О представлении плоских конфигураций в однородных структурах*

В.Е. Владиславлев

Рассматривается вопрос о сложности представления конфигураций в однородных структурах (ОС), то есть, каким минимальным числом состояний должна обладать ОС для того, чтобы из некоторой инициальной (одноклеточной) конфигурации в ней можно было вырастить заданную конфигурацию. Показано, что сложность представления почти любой плоской бинарной конфигурации $\mathcal{K}$ асимптотически равна $l^{-1}(2^{d^2})$, где d — диаметр $\mathcal{K}$ в метрике $l_{\max}$, а $l(x) = x^{x^5}$.

1. Введение

В этой работе мы рассматриваем понятие *представления* изображений в однородных структурах (ОС). Представимость изображения в некоторой ОС σ — это способность σ вырастить это изображение, точнее конфигурацию, соответствующую этому изображению из некоторой одноклеточной конфигурации. Под сложностью такого представления мы будет понимать число состояний ОС σ, необходимых для этого выращивания.

Для получения каких-либо оценок сложности представления нам необходимо приписать каждой конфигурации некоторую числовую характеристику. В качестве такой характеристики был выбран диаметр в $l_{\max}$, то есть длина стороны минимального квадрата, содержа-

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 02–01–00162.

шего эту конфигурацию. Теперь, мы можем рассмотреть класс конфигураций фиксированного диаметра d и ввести шеннонову сложность $L(d)$ представления выбранного класса.

Для указанного функционала найдена асимптотика (с точностью до аддитивной константы) и показано, что почти все конфигурации имеют такую сложность представления.

2. Необходимые понятия и постановка задачи

Однородной структурой (ОС) σ будем называть набор $\sigma = \langle \mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi \rangle$, где $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами, $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}, V = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}\}$ — упорядоченный набор различных векторов из $\mathbb{Z}^k$, φ: $(E_n)^h \to E_n$, причем $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называются ячейками ОС σ, элементы E_n — состояниями ячеек; состояние 0 мы также будем называть состоянием покоя. Набор V называется шаблоном соседства ОС σ и для всякой ячейки α однородной структуры определяет ее окрестность: $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + \alpha_1, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$. Функция φ называется локальной функцией переходов ОС σ: если $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}$ — соответствующие состояния ячеек из $V(\alpha)$ в некоторый момент времени t, то $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$ — состояние ячейки α в момент времени $t+1$.

Приписывая каждой ячейке ОС σ состояния из множества E_n, получаем *состояние однородной структуры*. Другими словами, состоянием однородной структуры σ называется функция $f : \mathbb{Z}^k \to E_n$.

Основной функцией переходов ОС σ называется функция Φ, определенная на множестве всех состояний ОС, принимающая значения в этом же множестве и удовлетворяющая следующему соотношению

$$g = \Phi(f) \Leftrightarrow g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1})), \forall \alpha \in \mathbb{Z}^k,$$

где φ — локальная функция переходов ОС σ.

Функционированием ОС называется последовательность $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ ее состояний, таких, что $f_i = \Phi(f_{i-1}), \forall i \in \mathbb{N}$, причем f_0 — интерпретируется как начальное (заданное извне) состояние ОС.

Состояние f ОС σ, для которого соотношение $f(\alpha) \neq 0$ выполнено не более, чем для конечного числа ячеек $\alpha \in \mathbb{Z}^k$, называется *конфигурацией* ОС σ. Для удобства под *конфигурацией* мы будем также понимать конечное множество $\mathcal{K}$ ячеек ОС, находящихся в ненулевом состоянии, $\mathcal{K} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^k \mid f(\alpha) \neq 0\}$.

Пусть Φ — основная функция переходов ОС σ. Если существует такое $t \in \mathbb{N}$, что $\Phi^t(f) = \Phi^{t+1}(f) = g$, то говорят, что ОС σ *выращивает* конфигурацию g из конфигурации f (отметим, что равенство здесь понимается как повекторное совпадение, а не существование параллельного переноса). Минимальное t, удовлетворяющее указанному соотношению, называется временем выращивания g из f в ОС σ.

Если в определении однородной структуры $k = 2$, то такая однородная структура называется *плоской*. Если для любой ячейки α, для которой $f(\alpha) \neq 0$, верно, что $f(\alpha) = 1$, то конфигурация f называется *бинарной*. Если конфигурация f такова, что $f(\alpha) \neq 0$, верно лишь для единственной ячейки α, то f называется *инициальной*. Если шаблон соседства плоской ОС имеет вид $V = \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$, то он называется *шаблоном соседства Мура*; будем обозначать его через V_+. Класс всех плоских однородный структур с шаблоном соседства Мура и алфавитом состояний, содержащим не более n элементов, обозначим через

$$H_+(n) = \{\sigma | \sigma = \langle \mathbb{Z}^2, E_m, V_+, \varphi \rangle, m \leqslant n\}.$$

Далее мы будем рассматривать только ОС из указанного класса.

Конфигурация $\mathcal{K}$ называется *представимой в ОС σ с помощью* $q_0 \in E_m$, если σ выращивает $\mathcal{K}$ из инициальной конфигурации, у которой единственная ненулевая ячейка имеет состояние $q_0 \in E_m$. Обозначим это как $(\sigma, q_0) \rightsquigarrow \mathcal{K}$. *Сложностью* такого представления конфигурации $\mathcal{K}$ назовем число состояний ОС σ и будем обозначать через $L_{(\sigma,q_0)}(\mathcal{K})$.

