О классификации базисов в P_k по разрешимости полноты для автоматов

Д.Н. Бабин

Рассматривается проблема полноты систем автоматных функций вида $\Phi \cup \nu$, где $\Phi \subseteq P_k$, ν конечно. Ранее автор решил эту задачу в случае $k = 2$, а также показал, что для $[\Phi] = P_k$ существует алгоритм распознавания полноты систем $\Phi \cup \nu$.

В статье рассматривается случай, когда $[\Phi]$ является максимальным (предполным) классом в P_k. Показано, что если Φ вложим в класс Слупецкого, то проблема полноты систем $\Phi \cup \nu$ неразрешима, а если Φ содержит класс сохранения всех констант, то имеет место алгоритмическая разрешимость указанной задачи.

Тем самым, возникает возможность классификации базисов в $P_k, k \geqslant 3$ по их способности в качестве добавки в автоматный базис обеспечивать алгоритмическую разрешимость полноты.

Введение

Решение задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Здесь не применима классическая теория полноты, основанная на проверке вложимости тестируемой системы автоматов в максимальные классы, ввиду континуальности числа последних [1], а сама задача в общей постановке алгоритмически неразрешима [2].

Случаи алгоритмической разрешимости возникают при ограничении класса проверяемых систем. Первый пример такого рода был построен Летичевским А.А. [3]. В дальнейшем, автору удалось показать, что для систем автоматов над P_2, содержащих все булевы функции, задача о полноте алгоритмически разрешима [4]. Алгоритмическая разрешимость задачи полноты была получена и в классе линейных автоматов [5].

Решение задачи не упростилось при рассмотрении более слабого свойства аппроксимационной полноты (А-полноты), когда схема из базисных элементов заменяла автомат лишь до любого наперед заданного момента времени. Проверка А-полноты для произвольных систем автоматов алгоритмически неразрешима, но есть алгоритм ее проверки для систем автоматов, содержащих все булевы функции [6].

В этой ситуации академиком Кудрявцевым В.Б. было предложено использовать разрешимость автоматной полноты как инструмент для исследования базисов функций, а именно, исследовать на полноту (A-полноту) системы вида $\Phi \cup \nu$, где Φ — замкнутый класс функций из P_k (его конечный базис), а ν — конечная система автоматных функций. Автором был полностью исследован случай $k = 2$ и построена классификация базисов в P_2 по их способности гарантировать разрешимость полноты конечных систем автоматов. Оказалось, что это свойство для класса функций выполнено, точно тогда, когда в нем содержится функция $x \oplus y \oplus z$, либо функция $xy \cup xz \cup yz$ [10].

В этой статье указанная классификация продолжается на функции из $P_k, k > 2$, при этом уже на уровне максимальных (предполных) классов обнаружены противоположные случаи.

1. Основные результаты

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, функции $g\colon E_k^n \to E_k^m$ называются функциями k-значной логики, а их множество обозначается через P_k. Пусть
$$E_k^\infty = \{a(1)a(2)\ldots | a(j) \in E_k, j = 1, 2, \ldots\}$$
— множество всех сверхслов, а
$$E_k^\tau = \{a(1)a(2)\ldots a(\tau) | a(j) \in E_k, j = 1, 2, \ldots \tau\}$$
— множество всех слов длины τ. Пусть
$$f\colon (E_k^\infty)^n \to (E_k^\infty)^m$$

— автоматная функция (a-функция), то есть она задается рекуррентно соотношениями (1)

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием a-функции f, q_1 — ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\dots$ и $b(1)b(2)\dots$ — входным и выходным сверхсловами, соответственно. Класс всех a-функций обозначим через P. В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [9]:

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, \dots, x_n) & = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, \dots, x_n) & = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\ (\Omega f)(x_1, \dots, x_{n-1}) & = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ (\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) & = f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}) & = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}). \end{cases}$$

Операция обратной связи (о. с.), примененная к i-ой входной и j-ой выходной переменным a-функции $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, задает a-функцию

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m),$$

вычисляемую так. Считаем, что о. с. применима к f в состоянии q, если ψ_j в уравнении (1) фиктивно зависит от a_i при $q(t) = q$, а вычисление $b_s(t)$ осуществляется по схеме:

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \\ \qquad \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\ b_s(t) = \psi_s(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \\ \qquad \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\ s = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m. \end{cases}$$

Считаем, что о. с. применима к f, если она применима в начальном состоянии q_1, и из ее применимости в состоянии $q(t)$ следует применимость в состоянии $q(t+1)$.

Пусть $\nu \subseteq P$, обозначим через $[\nu]$ множество всех a-функций, получающихся из ν с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество ν называется полным, если $[\nu] = P$. Проблема полноты для P состоит в описании всех полных множеств ν.

