Об автоматном распознавании циклов в лабиринтах

Б. Стаматович, С. Стаматович

Доказывается отсутствие автомата, распознающего класс лабиринтов — деревьев. Приведен пример класса лабиринтов, который распознается автоматом, и при этом любое дерево можно ориентировать так, чтобы получить лабиринт из этого класса.

1. Основные понятия и результаты

Основные понятия и обозначения из теории автоматов и теории графов, которыми мы пользуемся, совпадают с принятыми, соответственно, в [2, 3] и [4], и здесь не определяются.

Пусть $L = (V, E)$ — некоторый граф, где V — множество его вершин и E — множество его дуг. Множество вершин V и множество дуг E графа L будем обозначать через $V(L)$ и $E(L)$.

Если в графе $L = (V, E)$ вместе с дугой (v_1, v_2) содержится дуга (v_2, v_1), то эту пару называем ребром и обозначаем $\langle v_1, v_2\rangle$. Граф называется симметрическим, если при $(v_1, v_2) \in E$ имеет место $\langle v_1, v_2\rangle \subseteq E$.

Обозначим через $\Delta(L) = \max\limits_{v \in V(L)} d(v)$, где $d(v)$ — степень вершины v в L. Для $v \in V(L)$ обозначим $E_v = \{(v, u) \in E \mid u \in V(L)\}$. Пусть v — вершина лабиринта $L = (V, E)$. Пусть Ω и Σ — некоторые непересекающиеся алфавиты, причем $\Omega \setminus \Sigma$ содержит пустой символ λ. Если задана некоторая функция $f: E \to \Sigma$, то множество Σ называется множеством отметок дуг, а f — разметкой дуг графа L. Если задана некоторая функция $g: V \to \Omega$, то множество Ω называется множеством отметок вершин, а g — разметкой вершин графа L. Если всем вершинам и дугам графа $L = (V, E)$ приписаны отметки из этих алфавитов так, что разным дугам, исходящим из одной и той же вершины, приписаны разные отметки, то этот нагруженный граф L называем *лабиринтом.* Отметки вершин $v \in V$ и дуг $(u, v) \in E$ обозначаем, соответственно, через $|v|$ и $|(u, v)|$. Лабиринт L с выделенными вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $n \geqslant 0$, называемыми начальными, считаем инициальным и обозначаем $L_{v_0, v_1, \ldots, v_n}$. Пусть $\Im(\Omega, \Sigma)$ — класс всех лабиринтов с множеством отметок вершин Ω и множеством отметок дуг Σ.

Множество отметок $\{|u| \bigm| u \in E_v\}$ обозначим через $[v]_L$.

Пусть $D_k = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ и $\bar{D}_k = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_k}\}$ — два непересекающихся множества. Предполагаем, что $\bar{\bar{e}} = e$ для любых $e \in D_k$.

Лабиринт $L = (V, E) \in \Im(\Omega, \Sigma)$, являющийся симметрическим графом, называется *k-мерным лабиринтом,* $k \geqslant 2$, если:
а) $\Omega = \{\lambda\}$ и $\Sigma = D_k \cup \bar{D}_k$,
б) для любых вершин $u, v \in V$, если $(u, v) \in E$, то $|(u, v)| = \overline{|(v, u)|}$.

Обозначим через $\Im_k$ класс всех k-мерных лабиринтов L, для которых $\Delta(L) \leqslant k$. В классе $\Im_k$ рассматриваем два подкласса: класс D_k и класс C_k. Для $L \in \Im_k$ выполнено $L \in D_k$, если L — дерево, и выполнено $L \in C_k$, если L — граф с циклом.

Полный граф L степени два из C_k называем *треугольным лабиринтом.*

Автомат $\mathbf{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ называется *допустимым*, если A — множество всех непустых подмножеств множества $\Sigma = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, \bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_k}\}$, $B = \Sigma \cup \{0\}$ и $\psi(q, a) \in a \cup \{0\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in A$. В дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые автоматы являются допустимыми. *Поведением автомата* $\mathbf{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} называем последовательность $\pi(\mathbf{A}_{q_0}; L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots$, где $(v_i, v_{i+1}) \in E(L_{v_0})$ или $v_{i+1} = v_i$, $\varphi(q_i, [v_i]_L) = q_{i+1}$ и $\psi(q_i, [v_i]_L) = |(v_i, v_{i+1})|$, $i = 0, 1, \ldots$ Пусть $\mathrm{Int}(\mathbf{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{v_i\}$. Если $\mathrm{Int}(\mathbf{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V(L_{v_0})$, то говорим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ *обходит* лабиринт L_{v_0}. Если для любого $u \in V(L)$ автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ обходит лабиринт L_u, то говорим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ *сильно обходит* лабиринт L.

