принимала единичные значения на множестве $r''(X')$. Очевидно, что $(r''(X'), c'')$ — правильный доступ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, причем для него имеет место случай а).

г) Множеству $r'(X')$ принадлежит ребро, инцидентное объекту o_2^l, и не принадлежит ни одного ребра, инцидентного объекту o_1^l. Этот случай аналогичен случаю а).

Во всех случаях определим функцию c'' так, чтобы она принимала значение 1 на множестве $r''(X')$. Очевидно, что $(r''(X'), c'')$ — правильный доступ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, отличный от доступа $(r'(X'), c')$. Причем $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображает доступы $(r'(X'), c')$ и $(r''(X'), c'')$ в один правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$.

2. Для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\lambda(s_k) > 1$. Тогда, по построению, множеству X' принадлежат субъекты s_1^k и s_2^k. Возьмем произвольный правильный доступ $(r'(X'), c')$ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$. Тогда множеству $r'(X')$ принадлежит ребро, инцидентное субъекту s_1^k, и ребро, инцидентное субъекту s_2^k. Пусть это, соответственно, ребра $(s_1^k, o_{j_1}^{l_1})$ и $(s_2^k, o_{j_2}^{l_2})$, $l_1, l_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j_1 \in \{1, 2, \ldots, \rho(o_{l_1})\}$, $j_2 \in \{1, 2, \ldots, \rho(o_{l_2})\}$. Положим $r''(X') = (r'(X') \backslash (\{(s_1^k, o_{j_1}^{l_1})\} \cup \{(s_2^k, o_{j_2}^{l_2})\})) \cup \{(s_1^k, o_{j_2}^{l_2})\} \cup \{(s_2^k, o_{j_1}^{l_1})\}$ и определим функцию c'' так, чтобы она принимала единичные значения на множестве $r''(X')$. Очевидно, что $(r''(X'), c'')$ — правильный доступ для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, отличный от доступа $(r'(X'), c')$. Причем $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображает доступы $(r'(X'), c')$ и $(r''(X'), c'')$ в один правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Итак, во всех случаях найдены два различных правильных доступа для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, которые $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ отображает в один правильный доступ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Значит, отображение $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ не является инъективным. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3

Если запрос $(g(X, Y), \lambda)$ является простейшим, то по лемме 1 для числа всех правильных доступов $N_{\text{п.д.}}$ для этого запроса выполняется

$$N_{\text{п.д.}} = \frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y) - \lambda(X))!}.$$

Предположим, что запрос $(g(X, Y), \lambda)$ не является простейшим. Без ограничения общности можно считать, что для любого объекта $o \in Y$ $\rho(o) \neq 0$, так как никакому правильному доступу для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ не принадлежит ребро, инцидентное объекту, вес которого равен нулю (см. предложение 5). По следствию 8 число всех правильных доступов для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ не больше числа всех правильных доступов для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$, где $(g'(X', Y'), \lambda')$ — развертка запроса $(g(X, Y), \lambda)$. Так как запрос $(g(X, Y), \lambda)$ разрешим, то по следствию 7 запрос $(g'(X', Y'), \lambda')$ также является разрешимым, кроме того, граф $g'(X', Y')$ является полным двудольным из-за полной двудольности графа $g(X, Y)$. Наконец, по определению развертка является полным и простейшим запросом. Таким образом, для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$ выполнены условия леммы 1 и число всех правильных доступов для этого запроса равно

$$\frac{\rho'(Y')!}{(\rho'(Y') - \lambda'(X'))!}. \tag{1}$$

Пусть $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_m\}$, $n, m \in N$. Заметим, что $\rho'(Y') = \sum\limits_{o' \in Y'} \rho'(o') = \sum\limits_{o' \in Y'} 1 = |Y'| = \rho(o_1) + \rho(o_2) + \ldots + \rho(o_m) = \rho(Y)$, $\lambda'(X') = \sum\limits_{s' \in X'} \lambda'(s') = \sum\limits_{s' \in X'} 1 = |X'| = \lambda(s_1) + \lambda(s_2) + \ldots + \lambda(s_n) = \lambda(X)$ и выражение (1) равно $\frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y) - \lambda(X))!}$. Итак, мы получили, что для числа всех правильных доступов для запроса $(g(X, Y), \lambda)$ выполняется неравенство

$$N_{\text{п.д.}} \leqslant \frac{\rho(Y)!}{(\rho(Y) - \lambda(X))!}. \tag{2}$$

Наконец, так как запрос $(g'(X', Y'), \lambda')$ разрешим, то определено отображение $F_{(g(X,Y),\lambda)}$ множества всех правильных доступов для запроса $(g'(X', Y'), \lambda')$ в множество всех правильных доступов для запроса

$(g(X,Y),\lambda)$, которое, по леммам 2 и 3, является сюрьективным и не является инъективным. А значит, число всех правильных доступов для запроса $(g(X,Y),\lambda)$ строго меньше числа всех правильных доступов для запроса $(g'(X',Y'),\lambda')$ и неравенство (2) является строгим. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4

Заметим, что запрос $g(X,Y)$ удовлетворяет условиям предложения 1, следовательно, $\lambda(X) \leqslant \rho(Y)$. Так как запрос $(g(X,Y),\lambda)$ является простейшим, то $\lambda(X) = \sum\limits_{s\in X} \lambda(s) = \sum\limits_{s\in X} 1 = |X|$, аналогично, $\rho(Y) = \sum\limits_{o\in Y} \rho(o) = \sum\limits_{o\in Y} 1 = |Y|$. Таким образом, $|X| \leqslant |Y|$, следовательно, $n \leqslant m$.