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая автоматная функция, $f^\tau\colon (E_k^\tau)^n \to (E_k^\tau)^m$ — ограничение этой функции на множество слов длины τ. Скажем, что a-функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ τ-равны, если $f^\tau = g^\tau$. Обозначим через $[\nu]_\tau$ множество всех a-функций, τ-равных получающимся из ν с помощью операций суперпозиции и обратной связи, а через

$$[\nu]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} [\nu]_\tau.$$

Известно [6], что результат применения о. с. τ-равен τ применениям суперпозиции. Множество ν называется τ-полным, если $[\nu]_\tau = P$. Множество ν называется A-полным, если $[\nu]_\tau = P$ при всех τ. Проблема A-полноты для P состоит в описании всех A-полных множеств ν. Очевидно, что полное множество ν является A-полным.

Пусть $P^{(i)}$ — класс всех a-функций с не более, чем i состояниями, тогда

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P^{(i)}.$$

Известно [7], что

$$[P^{(2)}] = P, \qquad [P^{(1)}] = P^{(1)}.$$

A-функции из $P^{(1)}$ называются истинностными и мы будем отождествлять $P^{(1)}$ с множеством P_k функций k-значной логики, полагая

$$f(a(1)a(2)\ldots) = f(a(1))f(a(2))\ldots,$$

где $f\colon (E_k)^n \to (E_k)^m, f \in P_k$.

Множество функций $f\colon (E_k)^n \to E_k$, для которых выполнено одно из свойств: $n = 1$ или f не принимает всех значений из E_k, называется классом Слупецкого. Известно, что класс Слупецкого замкнут относительно суперпозиции, то есть результат применения суперпозиции к функциям из этого класса являются функцией из этого же класса [8]. Будем обозначать класс Слупецкого через $SLUP$.

Для $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ функция $f \in P_k$, такая что $f(l, l, \ldots, l) = l$ называется сохраняющей константу l, а множество всех таких функций — классом сохранения константы l, оно обозначается через U_l. Обозначим через

$$U = \bigcap_{i=0}^{k-1} U_l$$

класс сохранения всех констант. Известно, что классы $U, U_l, l = 1, 2, \ldots, k-1$ замкнуты относительно суперпозиции, то есть результат применения суперпозиции к функциям из этих классов являются функциями из этих же классов [8].

Функция

$$\mathbf{w}(x, y) = \max(x, y) + 1 \mid \mod k$$

называется функцией Вебба. Известно, что $P_k = [\{\mathbf{w}\}]$, то есть функция $\mathbf{w}$ образует полную систему в классе k-значных функций.

Автоматная функция $B\colon E_k^\infty \to E_k^\infty$, задаваемая уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = k-1, \\ q(t+1) = x(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

называется a-функцией задержки. Про нее известно [7], что

$$[\{B\} \cup \{\mathbf{w}\}] = P.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.*

Теорема 2. *Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.*

Теорема 3. *Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.*

Теорема 4. *Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.*

Замечание. Пусть $F_1 \subseteq F \subseteq P_k$. Если не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F \cup \nu$, то не существует и алгоритма, решающего вопрос о полноте (А-полноте) множества $F_1 \cup \nu$.

Из замечания следует, что достаточно доказать теоремы 1–4 только для случая $\Phi = SLUP, \Phi = U$.

Автор выражает благодарность академику Кудрявцеву В.Б. за постановку задачи и ценные указания.

2. Основные леммы и доказательство теорем

Тройка $T = \langle D, \rho, W\rangle$, где $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$, $\rho\colon D \to D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, W — натуральное число, называется системой однородных продукций Поста. Если $l \geqslant W$, то скажем, что T применима к слову

$$\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_l}$$

и назовем слово

$$\xi' = d_{i_{w+1}} \ldots d_{i_l} R_{i_1}$$

результатом применения T к слову ξ. Таким образом, у слова ξ «стираются» первые W букв и к нему приписывается слово R_{i_1}, которое соответствует букве d_{i_1}. Если $l < W$, то T не применима к слову ξ. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а ξ_{i+1} — результат применения T к слову ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, назовем последовательностью продукций слова ξ. Последовательность продукций слова ξ конечна, если последнее слово имеет длину меньшую W. В этом случае будем говорить, что при применении к слову ξ система T останавливается через конечное число шагов. Для каждой однородной системы продукций T можно поставить вопрос о разрешимости «проблемы остановки» этой системы: существует ли алгоритм A_T, который по любому наперед заданному слову ξ устанавливает, конечно или бесконечно множество T-продукций слова ξ, то есть останавливается ли T при применении к слову ξ, или нет.

