Об алгоритмической неразрешимости задачи о сохранении множеств слов конечно порожденными автоматными полугруппами

Мохаммед аль-Наеф аль-Хадж Юнисс (Сирия)

Известно, что замкнутые относительно операции подстановки одноместные автоматные отображения, то есть о.-д. функции, зависящие не более, чем от одной переменной, образуют полугруппу [1, 5, 6]. Такие полугруппы называют автоматными. Особый интерес представляют конечно порожденные автоматные полугруппы. Возникает вопрос: какие свойства таких полугрупп можно установить по конечному множеству порождающих их элементов?

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $r \geqslant 1$. Пусть E_k^∞ — множество всех сверхслов (бесконечных последовательностей), а E_k^r — множество всех слов длины r, составленных из элементов E_k. Через $P^k(1)$ обозначим множество всех о.-д. функций, отображающих множество E_k^∞ в себя.

Пусть G — произвольная автоматная полугруппа, $G \subseteq P^k(1)$. Пусть $l \leqslant k$, $\tau \geqslant 1$. Будем считать, что полугруппа G, действуя на множество E_l^τ, не сохраняет никакого собственного подмножества этого множества, если для любых α и β из E_l^τ в G существует элемент $g(x)$ такой, что $g(\alpha) = \beta$. Полугруппа G для некоторого $\tau \geqslant 1$ сохраняет множество $\mathrm{E} \subset E_k^\tau$ тогда и только тогда, когда для любых $\alpha \in \mathrm{E}$ и $g(x) \in G$, если $g(\alpha) \in E_k^\tau$, то $g(\alpha) \in \mathrm{E}$. Пусть автоматная полугруппа G является конечно порожденной. Можно ли по произвольному конечному множеству порождающих ее элементов установить, что полугруппа G для любого $\tau \geqslant 1$ не сохраняет никакого собственного подмножества множества E_k^∞?

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Пусть $k = 3$, $l = 2$. Не существует алгоритма, который бы по произвольному конечному множеству $\Re \in P^k(1)$ устанавливал бы, что автоматная полугруппа, порождающими элементами которой являются элементы из $\Re$, для любого $\tau \geqslant 1$ не сохраняет никакого собственного подмножества множества E_l^τ.*

Данная теорема легко обобщается на случай произвольных k и l, таких что $l < k$. Вопрос в том, верна ли аналогичная теорема тогда, когда $l = k$, остается открытым.

Прежде чем доказывать теорему 1 напомним некоторые факты из теории алгоритмов [4, 7].

Пусть $p \geqslant 2$, $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ — произвольный конечный алфавит и A^* — множество слов в этом алфавите, включая пустое слово. Каждой букве a_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ из алфавита A поставим в соответствие слово $B_i \in A^*$. Пусть B_i непусто. Тогда будем считать, что B_i представимо в виде $a_{i_1} \dots a_{i_{s_i}}$.

Таким образом,

$$a_i \to a_{i_1} \dots a_{i_{s_i}}.$$

Множество пар $\{(a_1, B_1), \dots, (a_p, B_p)\}$ обозначим P. Пусть ω — фиксированное положительное число, большее или равное единице. Алфавит A, множество пар P и число ω определяют некоторую *однородную систему продукций Поста T в алфавите A с шагом ω* (ТАГ-систему) [7]. Однородная система продукций Поста T применима к слову $a_i a_{j_2} \dots a_{j_l}$ тогда и только тогда, когда $l \geqslant \omega$, причем, если B_i непусто, то результатом применения системы T к этому слову является слово $a_{j_{\omega+1}} \dots a_{j_l} a_{i_1} \dots a_{j_{s_i}}$ при $l > \omega$ или слово B_i при $l = \omega$. Если слово B_i непусто, то результатом применения системы T к слову $a_i a_{j_2} \dots a_{j_l}$ является слово $a_{j_{\omega+1}} \dots a_{j_l}$ при $l > \omega$ или пустое слово при $l = \omega$. Пусть B — произвольное слово в алфавите A. Слово B', $B' \in A^*$ называется *T-продукцией слова B*, если существует последовательность слов $B^1, B^2, \dots, B^m$ такая, что слова B, B' совпадают соответственно со словами B^1, B^m, и для каждого n $(1 < n \leqslant m)$ слово B^n является результатом применения однородной системы продукций Поста T к слову B^{n-1}. Из этого определения следует, что множество всех продукций слова B рекурсивно перечислимо и образует последовательность $T(B)$, которая начинается со слова B, и каждое последующее слово последовательности $T(B)$ является результатом применения системы однородных продукций T к предыдущему. Возможны два случая: либо последовательность $T(B)$ конечна, то есть процесс ее построения «останавливается» на конечном шаге, либо эта последовательность бесконечна. Последнее означает, что число букв в любой T-продукции слова B не меньше числа ω — шага системы T. Возникает следующая проблема (*проблема остановки*): существует ли алгоритм, который по произвольному наперед заданному слову B устанавливает, конечно или нет множество всех T-продукций слова B, другими словами, останавливается или нет процесс построения последовательности $T(B)$. Известно [7], что существуют однородные системы продукций Поста, для которых эта проблема является алгоритмически неразрешимой. Для доказательства теоремы нам важен сам факт существования однородных систем продукций Поста с неразрешимой проблемой остановки, а конкретный вид их несущественен. Поэтому будем считать, что именно такая система T задана алфавитом A, множеством пар P и числом ω.