Покажем, что запрос $g(X,Y)$ является $(m-n)$-сильно-e-устойчивым, если $m > n$. Для этого достаточно доказать, что запрос $g'(X,Y)$, получающийся из запроса $g(X,Y)$ удалением в графе $g(X,Y)$ для каждого субъекта из X произвольных $(m-n)$ ребер, инцидентных ему, также является разрешимым. Действительно, в графе $g'(X,Y)$ каждому субъекту из X инцидентно $m-(m-n) = n$ ребер. Возьмем произвольное непустое подмножество $P \subseteq X$. Тогда $\lambda(P) = |P| \leqslant |X| = n \leqslant |m(P)| = \rho(m(P))$ (здесь и далее обозначение $m(P)$ относится к новому запросу $g'(X,Y)$). Таким образом, по теореме 1 запрос $g'(X,Y)$ разрешим, а значит запрос $g(X,Y)$ является $(m-n)$-сильно-e-устойчивым.

Покажем теперь, что запрос $g(X,Y)$ является $(m-1)$-слабо-e-устойчивым, если $m > 1$. Для этого достаточно доказать, что запрос $g'(X,Y)$, получающийся из запроса $g(X,Y)$ удалением в графе $g(X,Y)$ произвольного множества R из $(m-1)$ ребра, также является разрешимым. Возьмем произвольное непустое подмножество $P \subseteq X$. Если субъектам из P не инцидентно ни одно ребро из R, то $\lambda(P) = |P| \leqslant |X| = n \leqslant m = |m(P)| = \rho(m(P))$. Если же во множестве R найдется ребро, инцидентное некоторому субъекту из P, то без ограничения общности можно предположить, что все ребра из R инцидентны некоторым субъектам из P. Если все ребра из R инцидентны одному субъекту $s \in P$, то в графе $g'(X,Y)$ есть

$m - |R| = m - (m-1) = 1$ ребро, инцидентное s. Всем остальным субъектам из P в графе $g'(X,Y)$ инцидентно m ребер. Если $|P| = 1$, то $|m(P)| = 1$ и, так как $\lambda(P) = |P|$, а $\rho(m(P)) = |m(P)|$, мы получаем $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Если же $|P| > 1$, то $|m(P)| = m$ и мы получаем $\lambda(P) = |P| \leqslant |X| = n \leqslant m = |m(P)| = \rho(m(P))$. В случае, когда во множестве P только двум субъектам s_1 и s_2 инцидентны ребра из R, мы получаем, что субъекту s_1 может быть инцидентно только не более $m-2$ ребер из R, а значит в графе $g'(X,Y)$ есть не менее $m-(m-2) = 2$ ребер, инцидентных s_1. Всем субъектам из P, отличным от s_1 и s_2, в графе $g'(X,Y)$ инцидентно m ребер. Если $|P| = 2$, то $|m(P)| \geqslant 2$ и, так как $\lambda(P) = |P|$, а $\rho(m(P)) = |m(P)|$, мы получаем $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$. Если же $|P| > 2$, то $|m(P)| = m$ и мы получаем $\lambda(P) = |P| \leqslant |X| = n \leqslant m = |m(P)| = \rho(m(P))$. Аналогичны рассуждения и в случаях, когда во множестве P только трем, только четырем и т. д., только $|P|$ субъектам инцидентны ребра из R. Во всех случаях мы получаем, что $\lambda(P) \leqslant \rho(m(P))$, следовательно, по теореме 1 запрос $g'(X,Y)$ разрешим, а значит запрос $g(X,Y)$ является $(m-1)$-слабо-e-устойчивым.