Минимальную сложность представления $\mathcal{K}$ по всем парам (σ, q_0) назовем *сложностью представления конфигурации* $\mathcal{K}$ и обозначим через

$$L(\mathcal{K}) = \min_{(\sigma,q_0)\rightsquigarrow\mathcal{K}} \{L_{(\sigma,q_0)}(\mathcal{K})\}.$$

Пусть теперь $C(d)$ — некоторый конечный класс конфигураций, который характеризуется числом $d \in \mathbb{N}$. *Сложностью представления класса* $C(d)$ назовем максимальную из сложностей представления его элементов и обозначим как $L_C(d)$.

$$L_C(d) = \max_{\mathcal{K} \in C(d)} \{L(\mathcal{K})\}.$$

Введем еще несколько обозначений. Через $\mathrm{diam}(\mathcal{K})$ будем обозначать диаметр конфигурации $\mathcal{K}$ в метрике $l_{\max}(\alpha, \beta) = \max(|\alpha_1 - \beta_1|, |\alpha_2 - \beta_2|)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Множество всех плоских бинарных конфигураций диаметра d обозначим через $D(d) = \{\mathcal{K} | \mathrm{diam}(\mathcal{K}) = d\}$. Через $l(x)$ обозначим число всех функции x-значной логики от 5-и переменных $l(x) = x^{x^5}$.

Предложенное выше описание прозволяет нам рассматривать однородные структуры как аналог управляющей системы. Таким образом, введенная нами функция $L_C(d)$ как сложность представления класса конфигураций $C(d)$ является аналогом шенноновой сложности для управляющих систем. Первым вопросом, возникающим в связи с введенными определениями, является вопрос об асимптотическом поведении выбранного функционала сложности $L_C(d)$. Если при изучении какой-либо управляющей системы класс функций алгебры-логики, который мы выбираем для представления, составляют функции, зависящие от d переменных, то для представления конфигураций мы выбрали класс $D(d)$.

Следующая часть работы посвящена получению нижней оценки сложности представления произвольного конечного класса конфигураций.

3. Нижняя оценка сложности представления

Для начала определим мощность класса плоских бинарных конфигураций диаметра d. Верно следующее утверждение.

Лемма 1. *При $d \to \infty$ справедливо соотношение $|D(d)| \sim 2^{d^2}$.*

Доказательство. Из определения $\mathrm{diam}(\mathcal{K})$ следует, что всякая конфигурация диаметра d содержится в некотором квадрате со стороной d. Так как в теории однородных структур конфигурации рассматриваются с точностью до сдвига, то можно считать, что все конфигурации лежат в одном и том же квадрате Q. Отсюда следует, что мощность $D(d)$ не больше, чем число (бинарных) состояний квадрата Q, то есть $|D(d)| \leqslant 2^{d^2}$.

Так как нас интересует асимптотическое поведение $|D(d)|$, будем считать, что $d \geqslant 2$. Разделим квадрат Q на 5 непересекающихся частей: центральная часть — квадрат со стороной $d-2$ в середине исходного квадрата, и четыре периферийных части — полосы единичной ширины и длины $d-1$, которые составляют границу квадрата Q. Рассмотрим такие конфигурации в Q, ограничение каждой из которых на любую периферийную часть содержит не менее одной ячейки в единичном состоянии. Ограничение этих конфигураций на центральную часть может быть любым. Все эти конфигурации будут различны, то есть никакая из них не может быть получена из другой с помощью параллельного переноса, и диаметр каждой будет равен d. Оценим снизу мощность $D(d)$ числом конфигураций описанного вида. Каждая периферийная часть может находиться в любом состоянии, кроме нулевого. Число таких состояний равно $2^{d-1}-1$. Центральная часть может находиться в любом состоянии; их число есть $2^{(d-2)^2}$. Перемножив число состояний каждой из пяти областей, получим нижнюю оценку для мощности $D(d)$:

$$|D(d)| \geqslant 2^{(d-2)^2} \cdot (2^{d-1}-1)^4 \sim 2^{d^2} + o(2^{d^2}), \quad d \to \infty,$$

откуда, в совокупности с верхней оценкой, следует утверждение леммы.

Прежде, чем перейти к доказательству нижней оценки, сделаем следующее предложение.

Предложение 1. *Если конфигурация $\mathcal{K}$ представима в некоторой ОС σ с помощью одного из своих состояний, а число всех ее состояний равно n_0, то для всякого n, большего n_0, существует ОС σ' с числом состояний n, которая также представляет $\mathcal{K}$ с помощью некоторого своего состояния, то есть*

$$((\sigma \in H_+(n_0))\&((\sigma, q_0) \rightsquigarrow \mathcal{K})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall n \geqslant n_0(\exists \sigma' \in H_+(n))\&((\sigma', q_0) \rightsquigarrow \mathcal{K})).$$

Доказательство. В самом деле, при $n \geqslant n_0$ рассмотрим такую ОС $\sigma' \in H_+(n)$, локальная функция переходов которой на любом наборе состояний $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in {E_{n_0}}^5$ совпадает с функцией переходов ОС σ, а на остальных наборах принимает произвольное значение. Инициальную конфигурацию для представления $\mathcal{K}$ в σ' возьмем ту же, что и для представления $\mathcal{K}$ в σ. Очевидно, что выбранная таким образом ОС σ' будет представлять заданную конфигурацию $\mathcal{K}$. Предложение установлено.

Теперь докажем мощностную нижнюю оценку для функционала сложности представления произвольного конечного класса плоских конфигураций.

