Об отличимости плоских шахматных лабиринтов

В.И. Грунская

1. Введение

Рассматривается задача об отличимости вершин конечных плоских шахматных лабиринтов. Она тесно связана с прикладными задачами автоматического распознавания и отображения среды [1, 2], и интересна с точки зрения теории автоматов, поскольку изучаемые лабиринты представляют собой диаграммы переходов конечных частичных автоматов Мура.

Исследуются задачи, аналогичные классическим задачам теории автоматов: отличимости вершин и лабиринтов. Показано, что для изучаемого класса они разрешимы. Найдена оценка длин слов, достаточных для различения вершин лабиринтов. Показано совпадение отношений изоморфизма, слабой эквивалентности и эквивалентности для исследуемых лабиринтов.

Все неопределяемые понятия взяты из [3]–[5].

2. Основные определения

Рассмотрим двумерное евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ и целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ в нем. Элементы (x, y) множества $\mathbb{Z}^2$ будем называть вершинами и обозначать v. Для любой пары вершин $v = (x, y)$ и $v' = (x', y')$ расстоянием между ними будем называть число $\rho(v, v') = |x - x'| + |y - y'|$. Две вершины назовем соседними, если расстояние между ними равно единице.

Лабиринтом $L = (V_L, X_L)$ назовем ориентированный помеченный конечный граф [1], множество вершин V_L которого есть подмножество $\mathbb{Z}^2$, а множество дуг X_L обладает следующим свойством: две любые вершины соединены дугой тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно единице, причем, если $(v, u) \in X_L$, то и $(u, v) \in X_L$. Каждой вершине $v = (x, y)$ лабиринта L приписана отметка $\alpha(v) = (\alpha_{x-1,y}, \alpha_{x+1,y}, \alpha_{x,y-1}, \alpha_{x,y+1})$, где $\alpha_{x',y'} = 1$, если вершина (x', y') принадлежит лабиринту L, и 0 в противном случае. Каждой дуге (v, u) лабиринта L приписана отметка $\beta(v, u) = (\beta_1, \beta_2)$, где

$$\beta_1 = \begin{cases} +1, & \text{если дуга идет в направлении оси OX,} \\ -1, & \text{если дуга идет против направления оси OX,} \\ 0, & \text{если дуга ортогональна оси OX;} \end{cases}$$

$$\beta_2 = \begin{cases} +1, & \text{если дуга идет в направлении оси OY,} \\ -1, & \text{если дуга идет против направления оси OY,} \\ 0, & \text{если дуга ортогональна оси OY.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathbf{A}_L$ и $\mathbf{B}_L$ множества отметок всех вершин и ребер лабиринта L соответственно. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество отметок вершин всевозможных лабиринтов, через $\mathbf{B}$ — множество отметок ребер всевозможных лабиринтов.

Лабиринту рассматриваемого вида можно сопоставить частичный автомат Мура [4] с входным алфавитом $\mathbf{B}$ и выходным $\mathbf{A}$.

Слово $w = (a_1, b_1) \ldots (a_r, b_r)$ из $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^*$ назовем протоколом длины r. Обозначим длину протокола w через $\delta(w)$.

Будем говорить, что протокол $w = (a_1, b_1) \ldots (a_r, b_r)$ соответствует пути [3] $v_1, x_1, v_2, \ldots, v_r$ в лабиринте L, если для всех $i \in \{1, \ldots r\}$ a_i есть отметка вершины v_i, для всех $i \in \{1, \ldots r-1,\}$ b_i есть отметка дуги x_i, и из вершины v_r выходит дуга с пометкой b_r.

Каждой вершине v лабиринта L поставим в соответствие множество протоколов λ_v, соответствующих всевозможным путям, начинающимся в вершине v.

Вершины v лабиринта L и v' лабиринта L' назовем неотличимыми, если множества λ_v и $\lambda_{v'}$ совпадают. В противном случае вершины v и v' назовем отличимыми, а протокол $w \in \lambda_v \setminus \lambda_{v'}$ — различающим.

Лабиринт L назовем приведенным, если любая пара его вершин отличима.

Лабиринты L и L' назовем эквивалентными, если для любой вершины лабиринта L найдется неотличимая от нее вершина лабиринта L' и для любой вершины лабиринта L' найдется неотличимая от нее вершина лабиринта L.

Лабиринты L и L' назовем слабо эквивалентными, если

1) для любой вершины v лабиринта L и для любого протокола $w \in \lambda_v$ найдется такая вершина v' лабиринта L', что $w \in \lambda_{v'}$,
2) для любого протокола $w \in \lambda_{v'}$ любой вершины v' лабиринта L' найдется вершина v лабиринта L, для которой $w \in \lambda_v$.

Лабиринты L и L' назовем изоморфными, если существует такое взаимооднозначное соответствие $\varphi: \ V_L \to V_{L'}$, что для любых вершин $v, \ u \in V_L$ дуга (v, u) принадлежит X_L тогда и только тогда, когда $(\varphi(v), \varphi(u)) \in X_{L'}$, и $\alpha(v) = \alpha(\varphi(v))$, $\alpha(u) = \alpha(\varphi(u))$, $\beta(v, u) = \beta(\varphi(v), \varphi(u))$.