Пусть $Q_F = \{q_{F_0}, q_{F_1}\}$, $Q_F \subseteq Q(\mathbf{A}_{q_0})$ — множество заключительных состояний автомата $\mathbf{A}_{q_0}$. Будем говорить, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ *распознает* лабиринт L_{v_0}, если при его запуске в лабиринт L_{v_0} в итоге происходит переход в заключительное состояние q_{F_1}, а при его запуске в лабиринт $L'_v \neq L_{v_0}$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0}. Пусть C — класс инициальных лабиринтов. Говорим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ *распознает класс* C, если при его запуске в любой лабиринт L_{v_0} происходит переход в заключительное состояние q_{F_1} только тогда, когда $L_{v_0} \in C$ и для любого лабиринта $L'_v \notin C$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0}.

Определим класс инициальных лабиринтов $\phi \subseteq \Im_k$ следующим способом. $L_{v_0} \in \phi$, если:

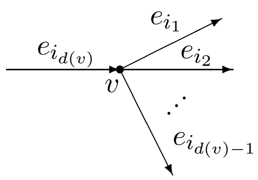


Рис. 1.

а) для $v \in V(L)$, $v \neq v_0$, $f(E_v) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(v)-1}}, \overline{e_{i_{d(v)}}}\}$, где $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(v)-1}}\} \subseteq D_k$ и $\overline{e_{i_{d(v)}}} \in \bar{D}_k$ (рис. 1),

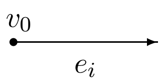


Рис. 2.

б) степень $d(v_0) = 1$ в L и $f(E_{v_0}) \in D_k$ (рис. 2), где функция f — разметка дуг графа L_{v_0}.

Теорема 1. *Если* $L_{v_0} = (V, E, v_0) \in \phi$*, то граф* $L = (V, E)$ *является деревом.*

Теорема 2. *Существует автомат* $\mathbf{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$*, который распознает класс лабиринтов* ϕ*.*

Эта теорема сопряжена с теоремой 1.1 в [1].

Теорема 3. *Если автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ при его запуске в треугольный лабиринт L_{v_0} переходит в заключительное состояние, то существует лабиринт $L'_{v_0} \in D_k$ такой, что поведение автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0} то же самое, что и в лабиринте L'_{v_0}.*

Теорема 4. *Не существует автомата, распознающего класс D_k.*

2. Доказательство теоремы 1

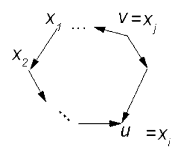


Рис. 3.

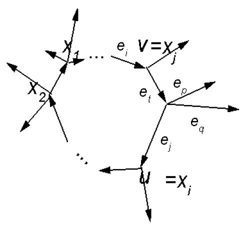


Рис. 4.

Пусть $L_{v_0} = (V, E, v_0) \in \phi$. Предположим, что в графе $L = (V, E)$, $\Delta(L) \leqslant k$, есть цикл. Пусть C : $v_1 v_2 \ldots v_n$ — простой цикл наименьшей длины в графе L. Если существует вершина $v \in V(C)$, что $[v]_C \subseteq D_k$ (рис. 3), то в цикле C существует вершина $u \in V(C)$ такая, что $[u]_C \subseteq \bar{D}_k$. Значит, в L существует вершина $u \in V(L)$, такая что $|[u]_L \cap \bar{D}_k| \geqslant 2$. Получили противоречие с определением класса ϕ.

Понятно, что в цикле C не существует вершина $v \in V(C)$ такая, что $[v]_C \subseteq \bar{D}_k$. Значит, цикл C имеет вид, как на рис. 4. Из того, что $L_{v_0} \in \phi$, и уже «потратили» отметку из множества $\bar{D}_k$, следует что для дуг $e = (v_i, w) \in E(L) \backslash E(C)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено $[e]_L \in D_k$. Значит, и для дуг, инцидентных вершинам, соседним с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, тоже «потратятся» отметки из $\bar{D}_k$. Получаем, что $|v_0| \in \bar{D}_k$. Снова противоречие с определением класса ϕ. Теорема доказана.

Если граф $L = (V, E)$ — дерево и $\Delta(L) \leqslant k$, то его можно ориентировать так, чтобы концевая вершина v_0 была корнем дерева L и для любой вершины $v \in V(L)$, $v \neq v_0$, входная степень этой вершины была равна единице [7]. Значит, существует разметка f дуг графа L такая, что $f(E_{v_0}) \in D_k$, и для каждой вершины $v \in V(L)$ значение $f(E_v)$ имеет вид $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(v)-1}}, \overline{e_{i_{d(v)}}}\}$. Тем самым приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. *Для дерева L такого, что $\Delta(L) \leqslant k$, существует разметка $f : E \to \Sigma$ дуг графа L такая, что инициальный лабиринт $L_{v_0} = (L, v_0, f)$ содержится в ϕ.*

3. Доказательство теоремы 2

Для графа L вращение его вершины v является циклической подстановкой всех ребер, инцидентных v [5]. Вращение σ графа L является вращением всех его вершин. Пусть u_0 — вершина, инцидентная ребру e_0 в графе L с некоторым вращением σ. Мы построим в графе L замкнутый маршрут u_0, e_0, u_1, e_1, u_2, $e_2, \ldots$, где ребро e_i следует за ребром e_{i-1} во вращении вершины u_i, определяемом вращением σ. Маршрут заканчивается в точности перед тем моментом, когда должна повториться пара u_0, e_0. Этот замкнутый маршрут называется циклом, порожденным вершиной u_0, ребром e_0 и индуцированным вращением σ. Вращение, индуцирующее ровно один цикл, называется круговым вращением. Имеет место утверждение.