Лемма 2. *Сложность представления L_C произвольного конечного класса C плоских конфигураций не меньше, чем $l^{-1}(|C|)$.*

Доказательство. Так как сложность представления класса C является, по определению, максимальной сложностью представления его конфигураций (обозначим ее через n), то, в силу сделанного выше предложения, можно считать, что все конфигурации из C представимы однородными структурами из $H_+(n)$. Каждая ОС из $H_+(n)$ может представлять не более $(n-1)$ различных конфигураций; ровно столько существует различных инициальных состояний. Так как ОС из $H_+(n)$ однозначно задаются локальными функциями переходов, мощность множества $H_+(n)$ равна числу всех функций n-значной логики от пяти переменных, сохраняющих 0; тем самым $|H_+(n)| = n^{(n-1)^5}$. Следовательно, для представления класса C необходимо выбрать такое n, чтобы выполнялось неравенство

$$|C| \leqslant (n-1) \cdot |H_+(n)| \leqslant l(n).$$

Так как функция l монотонно возрастает, обратная к ней — l^{-1} также монотонно возрастает. Взяв от обеих частей неравенства l^{-1}, получаем:

$$l^{-1}(|C|) \leqslant n.$$

Следствие 1. *Так как доказанная оценка является необходимым условием представления класса C, то справедливо, что*

$$n - 1 \leqslant l^{-1}(|C|).$$

Лемма 3. *Пусть, теперь, рассматриваемый класс конфигураций C может быть параметризован натуральным числом d, то есть $C = C(d)$. Причем $|C(d)| = g(d)$, где $g(d)$ — монотонно возрастающая, неограниченная функция. И пусть $C'(d) = \{\mathcal{K} \in C(d) | L(\mathcal{K}) \leqslant L_C(d) - 2\}$, состоит из тех конфигураций из $C(d)$, сложность представления которых меньше сложности представления всего класса $C(d)$ хотя бы на два. Тогда верно следующее утверждение*

$$\lim_{d\to\infty} \frac{|C'(d)|}{|C(d)|} = 0.$$

Доказательство. Очевидно, что $0 \leqslant \frac{|C'(d)|}{|C(d)|}$. Оценим это отношение сверху. Обозначим через n сложность представления класса $C(d)$. В силу доказанной леммы верно, что

$$n \geqslant l^{-1}(|C(d)|) = l^{-1}(g(d)).$$

Из монотонности и неограниченности функций g и l^{-1} следует, что $n \to \infty$ при $d \to \infty$. Из определения класса $C'(d)$ следует, что $|C'(d)| \leqslant l(n-2)$. Тогда

$$\frac{|C'(d)|}{|C(d)|} \leqslant \frac{l(n-2)}{g(d)} = \frac{l(n-2)}{l(l^{-1}(g(d)))} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{l(n-2)}{l(n-1)} = \left(\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \frac{1}{n-2}\right)^5.$$

Предел первого сомножителя в скобках есть e^{-1}, а второго — 0. Следовательно, $\frac{|C'(d)|}{|C(d)|} \to 0$, при $d \to \infty$.

Из доказанных лемм вытекает, что почти любая плоская бинарная конфигурация $\mathcal{K}$ имеет сложность представления не меньше, чем $l^{-1}(2^{d^2}) - 1$, где $d = \mathrm{diam}(\mathcal{K})$.

4. Асимптотически оптимальное представление плоских бинарных конфигураций

Эта часть работы посвящена описанию функционирования однородной структуры $\sigma(\mathcal{K}) = \langle \mathbb{Z}^2, E_\sigma, V_+, \varphi_\sigma \rangle$, которая построена по некоторой (произвольной) плоской бинарной конфигурации $\mathcal{K}$. Эта ОС обладает тем свойством, что она представляет $\mathcal{K}$, и число ее состояний асимптотически равно $l^{-1}(2^{d^2})$, где $d = \mathrm{diam}(\mathcal{K})$.

Пусть конфигурация $\mathcal{K}$ такова, что минимальный прямоугольник, ее содержащий, имеет размер $n_1 \times n_2$ ячеек. Из определения диаметра конфигурации следует, что $\max(n_1, n_2) = d$.

Начнем с описания структуры алфавита состояний E_σ. Разобьем E_σ на несколько непересекающихся подмножеств. Первое подмножество — множество *вспомогательных состояний*

$$Q = \{(x, y, t) \in {\mathbb{N}_0}^3 : x \leqslant 2, y \leqslant 3, t \leqslant 5\}.$$

Второе подмножество — цифры $(m+1)$-ричной системы исчисления

$$M = \{0_{m+1}, 1_{m+1}, \dots, m_{m+1}\}.$$

Третье подмножество

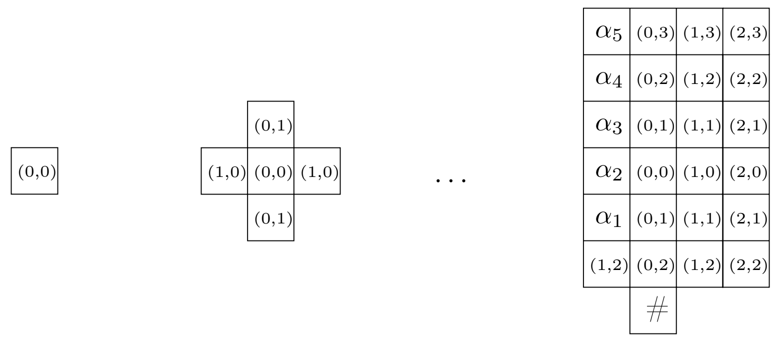
$$X = \{\#, \#', *, 0', 0'', \tilde{0}, 1', 1'', \tilde{1}, -1, 0'_{m+1}, \Delta, \tilde{\Delta}, \omega_0, \omega_1, \rightarrow, \downarrow, \delta_0, \delta_1\}$$

содержит так называемые *служебные состояния*. Наконец, последним подмножеством является множество $E_2 = \{0, 1\}$ — это именно те состояния, которые принимают ячейки бинарной конфигурации $\mathcal{K}$.