3. Основные результаты

В дальнейшем будет найден критерий неотличимости пары вершин рассматриваемых лабиринтов.

Введем дополнительные определения.

Назовем лабиринт односвязным, если для любой пары его вершин v и v' существует маршрут [3] из v в v'. В противном случае назовем его многосвязным.

Вершину $v = (x, y)$ односвязного лабиринта L будем называть левой крайней вершиной этого лабиринта, если вершина $(x-1, y)$ не принадлежит лабиринту. Будем говорить, что вершина принадлежит левой границе лабиринта односвязного L, если она является левой крайней вершиной этого лабиринта и $x \leqslant x'$ для всех $v' = (x', y')$ из лабиринта L. Например, на рис. 1, вершина v принадлежит левой границе лабиринта L, а вершина v' — не принадлежит. Обе эти вершины являются левыми крайними. Левой границей лабиринта назовем множество всех его левых граничных вершин. Аналогично можно

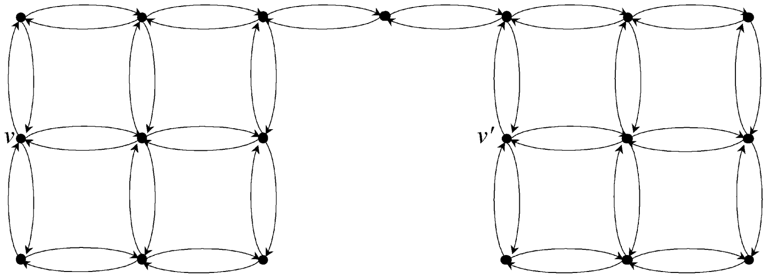

Рис. 1.

определить правую, верхнюю, нижнюю крайние вершины лабиринта и его правую, верхнюю, нижнюю границы. Для лабиринтов, состоящих из нескольких компонент связности, границы определяются для каждой компоненты связности отдельно. Вершины, не являющиеся крайними, назовем внутренними вершинами лабиринта.

Пусть протокол $w = (a_1, b_1) \dots (a_r, b_r)$ соответствует пути $v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, (v_{r-1}, v_r), v_r$ в лабиринте L, обратным к w назовем протокол $\overline{w}$, соответствующий пути $v_r, (v_r, v_{r-1}), v_{r-1}, \dots, (v_2, v_1), v_1$.

Пусть задана вершина v лабиринта L. Обозначим через P_v^b множество всех простых [3] путей из v в крайние вершины лабиринта L, а через λ_v^b множество всех протоколов, соответствующих всем путям P_v^b.

Теорема 1. *Для односвязных лабиринтов следующие утверждения эквивалентны.*

1) Вершины v лабиринта L и v' лабиринта L' неотличимы.

2) Множества λ_v^b и $\lambda_{v'}^b$ равны.

3) Лабиринты L и L' эквивалентны.

Доказательство. Докажем эквивалентность утверждений 1 и 2. Очевидно, что, если множества $\lambda_v^b \neq \lambda_{v'}^b$, то вершины v и v' отличимы.

Предположим, что вершины v лабиринта L и v' лабиринта L' отличимы, и $\lambda_v^b = \lambda_{v'}^b$. Из равенства множеств λ_v^b и $\lambda_{v'}^b$ следует, что в лабиринтах L и L' должно быть равное количество внутренних вершин. Поскольку вершины v и v' отличимы, найдется хотя бы один протокол w, принадлежащий множеству λ_v и не принадлежащий множеству $\lambda_{v'}$. Рассмотрим различающий протокол наименьшей длины, то есть, протокол $w \in \lambda_v \setminus \lambda_{v'}$, все префиксы которого длины i, $1 \leqslant i \leqslant \delta(w) - 1$, принадлежат множеству $\lambda_{v'}$. Рассмотрим путь, которому соответствует протокол w. Удалив из него все циклы получим простой путь. Протокол w', соответствующий этому пути, принадлежит множеству λ_v и не принадлежит множеству $\lambda_{v'}$. Поскольку протокол w' соответствует простому пути, символ $a_{\delta(w)}$ не может быть отметкой граничной вершины. Значит, в лабиринте L больше внутренних вершин, чем в лабиринте L', что противоречит предположению о равенстве множеств λ_v^b и $\lambda_{v'}^b$.

Докажем эквивалентность утверждений 1 и 3. Пусть вершины v лабиринта L и v' лабиринта L' неотличимы. Пусть некоторая вершина u лабиринта L отличима от любой вершины лабиринта L'. В этом случае для любой вершины u' лабиринта L' найдется протокол w из λ_u, который не принадлежит $\lambda_{u'}$. Пусть протокол w' соответствует некоторому пути из вершины v в вершину u. Тогда протокол $w'w$ принадлежит λ_v и не принадлежит $\lambda_{v'}$. Таким образом, отличимость вершин u и u' противоречит неотличимости вершин v и v'. Теорема доказана.