Теперь покажем, что запрос $g(X,Y)$ является $(k, m-k)$-e-устойчивым, если $k \in N, k \leqslant n, k \leqslant m-1$. Для этого достаточно доказать, что запрос $g'(X,Y)$, получающийся из запроса $g(X,Y)$ удалением в графе $g(X,Y)$ для каждого субъекта s из подмножества $M \subseteq X$, $|M| = k$, произвольных $m-k$ ребер, инцидентных s, также является разрешимым. Действительно, в графе $g'(X,Y)$ каждому субъекту из M инцидентно $m-(m-k) = k$ ребер. Возьмем произвольное непустое подмножество $P \subseteq M$. Тогда $\lambda(P) = |P| \leqslant |M| = k \leqslant |m(P)| = \rho(m(P))$. Поэтому по теореме 1 запрос $g''(M,Y)$ разрешим (здесь граф запроса $g''(M,Y)$ получается из графа запроса $g'(X,Y)$ удалением всех вершин из $X \backslash M$ и инцидентных им ребер). Пусть $r(M)$ — некоторый правильный доступ для $g''(M,Y)$, а Q — множество всех объектов, инцидентных ребрам из $r(M)$. Рассмотрим запрос $g'''(X \backslash M, Y \backslash Q)$, граф которого получается из графа $g'(X,Y)$ удалением всех вершин из $M \cup Q$ и инцидентных им ребер. Очевидно, что граф $g'''(X \backslash M, Y \backslash Q)$ полный двудольный, а запрос $g'''(X \backslash M, Y \backslash Q)$ полный, причем $|X \backslash M| = n-k$, $|Y \backslash Q| = m-k$, следовательно, $|X \backslash M| \leqslant |Y \backslash Q|$, но $\lambda(X \backslash M) = |X \backslash M|$ и $\rho(Y \backslash Q) = |Y \backslash Q|$, а значит $\lambda(X \backslash M) \leqslant \rho(Y \backslash Q)$ и по предложению 1 запрос $g'''(X \backslash M, Y \backslash Q)$ разрешим и имеет некоторый правильный доступ $r'(X \backslash M)$. Очевидно, что тогда $r(M) \cup r'(X \backslash M)$ — правильный доступ для запроса $g'(X,Y)$, следовательно, он разрешим, а значит запрос $g(X,Y)$ является $(k, m-k)$-*e*-устойчивым.

Осталось показать, что запрос $g(X,Y)$ является $(m-n)$-*o*-устойчивым, если $m > n$. Для этого достаточно доказать, что запрос $g'(X,Y)$, получающийся из запроса $g(X,Y)$ удалением в графе $g(X,Y)$ произвольных $m-n$ объектов и всех инцидентных им ребер, также является разрешимым. Пусть Y' — множество всех объектов, принадлежащих графу $g'(X,Y)$. Заметим, что $|Y'| = |Y| - (m-n) = m - (m-n) = n$. Пусть $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $Y = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$. Тогда $\{(s_1, o_1), (s_2, o_2), \ldots, (s_n, o_n)\}$ — правильный доступ для запроса $g'(X,Y)$, следовательно, он разрешим, а значит запрос $g(X,Y)$ является $(m-n)$-*o*-устойчивым. Теорема доказана.

5. Случай деревьев

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 10. *Если $g(X,Y)$ — дерево без висячих субъектов и $(g(X,Y), \lambda)$ — полный простейший запрос, то выполнено следующее:*

а) если $s \in X$, $o \in Y$ и $g(X,Y)$ содержит ребро (s,o), то для запроса $(g(X,Y), \lambda)$ существует правильный доступ $(r(X), c)$, такой, что $(s,o) \in r(X)$;

б) запрос $(g(X,Y), \lambda)$ 1-o-устойчив.

Доказательство. Пусть $s \in X$, $o \in Y$ и $g(X,Y)$ содержит ребро (s,o). Построим правильный доступ $r(X)$ для запроса $(g(X,Y), \lambda)$, такой, что $(s,o) \in r(X)$. Пусть $R = \{(s,o)\}$ и $G = g(X,Y)$. Предположим, что в графе G нет субъектов, отличных от s и смежных с o. Тогда положим $G = G - s - o$ (таким образом обозначен граф, получающийся из графа G удалением вершин s и o со всеми инцидентными им ребрами). Каждая компонента связности нового графа является либо изолированным объектом, либо деревом без висячих субъектов. Очевидно, что объединение правильных доступов для всех полных простейших запросов, графами которых являются последние компоненты связности, является правильным доступом для полного простейшего запроса с графом G (считается, что G содержит хотя бы один субъект, в противном случае $r(X) = R$ — искомый правильный доступ), который, в свою очередь, объединенный с R, является искомым правильным доступом $r(X)$.

Будем теперь считать, что объект o, кроме субъекта s, смежен еще с субъектами $s_1, s_2, \ldots, s_k$, $k \in N$. Так как в G нет висячих субъектов, то для $i = 1, 2, \ldots, k$ существует объект o_i, отличный от o и смежный с s_i. Так как в G нет циклов, то $o_i \neq o_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Положим $G = G - s - o$. Каждая компонента связности нового графа является либо изолированным объектом, либо деревом T_i, содержащим субъект s_i для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, либо деревом без висячих субъектов, отличным от деревьев T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (множество всех таких деревьев, которое может быть пустым, мы обозначим через M). Очевидно, что объединение R и правильных доступов для всех полных простейших запросов, графами которых являются деревья из множества $M \cup \{T_1\} \cup \ldots \cup \{T_k\}$, является искомым правильным доступом $r(X)$. Заметим, что правильный доступ для полного простейшего запроса с графом T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, строится с использованием указанной выше процедуры, при этом в качестве R необходимо взять множество $\{(s_i, o_i)\}$. Таким образом, учитывая, что граф $g(X, Y)$ конечный, мы за конечное число шагов построили правильный доступ $r(X)$ для запроса $(g(X, Y), \lambda)$, такой, что $(s, o) \in r(X)$.