Пусть $k = p+3$. Пусть φ — некоторое фиксированное взаимно однозначное отображение множества E_k в множество $A \cup \{0, 1, 2\}$ такое, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$.

Рассмотрим множество E_k^∞ всех сверхслов (бесконечных последовательностей), составленных из элементов E_k. Пусть $\alpha \in E_k$, $\alpha = (\alpha(1)\alpha(2)\ldots)$. Через $\varphi(\alpha)$ обозначим сверхслово $(\varphi(\alpha(1))\varphi(\alpha(2))\ldots)$. Сверхслово α из E_k^∞ назовем *правильным*, если $\varphi(\alpha)$ имеет вид

$$(\underbrace{0\ldots0}_{m}a_{j_1}\ldots a_{j_l}11\ldots), \qquad (I)$$

где $m \geqslant 1$, $l \geqslant 1$. Будем считать, что сверхслово α является *правильным сверхсловом типа 1*, если $l \geqslant \omega$, или является *правильным сверхсловом типа 2*, если $l < \omega$.

Пусть $\alpha \in E_k$, α — правильное сверхслово, и $\varphi(\alpha)$ имеет вид (I). Слово $a_{j_1}\ldots a_{j_l}$, составленное из букв алфавита A, будем называть *A-словом сверхслова* $\varphi(\alpha)$.

Пусть B — правильное слово в алфавите A, имеющее вид

$$\alpha_{n_1}\ldots\alpha_{n_s}.$$

Слову B поставим в соответствие множество $\Im_B^1$, состоящее из двух о.-д. функций $\tilde{f}_B(x)$ и $\tilde{f}(x)$. Рассмотрим эти о.-д. функции.

О.-д. функция $\tilde{f}_B(x)$ осуществляет отображение множества $\Im_B^1$ в себя и удовлетворяет следующим свойствам:

1) пусть $\alpha \in E_k$, α — правильное сверхслово типа 1, то есть $l \geqslant \omega$, $f(\alpha) = \beta$, и сверхслово $\varphi(\alpha)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m} a_i a_{j_2} \dots a_{j_l} 11\dots,$$

где $m \geqslant 1$, $l \geqslant \omega$. Тогда

а) если слово B_i в однородной системе продукций T непусто и $l > \omega$, то $\varphi(\beta)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m+\omega} a_{j_{\omega+1}} \dots a_{j_l} a_{i_1} \dots a_{i_{s_i}} 11\dots;$$

б) если слово B_i в однородной системе продукций T непусто и $l = \omega$, то $\varphi(\beta)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m+\omega} a_{i_1} \dots a_{i_{s_i}} 11\dots;$$

в) если слово B_i в однородной системе продукций T пусто и $l > \omega$, то $\varphi(\beta)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m+\omega} a_{j_{\omega+1}} \dots a_{j_l} 11\dots;$$

г) если слово B_i в однородной системе продукций T пусто и $l = \omega$, то $\varphi(\beta)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m+\omega} 11\dots;$$

2) пусть $\alpha \in E_k$, α — правильное слово типа 2, то есть $l < \omega$, $f(\alpha) = \beta$, и сверхслово $\varphi(\alpha)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\dots0}_{m} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_l} 11\dots,$$

где $m \geqslant 1$. Тогда сверхслово $\varphi(\beta)$ представимо в виде

$$\underbrace{0\ldots0}_{m+l}22\ldots$$

3) Пусть α — произвольное сверхслово из E_k^∞ и для некоторого $t \geqslant 1$ $\varphi(\alpha(t)) \neq 0$, $\varphi(\alpha(t)) \neq 1$, $\varphi(\alpha(t)) \notin A$. Пусть $\tilde{f}(\alpha) = \beta$. Тогда $\varphi(\beta(t)) = 2$.