Разобьем описание процесса выращивания конфигурации $\mathcal{K}$ на несколько этапов.

4.1. Построение полигона

Полигоном называется конфигурация, имеющая форму прямоугольника размером 4 клетки на 6, структура которой будет описана ниже. Пусть $(0, 0, 5) \in Q$ — состояние единственной ненулевой ячейки инициальной конфигурации, из которой будет выращиваться финальная конфигурация $\mathcal{K}$. Последнюю компоненту векторов из Q будем называть *временем* и интерпретировать как число тактов, оставшееся до завершения очередного шага в процессе выращивания. На каждом такте эта компонента у всех ячеек, находящихся в состояниях из Q, будет совпадать (то есть ячейки во вспомогательных состояниях синхронизированы). Первые две компоненты состояний из Q назовем «*координатами*». Они показывают расстояния по каждой из соответствующих осей координат от ячейки, находящейся в этом состоянии до ячейки в состоянии с нулевыми «координатами» (такая ячейка будет единственной). Заметим, что «координаты» не определяют ячейку однозначно. Например, ячеек в состоянии вида $(1, 2, t)$ будет четыре. Но в совокупности с информацией о состоянии хотя бы одного (любого) соседа во вспомогательном состоянии ячейка определяется однозначно.



(a) $t = 5$ (b) $t = 4$ (d) $t = 0$

Рис. 1. Выращивание полигона

Всякая ячейка в нулевом состоянии, имеющая соседа (соседей) во вспомогательном состоянии, сама переходит во вспомогательное состояние (с соответствующими «координатами» и временем), если это не приводит к выходу за границы полигона; иначе она остается в нулевом состоянии. Ячейки во вспомогательных состояниях на каждом такте просто уменьшают свое время на единицу. На последнем (шестом) такте этого этапа некоторые ячейки вместо того, чтобы перейти в очередное вспомогательное состояние (с нулевым временем), переходят в состояния $\alpha_i^0 \in M$, где $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant 5$. Последний такт этого этапа показан на рисунке 1.

Ячейку с «координатами» $(1, 2)$, у которой только нижний сосед находится в нулевом состоянии, будем называть *выходом из полигона.* На последнем такте построения полигона, ячейка в нулевом состоянии, верхний сосед которой находится во вспомогательном состоянии с «координатами» $(0,2)$, переходит в служебное состояние $\#$. Ячейки в состояниях $\alpha_i^0, i = 1, \ldots, 5$ в совокупности представляют пятизначное число A^0 в $(m+1)$-ричной системе исчисления, где α_1^0 младший разряд A^0, а α_5^0 — старший. Совокупность этих пяти ячеек далее будем называть *числовым блоком.* Левую нижнюю ячейку полигона назовем *генератором тактов.* В каждый следующий момент времени состояние этой ячейки отличается от ее предыдущего состояния только временем: $t_{i+1} = t_i - 1 (\mathrm{mod}\, 6)$. Когда время генератора тактов становится равно 0 — это является сигналом к началу очередного шага процесса (вычитания единицы).

4.2. Вычитание единицы

Опишем вспомогательный процесс *вычитания единицы* в числовом блоке, то есть выращивание в ОС $\sigma_{\mathcal{K}}$ в числовом блоке из конфигурации, представляющей натуральное число $A^i = (\overline{\alpha_5^i \alpha_4^i \alpha_3^i \alpha_2^i \alpha_1^i})_{m+1}$, конфигурации, представляющей число $A^{i+1} = A^i - 1 = (\overline{\alpha_5^{i+1} \alpha_4^{i+1} \alpha_3^{i+1} \alpha_2^{i+1} \alpha_1^{i+1}})_{m+1}$. Для этого нам понадобятся два служебных состояния: -1 для обозначения заимствования из следующего разряда и $0'_{m+1}$ для обозначения старших, но уже не значащих (обнуленных) разрядов.

Рассмотрим ячейку числового блока, находящуюся в состоянии α из множества M, нижний сосед которой либо является генератором тактов и находится в состоянии с нулевым временем (то есть рассматриваемая ячейка представляет младший разряд числа A^i), либо находится в служебном состоянии -1 (то есть рассматриваемая ячейка представляет не младший разряд A^i и все меньшие разряды оказались равными 0_{m+1}). Тогда, если $\alpha \notin \{0_{m+1}, 1_{m+1}\}$, то на следующем такте ячейка переходит в состояние $\alpha - 1 \in M$.

Если же состояние рассматриваемой ячейки равно 1_{m+1}, то ее состояние в следующем такте будет зависеть еще и от состояния ее верхнего соседа. Если сосед сверху находится либо в нулевом состоянии (то есть рассматриваемая ячейка представляет старший разряд (все еще пятиразрядного) числа A^i), либо в служебном состоянии $0'_{m+1}$ (то есть рассматриваемая ячейка представляет старший разряд A^i, разрядность которого уже меньше пяти), то на следующем такте ячейка перейдет в служебное состояние $0'_{m+1}$. В противном случае ячейка примет состояние $0_{m+1} \in M$.

Наконец, если рассматриваемая ячейка находится в состоянии 0_{m+1}, то на следующем такте ячейка примет служебное состояние -1 (то есть будет осуществлено заимствование из следующего разряда). Ячейка, находящаяся в служебном состоянии -1 на следующем такте перейдет в состояние m_{m+1} — максимальная цифра в $(m+1)$-ричной системе исчисления.