Покажем теперь, что запрос $(g(X, Y), \lambda)$ 1-o-устойчив. Для этого достаточно показать, что запрос $(g'(X, Y), \lambda)$, где граф $g'(X, Y)$ получается из $g(X, Y)$ удалением произвольного объекта $o \in Y$ и всех инцидентных ему ребер, является разрешимым. Рассмотрим полный простейший запрос, граф которого получается из $g(X, Y)$ добавлением нового субъекта s, объекта o' и ребер $(s, o), (s, o')$ (мы считаем, что указанные вершины и ребра принадлежат графу доступов, кроме того, считаем, что $\rho(o') = 1$). Очевидно, что этот граф является деревом без висячих субъектов. По доказанному для рассматриваемого запроса существует правильный доступ R, такой, что $(s, o) \in R$. Легко видеть, что $R \setminus \{(s, o)\}$ — правильный доступ для запроса $(g'(X, Y), \lambda)$, а значит запрос $(g'(X, Y), \lambda)$ разрешим. Предложение доказано.

Следствие 9. *Если $g(X,Y)$ — дерево без висячих субъектов и $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос, то он разрешим.*

Пусть $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос и $g(X,Y)$ — дерево. Далее приводится алгоритм, решающий задачу о разрешимости этого запроса, определяющий, единственный ли у него правильный доступ, и находящий пересечение всех его правильных доступов.

Алгоритм 1 (удаления висячих субъектов).

1) *Если $|X| > |Y|$, то запрос $g(X,Y)$ неразрешим. Алгоритм останавливается.*
2) *Пусть $G = g(X,Y)$, $r(X) = \varnothing$.*
3) *Ищем в G висячий субъект.*
4) *Если такого субъекта нет, то запрос $g(X,Y)$ разрешим, $r(X)$ — пересечение всех его правильных доступов и он имеет единственный правильный доступ точно тогда, когда для каждого $s \in X$ в $r(X)$ найдется ребро, инцидентное s. Алгоритм останавливается.*
5) *Если такой субъект s найден и он смежен с объектом o, то удалим из графа G вершины s и o со всеми инцидентными им ребрами, сохранив за новым графом старое обозначение G. Положим $r(X) = r(X) \cup \{(s,o)\}$.*
6) *Если в G есть изолированный субъект, то запрос $g(X,Y)$ неразрешим. Алгоритм останавливается.*
7) *Возвращаемся к шагу 2.*

При поиске висячего и изолированного субъекта, соответственно, на шаге 3 и на шаге 6 приведенного алгоритма для каждой пары $s \in X$ и $o \in Y$ вершин рассматриваемого графа G проверяется, принадлежит ли ребро (s,o) этому графу (если для субъекта s из G только для одного объекта o из G ребро (s,o) принадлежит G, то s — висячий субъект, если же ни для одного объекта o из G ребро (s,o) не принадлежит G, то s — изолированный субъект). Число всех таких проверок за время работы алгоритма мы будем понимать под сложностью этого алгоритма.

Теорема 8. *Если* $g(X,Y)$ *— дерево,* $n = |X|$*,* $m = |Y|$ *и* $(g(X,Y),\lambda)$ *— полный простейший запрос, то алгоритм 1 со сложностью* $O(n^2m)$ *определяет разрешимость этого запроса, отвечает на вопрос, единственный ли у него правильный доступ, а также находит пересечение всех его правильных доступов.*

Доказательство. Очевидно, что если $|X| > |Y|$, то запрос $g(X,Y)$ не имеет правильного доступа. Доказательство того, что если в графе $g(X,Y)$ нет висячих субъектов, то запрос $g(X,Y)$ разрешим, будет дано позже (см. следствие 9). Если же в $g(X,Y)$ есть висячий субъект s, смежный с объектом o (заметим, что сложность поиска висячего субъекта в $g(X,Y)$ равна $O(nm)$, если последовательно просматривать все пары (s,o), $s \in X$, $o \in Y$), то он может получить доступ только к o. Таким образом, для каждого правильного доступа $r'(X)$ данного запроса $(s,o) \in r'(X)$. После удаления из графа G вершин s и o со всеми инцидентными им ребрами у субъектов нового графа, которые были смежны с o, степень уменьшится на 1, у остальных вершин степень не изменится. При этом могут появиться изолированные субъекты (очевидно, что в этом случае запрос $g(X,Y)$ неразрешим) и новые висячие субъекты (заметим, что сложность поиска изолированного субъекта в новом графе равна $O((n-1)(m-1))$, если последовательно просматривать все пары (s',o'), $s' \in X\backslash\{s\}$, $o' \in Y\backslash\{o\}$). Если в новом графе нет изолированных субъектов, то, так как в этом графе, как в подграфе дерева, нет циклов, без ограничения общности можно считать, что этот граф — дерево (вообще говоря, в новом графе может быть несколько компонент связности). Алгоритм остановится, так как граф $g(X,Y)$ — конечный. Во время работы алгоритма однозначно определяется правильный доступ для ряда субъектов, являющихся висячими на некоторых шагах этого алгоритма. Неоднозначность начинается только на стадии определения правильных доступов для полученного графа G без висячих субъектов. В случае, когда этот граф не пуст, в нем каждый субъект s может получить доступ не менее, чем к 2 объектам, причем найдется для каждого такого объекта o правильный доступ $r'(X)$ для запроса $g(X,Y)$, в котором $(s,o) \in r'(X)$ (будет доказано позже, см. предложение 10). Таким образом, запрос $g(X,Y)$ имеет более одного правильного доступа и $r(X)$ — пересечение всех его правильных доступов. Если же G пустой, то $r(X)$ — единственный правильный доступ для $g(X,Y)$. Легко проверить, что сложность приведенного алгоритма равна $O(n^2m)$. Теорема доказана.