Нетрудно видеть, что существуют о.-д. функции, удовлетворяющие свойствам 1), 2) и 3). Фрагмент диаграммы сверхслов о.-д. функции $f(x)$ изображен на рис. 1. На рис. 1 $e \in E_k$, $e \neq 0$, $\varphi(e) \notin A$, $e' \in E_k$, $\varphi(e') \notin A$, $e'' \in E_k$, $\varphi(e'') \in A$, состояние $\tilde{q}$ — тупиковое, в котором тождественно реализуется 2.

Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим о.-д. функцию

$$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(\tilde{f}(\ldots\tilde{f}(\tilde{f}_B(x))\ldots)).$$

Нетрудно видеть, что о.-д. функция $f_n(x)$ является конечной о.-д. функцией.

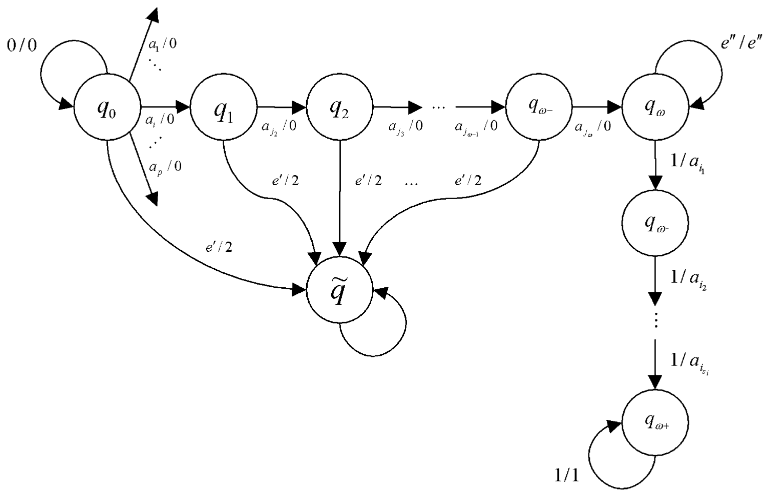

Рис. 1.

Утверждение 1. *Пусть $a \in E_k^\infty$, $f_n(\alpha) = \beta$. Тогда, если последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста бесконечна, то A-слово сверхслова $\varphi(\beta)$ совпадает с $n+1$-ым членом этой последовательности, причем число нулей в сверхслове β равно $n \cdot \omega + 1$. Если же последовательность $T(B)$ конечна и ее длина меньше или равна n, то существует $t \geqslant 1$ такое, что $\beta(t) = 2$.*

Рассмотрим автоматную полугруппу G_B, порожденную элементами $\tilde{f}_B(x)$ и $\tilde{f}(x)$.

Пусть $\tau \geqslant 1$, α_0^τ — слово из E_k^τ такое, что $\alpha_0^\tau = \underbrace{0\ldots0}_{\tau}$. Будем считать, что полугруппа $\tilde{G}_B$ *абсолютно генерирует* слово α_0^τ, если в $\tilde{G}_B$ существует элемент $g(x)$ такой, что для любого $\alpha \in E_k^\tau$, $g(\alpha) = \alpha_0^\tau$.

Утверждение 2. *Автоматная полугруппа $\tilde{G}_B$ для любого $\tau \geqslant 1$ абсолютно генерирует слово α_0^τ тогда и только тогда, когда последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста T бесконечна.*

Перейдем теперь к трехзначному алфавиту $E_3 = \{0, 1, 2\}$. Каждый элемент из E_k закодируем словами длины $k-1$ в алфавите E_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}
0 &\to 000\ldots00\\
1 &\to 200\ldots00\\
2 &\to 020\ldots00\\
&\ldots\\
k-2 &\to 000\ldots20\\
k-1 &\to 000\ldots02.
\end{aligned}$$

Понятно, что при этом о.-д. функциям $\tilde{f}_B(x)$ и $\tilde{f}(x)$ из $P^k(1)$ будут соответствовать некоторые о.-д. функции $f_B(x)$ и $f(x)$ из $P^3(1)$, отображающие множество E_3^∞ в себя.