Если у ячейки-генератора тактов время равно нулю, а верхний сосед находится в служебном состоянии $0'_{m+1}$ (то есть числовой блок представляет число 0), то генератор тактов переходит в служебное состояние Δ. Более подробное описание того, что происходит с ячейками, у которых среди соседей есть ячейки в состоянии Δ, будет дано ниже.

Заметим, что процесс вычитания единицы всегда занимает по времени не более шести тактов. Используя этот процесс как вспомогательный, опишем, как функционирует полигон.

4.3. Формирование новой цифры

Каждые 6 тактов в числовом блоке будет возникать новая конфигурация, кодирующая в $(m+1)$-ричной системе число, на единицу меньшее предыдущего. Так будет осуществлен перебор всех целых чисел от A^0 до нуля. За эти 6 тактов все цифры текущего числа из числового блока будут перенесены в область генерации очередной цифры, как это показано на рисунке 2 (область генерации очередной цифры отмечена серым цветом). Когда ячейка и все ее соседи будут находиться в состояниях из множества M, однородная структура $\sigma_{\mathcal{K}}$ переведет эту ячейку в новое состояние из множества M.

Через $\beta' \in M$ на рисунке обозначена цифра, которая была получена на предыдущей итерации, а через β — цифра, полученная на текущей итерации. Вынос очередной сформированной цифры за пределы полигона требует 8 или 9 тактов, в зависимости от того, идет ли сейчас формирование границы $\mathcal{K}$ или ее кода (об этом речь пойдет ниже). Но, как показано на рисунке, нехватающие такты можно заимствовать у следующей итерации так, чтобы это не мешало про-

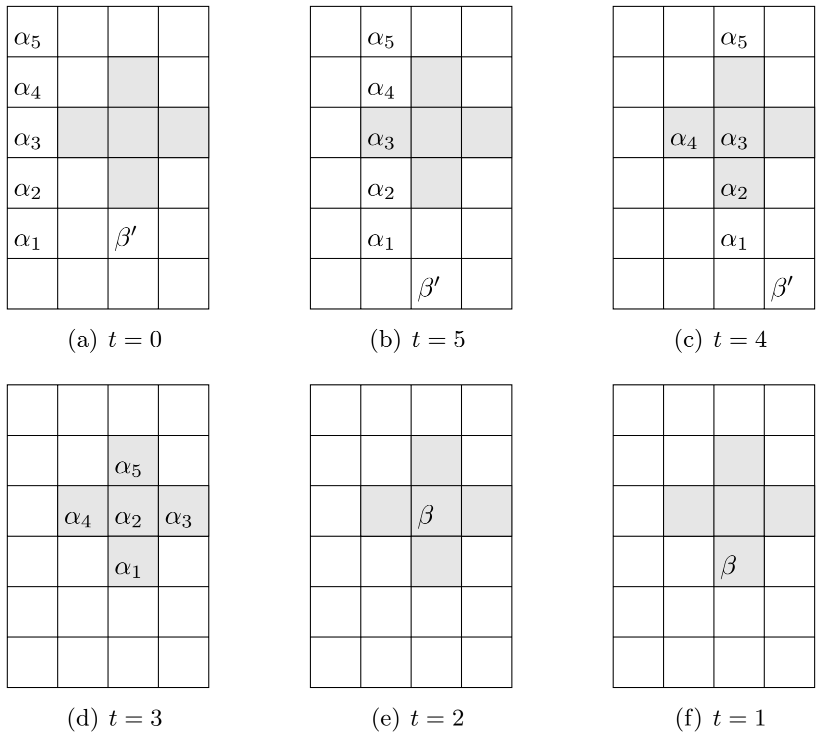


Рис. 2. Формирование новой цифры

цессу формирования очередной цифры.

Из приведенного рисунка видно, что на каждом такте у всякой ячейки в состоянии из множества M, за исключением той, в которой формируется новая цифра, есть сосед в служебном состоянии. Это позволяет ячейкам в состояниях из множества M корректно переходить обратно во вспомогательное состояние с текущим значением времени и имевшимися у них ранее «координатами».

4.4. Формирование границ и кода конфигурации $\mathcal{K}$

Из приведенного выше описания функционирования ОС $\sigma_{\mathcal{K}}$ следует, что ее локальная функция переходов $\varphi_{\sigma(K)}$ сохраняет множество

M. Пусть $\varphi_m = \varphi_{\sigma(K)}\Big|_{M^5}$ — ограничение функции $\varphi_{\sigma(K)}$ на множество цифр.

Свяжем с функцией φ_m числовую функцию f_m (которую назовем *функцией формирования кода*), определенную на целых числах из полуинтервала $[0, (m+1)^{(m+1)^5})$ и принимающую целые значения из отрезка $[0, m]$:

$$f_m(x) = y \Leftrightarrow \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_5) = y,$$

где $x = \overline{x_5x_4x_3x_2x_1}$ — запись числа в $(m+1)$-ричной системе исчисления, в которой все разряды обязательно присутствуют (старшие, правда, могут быть нулевыми). Таким образом, задание функции $f_m(x)$ влечет задание и функции φ_m.

Для кодирования представляемой конфигурации $\mathcal{K}$ будем использовать m^5-значное число в m-ричной системе исчисления. Число таких кодов равно m^{m^5}. Так как начальное число A^0, представляемое числовым блоком в начальный момент времени не превышает $(m+1)^5 - 1$, полигон может породить код длиной $(m+1)^5$.