Предложение 11. *Если $(g(X,Y),\lambda)$ — простейший запрос, и в графе $g(X,Y)$ есть висячий объект o, смежный с субъектом s, то $(g(X,Y),\lambda)$ разрешим точно тогда, когда разрешим запрос $(g'(X',Y),\lambda')$, где $X'=X\setminus\{s\}$, при всех $s'\in X'$ выполнено $\lambda'(s')=\lambda(s)$ и граф $g'(X',Y)$ получается из графа $g(X,Y)$ удалением вершин s и o со всеми инцидентными им ребрами.*

Доказательство. Так как при запросе $(g(X,Y),\lambda)$ к объекту o может получить доступ только субъект s, то очевидно, что если правильного доступа нет для запроса $(g'(X',Y),\lambda')$, то его нет и для запроса $(g(X,Y),\lambda)$. Если же для $(g'(X',Y),\lambda')$ есть правильный доступ, то, дополнив его ребром (s,o), получим правильный доступ для $(g(X,Y),\lambda)$. Предложение доказано.

Пусть теперь $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос и $g(X,Y)$ — дерево без висячих субъектов. Следующий алгоритм находит некоторый правильный доступ для этого запроса.

Алгоритм 2 (удаления висячих объектов).

1) *Пусть $G=g(X,Y)$, $r(X)=\varnothing$.*
2) *Ищем в G висячий объект.*
3) *Если такого объекта нет, то $r(X)$ — правильный доступ для запроса $g(X,Y)$. Алгоритм останавливается.*
4) *Если такой объект o найден и он смежен с субъектом s, то удалим из графа G вершины s и o со всеми инцидентными им ребрами, сохранив за новым графом старое обозначение G. Положим $r(X)=r(X)\cup\{(s,o)\}$.*
5) *Возвращаемся к шагу 2.*

При поиске висячего объекта на шаге 2 приведенного алгоритма для каждой пары $o\in Y$ и $s\in X$ вершин рассматриваемого графа G проверяется, принадлежит ли ребро (s,o) этому графу (если для объекта o из G только для одного субъекта s из G ребро (s, o) принадлежит G, то o — висячий объект). Число всех таких проверок за время работы алгоритма мы будем понимать под сложностью этого алгоритма.

Теорема 9. *Если $g(X, Y)$ — дерево без висячих субъектов, $n = |X|$, $m = |Y|$ и $(g(X, Y), \lambda)$ — полный простейший запрос, то алгоритм 2 со сложностью $O(n^2 m)$ находит некоторый правильный доступ для этого запроса.*

Доказательство. Так как $g(X, Y)$ — дерево, то в нем есть висячая вершина ($g(X, Y)$ — полный запрос, то есть множеством вершин графа $g(X, Y)$ является $X \cup Y$, но $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$ по определению запроса, следовательно, дерево $g(X, Y)$ содержит как минимум 2 вершины), и это объект, так как в $g(X, Y)$ нет висячих субъектов. Предположим, что o — некоторый такой объект и s — субъект, смежный с ним. Очевидно, что если $r'(X')$, где $X' = X \backslash \{s\}$, — правильный доступ для полного простейшего запроса, граф G которого получается из графа $g(X, Y)$ удалением вершин s и o со всеми инцидентными им ребрами, то $r'(X') \cup \{(s, o)\}$ — правильный доступ для запроса $g(X, Y)$. Заметим, что если граф G не содержит субъектов, то множество $\{(s, o)\}$ является правильным доступом для $g(X, Y)$. После удаления из графа $g(X, Y)$ вершин s и o со всеми инцидентными им ребрами у объектов нового графа, которые были смежны с s, степень уменьшится на 1, у остальных вершин степень не изменится и в полученном графе не будет висячих субъектов. Так как в новом графе, как в подграфе дерева, нет циклов, то без ограничения общности можно считать, что этот граф — дерево (вообще говоря, в нем может быть несколько компонент связности). Алгоритм остановится, так как граф $g(X, Y)$ конечный. Легко проверить, что сложность приведенного алгоритма равна $O(nm \min(n, m))$. Осталось заметить, что, так как алгоритм находит для запроса $g(X, Y)$ правильный доступ, то число объектов этого запроса не меньше числа его субъектов, то есть $n \leqslant m$, и сложность алгоритма равна $O(n^2 m)$. Теорема доказана.