С учетом данного кодирования, по аналогии с предыдущим, можно дать определения правильного сверхслова в алфавите E_3, правильного сверхслова типа 1 и правильного сверхслова типа 2.

Очевидно, о.-д. функция $f_B(x)$ — константная о.-д. функция, генерирующая некоторое конкретное сверхслово в алфавите E_3, являющееся правильным сверхсловом типа 1. Рассматривая же о.-д. функцию $f(x)$ будем считать, что о.-д. функция такова, что если для некоторого $t \geqslant 1$ слово $\alpha(1)\dots\alpha(t)$ является началом длины t некоторого сверхслова α, но не является началом никакого правильного сверхслова, причем $f(\alpha) = \beta$, то для любого $t' \geqslant t$ $\beta(t') = 2$. Отсюда следует важное для дальнейшего

Свойство о.-д. функции $f(x)$**.**
Пусть $\alpha \in E_3^\infty$, $f(\alpha) = \beta$, $\alpha(1) = 1$. Тогда для всякого $t \geqslant 1$ $\beta(t) = 2$.
Кроме о.-д. функции $\tilde{f}_B(x)$ и $\tilde{f}(x)$ рассмотрим еще две о.-д. функции из $P^3(1)$ — о.-д. функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

О.-д. функция $f_1(x)$ такова, что имеет место следующее.
Пусть $\alpha \in E_3^\infty, f_1(\alpha) = \beta$. Тогда

а) если $\alpha(1) \neq 0$, то для любого $t \geqslant 1$ $\beta(t) = 2$;

б) если $\alpha(1) = 0$ и для всякого $t \geqslant 2$ $\alpha(t) = 0$, то $\beta(1) = 0$ и для всякого $t \geqslant 2$ $\beta(t) = 1$;

в) если $\alpha(1) = 0$ и для некоторого $t \geqslant 3$ $\alpha(2) = \ldots = \alpha(t-1) = 0$, $\alpha(t) = 1$, то $\beta(1) = 0$, $\beta(2) = \ldots = \beta(t-1) = 1$, $\beta(t) = 0$;

г) если для некоторого $t \geqslant 1$, $\alpha(t) = 2$, то для любого $t' \geqslant t$ $\beta(t') = 2$;

д) если $\alpha(1) = 1$, то для любого $t \geqslant 1$ $\beta(t) = 2$.

Диаграмма переходов о.-д. функции $f_1(x)$ изображена на рис. 2.

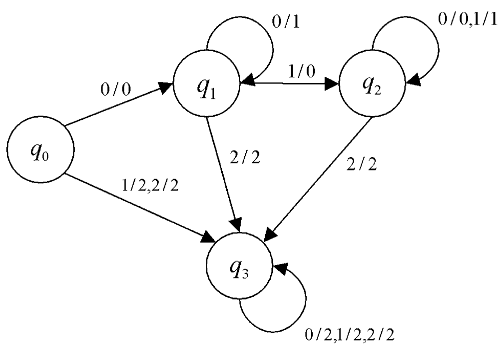

Рис. 2.

Нетрудно видеть, что имеет место следующее

Свойство о.-д. функции $f_1(x)$.

Пусть $\tau \geqslant 1$ $\alpha \in E_2^\tau$, $\beta \in E_2^\tau$, причем $\alpha(1) = 0$, $\beta(1) = 0$. Тогда существует $m \geqslant 1$ такое, что $f_1(f_1(\ldots f_1(f_1(\alpha))\ldots)) = \beta$.

Утверждение 3. *Пусть α — правильное сверхслово в алфавите E_3. Пусть для некоторого $n \geqslant 1$ $f_1(f_1(\ldots f_1(f_1(\alpha))\ldots)) = \beta$. Тогда если β также правильное сверхслово в алфавите E_3, то сверхслова α и β совпадают.*

О.-д. функция $f_2(x)$ такова, что имеет место следующее.