Положим

$$m = \lceil l^{-1}(2^{d^2}) \rceil.$$

Тогда верна следующая цепочка неравенств:

$$l^{-1}(2^{d^2}) \leqslant m \Rightarrow 2^{d^2} \leqslant m^{m^5} \Rightarrow d^2 < m^5 \cdot \log m \Rightarrow d^2 < m^6 \Rightarrow d < m^3.$$

А так как $n_1 + n_2 + m^5 \leqslant 2 \cdot d + m^5 \leqslant 2m^3 + m^5 < (m+1)^5$, то полигон может выдать две последовательности длин n_1 и n_2, которые кодируют длины сторон прямоугольника, содержащего $\mathcal{K}$, и последовательность длины m^5, которая некоторым образом кодирует саму конфигурацию $\mathcal{K}$.

Из сделанной оценки следует, что начальное значение A^0 числового блока можно положить равным $m^5 + n_1 + n_2 + 1$.

Зададим функцию f_m следующим образом:

$$f_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [m^5 + n_1, m^5 + n_1 + n_2 + 1], \\ 0, & x \in (m^5, m^5 + n_1 - 1], \\ m, & x = m^5, \\ \neq m, & x \in [0, m^5 - 1]. \end{cases}$$

Последняя строка в определении f_m означает, что для указанных значений аргумента функция может принимать любое значение, за исключением m.

Теперь перейдем к рассмотрению того, как описанный механизм применяется для выращивания конфигурации $\mathcal{K}$. Сначала полигон n_2+2 раза подряд формирует цифру 1_{m+1}. Покинув пределы полигона, эта цифра будет двигаться вертикально вниз вдоль *стены* из ячеек в состоянии # (напомним, что первая ячейка этой стены была сформирована сразу же по окончании выращивания полигона). Формально это можно описать так: ячейка в нулевом состоянии, у которой левый сосед находится в состоянии #, а верхний — в состоянии 1_{m+1}, на следующем такте сама перейдет в состояние 1_{m+1}; ячейка в состоянии 1_{m+1}, у которой левый сосед имеет состояние #, на следующем такте переходит в нулевое состояние. Ячейка, у которой верхний сосед имеет состояние 1_{m+1}, а все остальные находятся в состоянии покоя, на следующем такте переходит в состояние #. Ячейка, у которой верхний и правый соседи имеют состояние #, сама на следующем такте примет состояние #. А ячейка в состоянии #, у которой левый сосед имеет такое же состояние, а все остальные находятся в состоянии покоя, сама переходит в состояние покоя. Таким образом каждая порожденная полигоном цифра 1_{m+1} увеличивает длину стены на одну ячейку.

После этого полигон сформирует n_1-1 раз цифры 0_{m+1}, которые будут передаваться вниз вдоль построенной стены. Когда появится ячейка в нулевом состоянии, у которой лишь верхний сосед имеет ненулевое состояние 0_{m+1}, то на следующем такте она примет состояние $\#'$. Далее, порождаемые полигоном цифры 0_{m+1}, будут двигаться сначала вдоль вертикальной стены из ячеек в состоянии #, а затем вдоль горизонтальной стены из ячеек в состоянии $\#'$, и каждая новая цифра 0_{m+1} будет удлинять горизонтальную стену на одну ячейку, подобно тому, как это было с цифрой 1_{m+1} в случае горизонтальной стены.

Затем полигон породит единственную цифру m_{m+1}. После того, как эта цифра выйдет за границу полигона, и расстояние между ней и полигоном станет равно 2, возникнет ячейка в нулевом состоянии, у которой левый сосед имеет состояние #, нижний — состояние m_{m+1}, а верхний — является выходом из полигона, ячейка перейдет в состояние $*$. Это означает, что выход из полигона заблокирован. На следующем такте правый сосед этой ячейки (то есть ячейка, расположенная под правым нижним углом полигона) тоже перейдет в состояние $*$. Между двумя ячейками в состоянии $*$ будет располагаться код конфигурации $\mathcal{K}$. Сама же цифра m_{m+1} проследует вниз до горизонтальной стены. Когда появится ячейка в нулевом состоянии, у которой левый сосед имеет состояние $\#$, нижний — $\#'$, а верхний — m_{m+1}, ячейка перейдет в состояний 0_{m+1}. Цифра 0_{m+1} проследует вдоль горизонтальной стены и увеличит ее длину еще на одну (последнюю) ячейку. На этом формирование границы выращиваемой конфигурации будет закончено.

Перейдем к фазе формирования кода конфигурации $\mathcal{K}$. Теперь, когда выход из полигона перекрыт снизу ячейкой в состоянии $*$, цифры, порождаемые полигоном, будут выстраиваться правее этой ячейки. Опишем этот процесс детально. Ячейка, у которой левый сосед имеет состояние цифры, нижний — либо состояние $*$, либо тоже состояние цифры, а верхний — либо состояние покоя, либо вспомогательное состояние с «координатами» $(2, 1)$, переходит в состояние этой цифры (что соответствует перемещению новой цифры вдоль уже сформированной части кода). Ячейка в состоянии $*$, у которой слева либо цифра, либо $*$, а сверху цифра, принимает состояние верхнего соседа (что соответствует добавлению новой цифры в конец кода). Ячейка в нулевом состоянии, у которой правый сосед находится в состоянии цифры, а все остальные имеют нулевые состояния, переходит в состояние $*$.