Заметим, что, используя алгоритмы 1 и 2, можно определить разрешимость полного простейшего запроса, граф которого является деревом, и, в случае его разрешимости, найти некоторый его правильный доступ. Алгоритм 1 определяет разрешимость этого запроса, находит пересечение всех его правильных доступов и сводит задачу к задаче нахождения некоторого правильного доступа для полного простейшего запроса, граф которого получается в результате работы этого алгоритма. Этот граф состоит из нескольких деревьев без висячих субъектов. Для каждого полного простейшего запроса, граф которого является одним из этих деревьев, алгоритм 2 находит некоторый правильный доступ. Объединение этих доступов, дополненное найденным алгоритмом 1 пересечением всех правильных доступов для исходного запроса, очевидно, является правильным доступом для этого запроса.

Замечание. В книге [3] приводятся алгоритмы для нахождения паросочетания с наибольшим количеством ребер в двудольном графе. Очевидно, что эти алгоритмы можно легко использовать для определения разрешимости полного простейшего запроса, граф которого является двудольным, и, в случае его разрешимости, для нахождения некоторого правильного доступа для этого запроса.

Доказательство теоремы 5

Очевидно, что если $|X| = 1$, то $N_{\text{п.д.}} = \max\limits_{s\in X}(\deg(s))$. Покажем, что если $|X| > 1$, то $N_{\text{п.д.}} > \max\limits_{s\in X}(\deg(s))$. Пусть для $s_0 \in X$ $\deg(s_0) = \max\limits_{s\in X}(\deg(s))$. Так как $|X| > 1$ и граф $g(X,Y)$ связный, то в $g(X,Y)$ для некоторого объекта o', смежного с s_0, найдется субъект s', смежный с o'. По предложению 10 для запроса $g(X,Y)$ существует правильный доступ $r(X)$, такой, что ребро $(s_0,o') \in r(X)$. Обозначим через P множество всех $s \in X$, таких, что в графе $g(X,Y)$ существует путь без повторяющихся ребер из s_0 в s, проходящий через o'. Пусть $r^1(X)$ — подмножество $r(X)$, состоящее только из тех его ребер, каждое из которых инцидентно некоторой вершине из P, а $r^2(X) = (r^1(X)\backslash\{(s',o'')\})\cup\{(s',o')\}$, где o'' — объект, такой, что ребро $(s',o'') \in r^1(X)$. Так как $g(X,Y)$ — дерево без висячих субъектов, то найдется объект o''', $o''' \neq o'$, смежный с s_0. По предложению 10 для запроса $g(X,Y)$ существует правильный доступ $r''(X)$, такой, что ребро $(s_0, o''') \in r''(X)$. Пусть $r'''(X)$ — подмножество $r''(X)$, состоящее только из тех его ребер, каждое из которых не инцидентно никакой вершине из P. Тогда очевидно, что $r'''(X) \cup r^1(X)$ и $r'''(X) \cup r^2(X)$ — различные правильные доступы для запроса $g(X, Y)$, содержащие ребро (s_0, o'''). Для каждого объекта o, смежного с s_0 и отличного от o''', по предложению 10 для запроса $g(X, Y)$ существует правильный доступ, содержащий ребро (s_0, o). Итак, найдено $\max\limits_{s \in X}(\deg(s)) + 1$ правильных доступов для $g(X, Y)$, следовательно, $N_{\text{п.д.}} > \max\limits_{s \in X}(\deg(s))$. Теорема доказана.

Лемма 4. *Если $g(X, Y)$ — дерево, степень каждого субъекта которого равна* 2, *и $(g(X, Y), \lambda)$ — полный простейший запрос, то число всех правильных доступов для этого запроса равно $|X| + 1$.*

Доказательство. Пусть $n = |X|$. Будем доказывать по индукции. Если $n = 1$, то лемма верна. Предположим, что лемма верна при $n = k$, $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Покажем, что она верна и при $n = k + 1$. Действительно, в дереве $g(X, Y)$ найдется висячая вершина. Это будет объект o, так как степень каждого субъекта равна 2. Пусть объект o смежен с субъектом s. Число всех правильных доступов для запроса $g(X, Y)$, содержащих ребро (s, o), равно числу всех правильных доступов для полного запроса $g(X, Y) - s - o$, то есть равно $k + 1$ по предположению индукции. Кроме объекта o, субъект s смежен еще с одним объектом o'. Существует только один правильный доступ для $g(X, Y)$, содержащий ребро (s, o') (в этом случае другие субъекты, смежные с o', могут получить доступ только к единственному объекту, кроме o', с которым они смежны, а субъекты, смежные с новыми объектами, тоже могут получить доступ только к одному объекту и т. д.) Таким образом, число всех правильных доступов для $g(X, Y)$ равно $(k + 1) + 1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6

Если степень каждого субъекта $g(X, Y)$ равна 2, то по лемме 4 $N_{\text{п.д.}} = |X| + 1$. Предположим, что в $g(X, Y)$ есть субъекты, степень которых больше 2. Покажем, что в этом случае $N_{\text{п.д.}} > |X| + 1$.