Поскольку множество λ_v^b является конечным, из теоремы 1 следует, что существуют эффективные алгоритмы проверки неотличимости вершин и эквивалентности лабиринтов.

Следствие 1. *Две вершины односвязного лабиринта* $L = (V_L, X_L)$ *неотличимы тогда и только тогда, когда они неотличимы никаким словом длины* $\left[\frac{|V_L|}{2}\right]$.

Доказательство. Пусть $|V_L| = n$. Рассмотрим две произвольные вершины $v = (x, y)$ и $v' = (x', y')$ лабиринта L. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x > x'$. Обозначим через λ_v^{rb} множество протоколов, соответствующих всем простым путям из вершины v в вершины правой границы лабиринта, а через λ_v^{lb} — множество протоколов, соответствующих всем простым путям из вершины v в вершины левой границы лабиринта. Очевидно, что $\lambda_v^{rb} \neq \lambda_{v'}^{rb}$ и $\lambda_v^{lb} \neq \lambda_{v'}^{lb}$. Предположим, что наименьшая длина протокола w из множества λ_v^{rb} больше $\left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда наибольшая длина протокола из множества λ_v^{lb} не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$. Следовательно, вершины v и v' различаются протоколом длины не больше $\left[\frac{n}{2}\right]$.

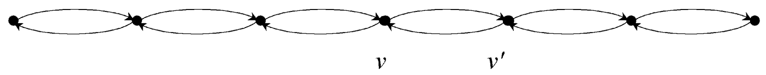

Рис. 2.

Пример на рисунке 2 показывает, что оценка достижима.

Следствие 2. *Любой односвязный лабиринт является приведенным.*

Доказательство следует из того факта, что для любой пары вершин односвязного лабиринта множества λ_v^b различны.

Теорема 2. *Следующие утверждения являются эквивалентными.*

1) Два односвязных лабиринта изоморфны.

2) Два односвязных лабиринта эквивалентны.

3) Два односвязных лабиринта слабо эквивалентны.

Доказательство. Докажем эквивалентность утверждений 1 и 2. Из определения изоморфизма лабиринтов следует их эквивалентность.

Покажем, что эквивалентные лабиринты L и L' изоморфны. Рассмотрим произвольную вершину $v = (x, y)$ лабиринта L и единственную неотличимую от нее вершину $v' = (x', y')$ лабиринта L'. Из неотличимости вершин следует, что их отметки равны. Значит, любая вершина u из множества $\{(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y-1)\}$ принадлежит лабиринту L тогда и только тогда, когда лабиринту L' принадлежит соответствующая вершина u' из множества $\{(x'-1, y'), (x'+1, y'), (x', y'-1), (x', y'-1)\}$, причем дуги (v, u) и (v', u') имеют одинаковые отметки. Таким образом, мы можем установить взаимооднозначное соответствие между вершинами лабиринтов L и L', сохраняющее смежность и пометки соответствующих вершин и ребер. Следовательно, лабиринты L и L' изоморфны.

Докажем эквивалентность утверждений 2 и 3. Из эквивалентности односвязных лабиринтов следует их слабая эквивалентность. Пусть лабиринты L и L' слабо эквивалентны, чтобы доказать их эквивалентность, достаточно для произвольной вершины v лабиринта L указать неотличимую от нее вершину v' лабиринта L'. Предположим, что такую вершину указать невозможно. Пусть множество вершин лабиринта L' $V_{L'} = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$. Занумеруем произвольным образом протоколы множества λ_v. Рассмотрим протокол $w_1 \in \lambda_v$. Согласно слабой неотличимости лабиринтов, найдется непустое подмножество $V^1_{L'}$ вершин лабиринта L' такое, что $w_1 \in \lambda_{v'}$ для всех $v' \in V^1_{L'}$. Рассмотрим протокол w_2 и сопоставим ему подмножество $V^2_{L'}$ вершин множества $V^1_{L'}$, для которых $w_2 \in \lambda_{v'}$ при $v' \in V^2_{L'}$. И так далее. Предположим, что для протокола w_j множество $V^j_{L'} = \varnothing$. Рассмотрим протокол $w = w_1\overline{w_1}w_2\overline{w_2}\ldots w_j$. По построению $w \notin \lambda_{v'}$ для всех $v' \in V_{L'}$, что противоречит предположению о слабой неотличимости лабиринтов L и L'. Теорема доказана.

Следствие 3. *Любой многосвязный лабиринт является приведенным тогда и только тогда, когда его компоненты связности попарно не изоморфны.*

Следствие 4. *В классе лабиринтов, эквивалентных данному, найдется единственный с точностью до изоморфизма приведенный лабиринт, получающийся из любого лабиринта класса отождествлением изоморфных компонент связности.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01–01–00080.

Список литературы

[1] Albers S., Henzinger M.R. Exploring unknown environments // Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. May 1997. P. 416–425.

[2] Awerbuch B., Betke M., Rivest R., Singh M. Piecemeal graph exploration by a mobile robot // 8$^{\text{th}}$ Conference on Computational Learning Theory. November 1995. P. 321–328.

[3] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

[4] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1985.

[5] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3. С. 3–28.