Предложение 2. *Если граф L — дерево, то произвольное вращение графа L является круговым.*

Пусть π — циклическая подстановка $(e_1, \bar{e_1}, e_2, \bar{e_2}, \ldots, e_k, \bar{e_k})$ множества Σ. Опишем автомат $\mathbf{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, который распознает класс ϕ. Его множество состояний Q равно $\{q_e \mid e \in \Sigma\} \cup \{q_0, q_{F_0}, q_{F_1}\}$; функции φ, ψ переходов и выходов определяются так:

$$\varphi(q_0, [v_0]_L) = q_{[v_0]_L}, \quad \psi(q_0, [v_0]_L) = [v_0]_L;$$
$$\varphi(q_0, s) = q_{F_0}, \quad \psi(q_0, s) = 0, \text{ для } s \neq [v_0]_L$$

(в состоянии q_0 идет проверка того, что старт состоялся в вершине v_0).

Для $e \in \Sigma$ полагаем:

$$\varphi(q_e, [v]_L) = q_{e'}, \quad \psi(q_e, [v]_L) = e', \text{ где } e' = \pi_{[v]_L}(\bar{e}) = \pi^{\min\{d \mid \pi^d(\bar{e}) \in [v]_L\}}(\bar{e})$$

для $[v]_L \neq [v_0]_L$ и $[v]_L$ вида $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(v)-1}}, \overline{e_{i_{d(v)}}}\}$ (как в определении класса ϕ),

$$\varphi(q_e, [v]_L) = q_{F_0}, \quad \psi(q_e, [v]_L) = 0$$

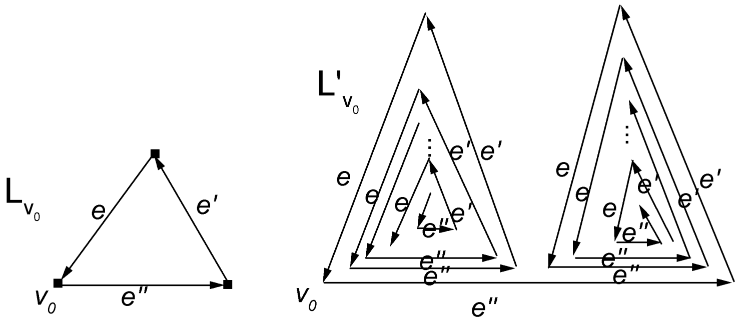
для $[v]_L \neq [v_0]_L$ и $[v]_L$ не входит в класс $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{d(v)-1}}, \overline{e_{i_{d(v)}}}\}$, и, когда снова находимся в вершине v_0, переходим в состояние q_{F_1}, то есть

$$\varphi(q_e, [v_0]_L) = q_{F_1}, \quad \psi(q_e, [v_0]_L) = 0.$$

Используя предложение 1, получим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ обходит элементы класса ϕ и, так как начальная вершина v_0 имеет «специальный вид», можно узнать, когда автомат вернется в вершину v_0. Надо показать, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ не зацикливается. Пусть, спустя некоторое время, автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ снова оказался в неконцевой вершине $v \neq v_0$. Тогда автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ находится в состоянии $q_{\bar{e}}$ для некоторого $\bar{e} \in \bar{D}_k$. Отметим, что $e \in [v]_L$ и что в следующий момент автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ двигается по дуге $e' \neq e$. Это значит, что автомат обходит все дуги из $[v]_L$. Значит, автомат пройдет через дугу с отметкой $e'' \in \bar{D}_k$ и в какой-то момент «вернется» в начальную вершину v_0. Если вершина $v \neq v_0$ концевая, тогда автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ не окажется снова в этой вершине.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть $L_{v_0} \in C_k$ — треугольный лабиринт (рис 5а). Рассмотрим поведение автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в лабиринте $L_{v_0} \in C_k$ и в лабиринте $L'_{v_0} \in D_k$, где лабиринт L'_{v_0} (рис. 5б) построим следующим образом. Запускаем автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ в лабиринт L_{v_0}. Пусть его поведение определяется последовательностью $\pi(\mathbf{A}_{q_0}; L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \ldots, (q_t, v_t)(q_{t+1} = q_{F_0}, v)$. Лабиринт $L'_{v_0} \in D_k$ построим «зацикливанием больше, чем $t+1$ раз», лабиринта L_{v_0}. В [6] существует формальное определение этой конструкции.



а) б)

Рис. 5.

Список литературы

[1] Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 72–79.

[2] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[4] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

[5] Рингель Г. Теорема о раскраске карт / Пер. с англ. М.: Мир, 1977.

[6] Стаматович Б. О распознавании автоматами // Дискретная математика. 2000. Т 12. Вып. 2.

[7] Douglas B. West. Introduction to graph theory. Prentice Hall, 2001.