Действительно, для каждого такого субъекта будем удалять из графа $g(X,Y)$ ребра, инцидентные этому субъекту, до тех пор, пока его степень не станет равна 2. Очевидно, что в итоге мы получим граф G, каждая компонента связности которого является деревом, степень каждого субъекта которого равна 2 (заметим, что некоторые компоненты связности могут состоять из единственной вершины, причем эта вершина может быть только объектом). Таким образом, число всех правильных доступов в графе G (говоря про правильный доступ в графе, мы имеем в виду правильный доступ для полного простейшего запроса с этим графом) равно произведению P чисел всех правильных доступов во всех компонентах связности этого графа, отличных от изолированной вершины, и по лемме 4 $P = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1)$, где k — число всех таких компонент связности, а n_i — число всех субъектов i-й компоненты связности, $i = 1, 2, \ldots, k$. Так как граф G получен из $g(X,Y)$ удалением ребер, то, очевидно, $P \leqslant N_{\text{п.д.}}$. Но если $k > 1$, то $P \geqslant n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k + n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1 = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k + |X| + 1 > |X| + 1$, следовательно, $N_{\text{п.д.}} > |X| + 1$. Если же $k = 1$, то граф G получен из $g(X,Y)$ только удалением концевых ребер. Предположим, что первым из $g(X,Y)$ было удалено ребро (s,o), $s \in X$, $o \in Y$. Пусть $r(X)$ — некоторый правильный доступ в полученном после этого графе и $(s,o') \in r(X)$, $o' \in Y$, — ребро этого доступа, инцидентное s. Тогда $(r(X) \backslash \{(s,o')\}) \cup \{(s,o)\}$ — правильный доступ для $g(X,Y)$, отличный от всех правильных доступов в графе $g(X,Y)$ без ребра (s,o). Значит после удаления (s,o) из $g(X,Y)$ число всех правильных доступов в полученном графе стало меньше $N_{\text{п.д.}}$, но это число не меньше P, следовательно, $N_{\text{п.д.}} > P = n_1 + 1 = |X| + 1$. Теорема доказана.

Будем далее доказывать теорему 7.

Лемма 5. *Если $g(X,Y)$ — максимальное дерево, $n = |X|$ и $(g(X,Y),\lambda)$ — полный простейший запрос, то $g(X,Y)$ является простой цепью*

$$s_1, (s_1, o_1), o_1, (o_1, s_2), s_2, (s_2, o_2), o_2, (o_2, s_3), s_3, \ldots,$$
$$s_{n-1}, (s_{n-1}, o_{n-1}), o_{n-1}, (o_{n-1}, s_n), s_n,$$

$s_i \in X$, $o_j \in Y$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, к которой, возможно, для некоторого множества субъектов $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s_{i_j} \in X$, $j = 1, 2, \dots, k$, добавлены концевые ребра

$$(s_{i_1}, o_1^{i_1}), (s_{i_1}, o_2^{i_1}), \dots, (s_{i_1}, o_{l_{i_1}}^{i_1}),$$
$$(s_{i_2}, o_1^{i_2}), (s_{i_2}, o_2^{i_2}), \dots, (s_{i_2}, o_{l_{i_2}}^{i_2}),$$
$$\dots,$$
$$(s_{i_k}, o_1^{i_k}), (s_{i_k}, o_2^{i_k}), \dots, (s_{i_k}, o_{l_{i_k}}^{i_k}),$$

$l_{i_j} \in N$, $o_p^{i_j} \in Y$, $j = 1, 2, \dots, k$, $p = 1, 2, \dots, l_{i_j}$.

Доказательство. Если $n = 1$, то очевидно, что граф $g(X, Y)$ имеет указанный в лемме вид. Предположим, что $n > 1$. Рассмотрим произвольный субъект $s^1 \in X$. Этому субъекту в $g(X, Y)$ смежен как минимум 1 объект o_a^1 степени 2 (так как дерево $g(X, Y)$ максимальное, то субъекту s^1 не смежно ни одного объекта большей степени). В противном случае из субъекта s^1 не существует пути в отличный от него субъект множества X (который существует, так как $n > 1$), что невозможно, так как граф $g(X, Y)$ связный. Пусть o_a^1, кроме s^1, смежен с субъектом s_a^2. Так как дерево $g(X, Y)$ максимальное, то субъект s_a^2, кроме объекта o_a^1, может быть смежен еще только с одним объектом степени 2. Если такой объект есть, то обозначим его через o_a^2, а смежный с ним субъект, отличный от s_a^2, через s_a^3 (заметим, что $s_a^3 \neq s^1$, так как в $g(X, Y)$ нет циклов). Аналогично, субъект s_a^3, кроме объекта o_a^2, может быть смежен еще только с одним объектом степени 2. Продолжая процедуру, которая остановится, так как граф $g(X, Y)$ конечный, мы получаем простую цепь

$$s^1, (s^1, o_a^1), o_a^1, (o_a^1, s_a^2), s_a^2, (s_a^2, o_a^2), o_a^2, (o_a^2, s_a^3), s_a^3,$$
$$\dots,$$
$$s_a^{k_1-1}, (s_a^{k_1-1}, o_a^{k_1-1}), o_a^{k_1-1}, (o_a^{k_1-1}, s_a^{k_1}), s_a^{k_1},$$