Пусть $\alpha \in E_3^\infty$, $f_2(\alpha) = \beta$. Тогда, если $\alpha(1) \neq 2$, то $\beta(1) = 1$ и для любого $t \geqslant 2$ $\beta(t) = \alpha(t)$, если $\alpha(1) = 2$, то для любого $t \geqslant 1$ $\beta(t) = 2$. Диаграмма переходов о.-д. функции $f_2(x)$ изображена на рис. 3.

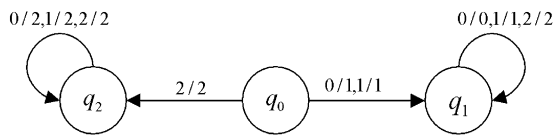

Рис. 3.

Пусть G_B — автоматная полугруппа, порожденная элементами $f_B(x)$, $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Нетрудно видеть, что имеет место утверждение, аналогичное утверждению 2 для автоматной полугруппы $\tilde{G}_B$.

Утверждение 4. *Автоматная полугруппа G_B для любого $\tau \geqslant 1$ абсолютно генерирует слово α_0^τ тогда и только тогда, когда последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста T бесконечна.*

Заметим, что в данном случае слово α_0^τ принадлежит множеству E_3^τ.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим полугруппу G_B. Пусть последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста T бесконечна. Пусть τ — произвольное число, большее или равное единице. Пусть α — произвольное слово из E_2^τ. Из утверждения 4 следует, что в G_B существует о.-д. функция $g_1(x)$ такая, что $g_1(\alpha) = \alpha_0^\tau$.

В силу *свойства о.-д. функции* $f_1(x)$, для любых $\beta(2), \ldots, \beta(r)$ из E_2 в G_B существует о.-д. функция $g_2(x)$ такая, что $g_2(\alpha_0^\tau) = 0\beta(2)\ldots\beta(r)$. Пусть $\beta = 0\beta(2)\ldots\beta(r)$. Тогда $f_2(\beta) = 1\beta(2)\ldots\beta(r)$. Отсюда следует, что система образующих полугруппы G_B — множество $\{f_B(x), f(x), f_1(x), f_2(x)\}$ — для любого $\tau \geqslant 1$ не сохраняет никакого собственного подмножества множества E_2^τ. Это означает, что полугруппа G_B для любого $\tau \geqslant 1$, действуя на слова из множества E_2^τ, не сохраняет никакого его собственного подмножества.

Пусть последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста T конечна и имеет длину n. Пусть $\tau > \omega(n+1)k$. Пусть $\alpha \in E_2^\tau$, причем $\alpha(1) = 1$. Пусть $g(x)$ — произвольный элемент полугруппы G_B и $g(\alpha) = \beta$. Исходя из свойств о.-д. функций $f_B(x), f(x), f_1(x)$ и $f_2(x)$ нетрудно видеть, что, если для любого t такого, что $t \geqslant 2$, $t \leqslant \tau$, $\beta(t) \neq 2$, то слова α и β совпадают. Поэтому в данном случае полугруппа G_B, действуя на слова из множества E_2^τ, сохраняет все одноэлементные подмножества множества E_2^τ, состоящие из слов α таких, что $\alpha(1) = 1$.

Таким образом, полугруппа G_B, действуя на слова из множества E_2^τ, для любого $\tau \geqslant 1$ не сохраняет никакого собственного подмножества множества E_2^τ лишь тогда, когда последовательность $T(B)$ в однородной системе продукций Поста T бесконечна.

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Буевичу за большую помощь в работе, а профессору С. В. Алешину за внимание к ней.

Список литературы

[1] Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда в периодических группах // Математические заметки. 1972. Вып. 3. С. 319–328.

[2] Буевич В. А. Условия A-полноты для конечных автоматов. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[3] Буевич В. А. Условия A-полноты для конечных автоматов. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.

[4] Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об A-полноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций // Сб. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 2001. Вып. 10. С. 139–154.

[5] Ван-дер Варден Б. Л. Современная алгебра. М.: Гостехиздат, 1947.

[6] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[7] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

[8] Мохаммед аль-Наеф аль-Хадж Юнисс. О выразимости через о.-д. функции всех экспериментов заданной кратности. М.: МГУ, мех.-мат. ф-т. Кандидатская диссертация. 1988.

[9] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.