Таким образом, у нас есть последовательность ячеек, чьи состояния представляют цифры m-ричной системы исчисления, которые в совокупности образуют число, являющееся кодом конфигурации $\mathcal{K}$. Если перевести это число в двоичную систему исчисления и уложить в прямоугольник с границей, заданной ячейками в состояниях $\#$ и $\#'$, то получится конфигурация $\mathcal{K}$.

4.5. Деление пополам

Для перевода полученного кода в двоичное представление, реализуем в ОС $\sigma(\mathcal{K})$ процесс деления пополам. Остаток на каждом шаге и будет очередной цифрой искомого двоичного представления.

Как упоминалось выше, в момент, когда числовой блок полигона представляет число 0, а к нему вновь применяется процесс вычитания единицы, то генератор тактов полигона переходит в состояние Δ, которое является сигналом к началу процесса самоуничтожения полигона. Более точно: все ячейки во вспомогательных состояниях и в состоянии $0'_{m+1}$, имея соседа в состоянии Δ, сами переходят в состояние Δ. А из состояния Δ ячейка переходит в нулевое состояние. Из этого правила есть два исключения. Первое: ячейка, чей левый сосед находится в состоянии $*$, не переходит в состояние Δ (эта ячейка уже не принадлежит полигону, а представляет младший разряд кода концигурации $\mathcal{K}$). Второе исключение: ячейка, чей нижний сосед находится в состоянии $\#$. После того, как все соседи этой ячейки, кроме нижнего, станут нулевыми, она перейдет во вспомогательное состояние $(2, 3, 0)$ и станет играть роль *тактового генератора*. Состояния этой ячейки будут меняться по следующему правилу: первая «координата» будет принимать по очереди значение 1 и 2. Каждый раз, когда значение первой «координаты» равно 1, время уменьшается на единицу (по модулю 6). (Заметим, что переиспользование вспомогательных состояний для создания такого генератора тактов не приведет к тому, что начнется новый рост части полигона.)

Итак, ячейка будет принимать состояние с нулевым временем каждые 12 тактов. Когда время этой ячейки равно нулю, ее правый сосед принимает служебное состояние $\rightarrow$, которое передается над кодом горизонтально вправо. Когда у ячейки в состоянии $*$, верхний сосед оказывается в состоянии $\rightarrow$ (то есть сигнал дошел до правого края кода), а правый — в нулевом состоянии, она переходит в состояние $\downarrow$, которое на следующем такте передается нижнему соседу. Сама же ячейка на следующем такте возвращается в состояние $*$. Ячейка в состоянии $\downarrow$, у которой левый сосед имеет нулевое состояние, на следующем такте сама перейдет в нулевое состояние, а ее левый сосед из нулевого состояния перейдет в служебное состояние δ_0.

Итак, после огибания стрелками m-ричного кода конфигурации $\mathcal{K}$, под старшим разрядом этого кода появляется ячейка в состоянии δ_0. Это служит сигналом к началу очередного деления пополам. Опишем его.

Если верхний сосед ячейки, которая находится в состоянии δ_0, содержит четную цифру, то ячейка переходит в служебное состояние ω_0 (это соответствует тому, что очередной разряд поделился на два). Левый сосед ячейки в состоянии ω_0 переходит в состояние δ_0, а сама ячейка переходит в нулевое состояние. Если цифра над ячейкой в состоянии δ_0 окажется нечетной, то ячейка перейдет в состояние ω_1. А ее левый сосед на следующем такте перейдет в состояние δ_1 (сама же ячейка из состояния ω_1 перейдет на следующем такте в нулевое состояние). Если ячейка находится в состоянии $\alpha \in M$, а ее нижний сосед находится в состоянии δ_0, то ячейка переходит в состояние $[\frac{\alpha}{2}] \in M$. А если у ячейки в состоянии α нижний сосед имеет состояние δ_1, то ячейка переходит в состояние $[\frac{\alpha+m}{2}] \in M$. Это соответствует тому, что предыдущий (более старший) разряд кода $\mathcal{K}$ не поделился нацело на 2.

Осталось рассмотреть граничные случаи этого деления. Первый — это уменьшение разрядности числа. Когда ячейка, представляющая старший разряд кода (та, у которой правый сосед имеет состояние $*$), переходит в состояние 0_{m+1}, то на следующем такте она принимает состояние $*$, а ее правый сосед принимает нулевое состояние. То есть граничная ячейка кода сдвигается влево — навстречу очередному сигналу о начале деления. Но 12 тактов между последовательными сигналами хватает, чтобы это сокращение не привело к наложению сигналов.

Формирование $\mathcal{K}$ происходит по слоям, начиная с нижнего. Заполнение каждого слоя в отдельности происходит справа налево.

Второй граничный случай — получение остатка от деления (который как раз и формирует состояние очередной ячейки выращиваемой конфигурации $\mathcal{K}$). Ячейка в нулевом состоянии, у которой верхний сосед находится в состоянии $*$, левый — в состоянии $\#$, а правый — в состоянии ω_0 или ω_1, принимает на следующем такте состояние правого соседа. Далее это состояние передается вниз вдоль вертикальной границы $\mathcal{K}$, а затем вдоль горизонтальной «стены» из ячеек либо в состоянии $\#'$, либо в состояниях $0'$ и $1'$, если идет формирование не самого нижнего слоя конфигурации $\mathcal{K}$. Формирование самого нижнего слоя происходит следующим образом. Крайняя правая ячейка «стены», когда ее верхний сосед принимает состояние ω_0 или ω_1, переходит с состояние $0''$ или $1''$, соответственно. Остальные ячейки «стены», когда придет их время (то есть правый сосед будет находиться в одном из состояний $\{0'', 1'', 0', 1'\}$, а верхний — ω_0 или ω_1), переходят в состояния $0'$ и $1'$, соответственно. Таким образом, произойдет замещение состояний всех ячеек в «стене», причем крайняя правая ячейка будет иметь состояние i'', а остальные j'. Формирование последующих слоев происходит так. Состояние ω_i перемещается вдоль предыдущего слоя, пока нижняя ячейка не станет содержать состояние $0''$ или $1''$. Тогда ячейка перейдет в состояние i''. Последующие состояния перемещаются вправо до тех пор, пока не встретят ячейку в ненулевом состоянии, а встретив, переходят в состояние i'.