$k_1 \in \{2, 3, \dots\}$ (если $k_1 = 2$, то считаем, что $s_a^1 = s^1$), $s_a^i \in X$, $o_a^j \in Y$, $i = 2, 3, \dots, k_1$, $j = 1, 2, \dots, k_1 - 1$. Далее, субъект s^1, кроме объекта o_a^1, может быть смежен еще только с одним объектом степени 2. Если такого объекта нет, то, учитывая, что субъектам s^1 и s_a^i,

$i = 2, 3, \ldots, k_1$, не смежно ни одного объекта степени больше 2 (так как дерево $g(X, Y)$ максимальное), мы получаем, что граф $g(X, Y)$ имеет указанный в лемме вид. Если же такой объект есть, то аналогично описанному выше получаем простую цепь

$$s^1, (s^1, o_b^1), o_b^1, (o_b^1, s_b^2), s_b^2, (s_b^2, o_b^2), o_b^2, (o_b^2, s_b^3), s_b^3,$$
$$\ldots,$$
$$s_b^{k_2-1}, (s_b^{k_2-1}, o_b^{k_2-1}), o_b^{k_2-1}, (o_b^{k_2-1}, s_b^{k_2}), s_b^{k_2},$$

$k_2 \in \{2, 3, \ldots\}$ (если $k_2 = 2$, то считаем, что $s_b^1 = s^1$), $s_b^i \in X$, $o_b^j \in Y$, $i = 2, 3, \ldots, k_2$, $j = 1, 2, \ldots, k_2 - 1$. Так как в графе $g(X, Y)$ нет циклов, то эта цепь не имеет, кроме вершины s^1, общих вершин с предыдущей цепью. Объединяя эти две цепи и учитывая, что субъектам s^1, s_a^i и s_b^j, $i = 2, 3, \ldots, k_1$, $j = 2, 3, \ldots, k_2$, не смежно ни одного объекта степени больше 2, мы получаем, что граф $g(X, Y)$ имеет указанный в лемме вид. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7

По лемме 5 граф $g(X, Y)$ имеет вид, указанный на рис. 5. Здесь $s_i \in X$, $o_j \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$, неотмеченными вершинами являются висячие объекты, причем субъектам s_1 и s_n смежно $d - 1$, а субъектам s_i, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$, смежно $d - 2$ висячих объектов.

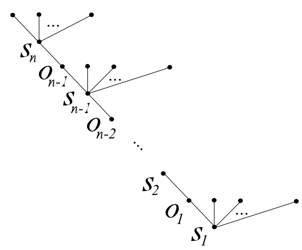

Рис. 5.

Пусть N_k — число всех правильных доступов для полного простейшего запроса с графом $g(X, Y) - s_n - s_{n-1} - \ldots - s_{k+1}$, $k =$

$1, 2, \ldots, n-1$ (здесь через $g(X,Y) - s_n - s_{n-1} - \ldots - s_{k+1}$ обозначен граф, получающийся из графа $g(X,Y)$ удалением вершин $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_{k+1}$ и всех инцидентных им ребер), N'_k — число всех правильных доступов для полного простейшего запроса с графом $g(X,Y) - s_n - s_{n-1} - \ldots - s_{k+1} - o_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, а N_n — число всех правильных доступов для запроса $g(X,Y)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&N_1 = d,\\
&N'_1 = d-1,\\[1ex]
&N_2 = (d-1)N_1 + N'_1,\\
&N'_2 = (d-2)N_1 + N'_1,\\[1ex]
&N_3 = (d-1)N_2 + N'_2,\\
&N'_3 = (d-2)N_2 + N'_2,\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&N_n = (d-1)N_{n-1} + N'_{n-1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&N_2 - N'_2 = N_1,\\
&N_3 - N'_3 = N_2,\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&N_{n-1} - N'_{n-1} = N_{n-2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $N'_k = N_k - N_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&N_1 = d,\\
&N_2 = d^2 - 1,\\
&N_3 = dN_2 - N_1,\\
&N_4 = dN_3 - N_2,\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&N_n = dN_{n-1} - N_{n-2}.
\end{aligned}$$

Мы получили линейное рекуррентное соотношение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &N_k = dN_{k-1} - N_{k-2},\ k = 3, 4, \ldots, n, \\ &N_1 = d,\ N_2 = d^2 - 1. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Характеристическое уравнение для этого соотношения имеет вид

$$r^2 = dr - 1.$$

Его корни

$$r_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4}}{2}.$$

Так как эти корни различны, то общее решение полученного соотношения имеет вид

$$N_k = c_1 r_1^{k-1} + c_2 r_2^{k-1}.$$

Константы c_1 и c_2 найдем из условий $(*)$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Берж К. Теория графов и ее применения. М.: Иностр. лит., 1962.

[2] Оре О. Теория графов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

[3] Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

[4] Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.