Последним шагом процесса станет деление на два числа 1. Остатком этого деления, очевидно, станет цифра 1, которая сформирует последнюю ненулевую ячейку последнего слоя конфигурации $\mathcal{K}$. Этот самый верхний слой может оказаться заполненным не до конца (то есть оставшиеся ячейки в конфигурации $\mathcal{K}$ имеют состояние 0). После того, как последний шаг сделан, две ячейки в состоянии $*$, которые ограничивали m-ричный код, окажутся рядом. Появление очередного сигнала $\rightarrow$ приведет к тому, что левая из двух ячеек в состоянии $*$ перейдет в состояние $\tilde{\Delta}$. Это сигнал к началу заключительного этапа представления $\mathcal{K}$.

4.6. Выравнивание

Конфигурацию, которая получилась к этому моменту, обозначим через $\mathcal{K}'$. Заметим, что она является связной. Построение $\mathcal{K}'$ осуществлялось таким образом, что в состояниях $1'$ и $1''$ находятся те и только те ячейки, которые будучи переведенными в состояние 1 составят конфигурацию $\mathcal{K}$. Опишем процесс выращивания $\mathcal{K}$ из $\mathcal{K}'$.

Если у ячейки в состоянии $1'$ или $1''$ появляется сосед в состоянии $\tilde{1}$, $\tilde{0}$ или $\tilde{\Delta}$ (назовем эти состояния *выравнивающими*), то ячейка переходит в состояние $\tilde{1}$. Если ячейка находится либо в состоянии $0'$, либо в состоянии $0''$ и хотя бы один из ее соседей имеет выравнивающее состояние, то ячейка переходит в состояние $\tilde{0}$. Из этих состояний ($\tilde{0}$ и $\tilde{1}$) ячейки переходят в состояния 0 и 1 соответственно, и более их не меняют. Если ячейка имеет ненулевое состояние, не упомянутое выше и хотя бы один из ее соседей находится в выравнивающем состоянии, то ячейка переходит в состояние $\tilde{0}$.

Из того, что $\mathcal{K}'$ является связной и из правил, описанных выше, следует, что любая ячейка $\mathcal{K}'$ побывает в выравнивающем состоянии ровно один такт и после перейдет в состояние из E_2. Таким образом, будет сформирована конфигурация $\mathcal{K}$.

4.7. Сложность представления $\mathcal{K}$

Число состояний ОС $|E_\sigma| = m + \mathrm{const}$, где $\mathrm{const} \leqslant 100$. Из того, что мы положили $m = \lceil l^{-1}(2^{d^2}) \rceil$ следует, что $L_\sigma(\mathcal{K}) \leqslant l^{-1}(2^{d^2}) + \mathrm{const}$ для всех $\mathcal{K} \in D(d)$. В совокупности с результатом предыдущей части работы получаем, что верна следующая

Теорема 1. *Для почти любой плоской бинарной конфигурации* $\mathcal{K}$

$$L(\mathcal{K}) \sim l^{-1}(2^{\mathrm{diam}^2(\mathcal{K})}), \textit{при } \mathrm{diam}(\mathcal{K}) \to \infty.$$

4.8. О времени представления конфигурации

Обозначим через $T_{(\sigma,q_0)}(\mathcal{K})$ время представления конфигурации $\mathcal{K}$ в ОС σ с помощью состояния q_0. Оценим эту величину сверху для построенной нами ОС $\sigma(\mathcal{K})$ и инициального состояния $(0, 0, 5)$. Для этого пройдемся по этапам выращивания $\mathcal{K}$ и оценим время, необходимое каждому из них.

Построение полигона требует 6 тактов. Для формирования границы необходимо $6(n_1 + n_2 + 2)$ тактов; формирование собственно m-ричного кода $\mathcal{K}$ занимает $6m^5$ тактов. Число шагов деления на этапе перевода m-ричного кода $\mathcal{K}$ в двоичный можно оценить длиной получающегося двоичного кода: $m^5 \cdot \log_2(m)$. Следовательно, число тактов этого этапа не превосходит $12m^5 \cdot \log_2(m)$. Наконец, выравнивание потребует $n_1 + n_2 + C$ тактов, где C — некоторая константа.

Так как $\max(n_1, n_2) \leqslant d$, где $d = \mathrm{diam}(\mathcal{K})$, а $m \sim l^{-1}(2^{d^2})$ и, следовательно, $m^5 \cdot \log_2(m) \sim d^2$, то получаем следующую оценку:

$$T_{(\sigma(\mathcal{K}),(0,0,5))}(\mathcal{K}) \leqslant 14d + 6m^5 + 12m^5 \cdot \log_2(m) \leqslant 12d^2.$$

В заключении, автор хочет выразить признательность своему научному руководителю — профессору Кудрявцеву Валерию Борисовичу, которому принадлежит постановка рассматриваемой задачи, и благодарит его за помощь в работе над статьей.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.

[2] Думов А.С. О времени существования конфигураций в однородных струтруках // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 6. Вып. 1. 2001. С. 137–149.