Известно [9], что существует система однородных продукций Поста, для которой не существует алгоритма, по слову $\xi \in D^*$ решающего вопрос о конечности последовательности продукций слова ξ. Сформулируем этот факт в виде леммы [9].

Лемма 1. *Существует система однородных продукций Поста $T = \langle D, \rho, W \rangle$, для которой не существует алгоритма, решающего проблему остановки.*

Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел с нулем. Зафиксируем систему продукций Поста $T = \langle D, \rho, W \rangle$ с неразрешимой проблемой конечности последовательности продукций, и пусть $|D| = r$.

Пусть $\widetilde{R}$ — множество сверхслов α таких, что

$$\{\alpha(t+1), \alpha(t+2), \ldots \alpha(t+k)\} \neq E_k \text{ при всех } \quad t \geqslant t_\alpha.$$

Обозначим $w, v \in E_k^k$ через

$$w = 01\ldots(k-1), \quad v = (k-1)(k-2)\ldots 0.$$

Пусть сверхслова таковы:

$$w^\infty = ww\ldots, \quad 1^\infty = 11\ldots, \quad 0^\infty = 00\ldots$$

Функции таковы:

$$u\colon E_k^\infty \to E_k^\infty \qquad u_i\colon E_k^\infty \to E_k^\infty$$
$$u(a\alpha) = aw^\infty, \quad u_i(a\alpha) = iw^\infty, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, a \in E_k, \alpha \in E_k^\infty.$$

Через $\alpha]_t$ обозначим начало длины t сверхслова $\alpha \in E_k^\infty$, через $|\alpha'|$ — длину слова α'. Каждому элементу $d_i \in D$ поставим в соответствие слово

$$\widetilde{d_i} = v^i w v^{r-i}, \qquad \widetilde{d_i} \in E_k^{k(r+1)}$$

Для $\xi = d_{i_1} \dots d_{i_s}$ обозначим $\widetilde{\xi} = \widetilde{d_{i_1}} \dots \widetilde{d_{i_s}}$.

Для $\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in E_k^\infty$, определим числовую функцию

$$c(\alpha, \beta) = \max_{\alpha]_t = \beta]_t} t.$$

Пусть

$$M_i^1 = \left\{ w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} w^\infty \mid n, l \in \mathbb{N}_0,\ j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, r\} \right\}$$
$$M_i^2 = \left\{ w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \tilde{d}_{j_2} \dots \mid n \in \mathbb{N}_0,\ j_1, j_2, \dots \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

Для $\alpha \notin M_i^1 \cup M_i^2$ определим $c_i \colon E_k^\infty \to \mathbb{N}$, полагая

$$c_i(\alpha) = \max_{\beta \in M_i^1 \cup M_i^2} c(\alpha, \beta).$$

Пусть

$$\Delta = w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} w^\infty, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Определим a-функции

$$f_i \colon E_k^\infty \to E_k^\infty, \qquad i = 1, \dots, r,$$

соотношениями $(a), (b), (c), (d)$.

(a) $f_i(a\Delta) = aw^{n+Wk(r+1)} \tilde{d}_{j_w} \dots \tilde{d}_{j_l} \widetilde{R_i} w^\infty$ при $l > W - 1$

(b) $f_i(a\Delta) = aw^{n+Wk(r+1)} \tilde{R}_i w^\infty$ при $l = W - 1$,

(c) $f_i(a\Delta) = aw^\infty$ при $l < W - 1$,

(d) $f_i(a\beta) = a\beta' bb \dots$ при $\beta \notin M_i^1 \cup M_i^2$, где $|\beta'| = c_i(\beta) - 1, b \in E_k$.

Определим a-функции

$$f_i' \colon E_k^\infty \to E_k^\infty, \qquad i = 1, \dots, r,$$

соотношениями $(a), (b), (c'), (d)$.

(c$'$) $f_i'(a\Delta) = aw^{n+lk(r+1)} 11 \dots$ при $l < W - 1$.

Определим a-функции G, E, I, f_ξ, для $\alpha, \beta, \gamma \in E_k^\infty$, $a, b \in E_k$, следующим образом:

$$G(\alpha, a\gamma) = \begin{cases} a(k-1)(k-1)\ldots & \text{при } a \neq k-1, \\ B(\alpha) & \text{при } a = k-1,\ \gamma = w^\infty, \\ (k-1)\alpha' bb\ldots & \text{при } a = k-1,\ \gamma \neq w^\infty, \\ & |\alpha'| = c(\gamma, w^\infty) - 1 \end{cases}$$

$$E(\alpha, \beta, a\gamma) = \begin{cases} a\ \alpha(2)\oplus\beta(2)\ \alpha(3)\oplus\beta(3)\ldots\ \text{при } \gamma = w^\infty, \\ a\alpha' bb\ldots\ \text{при } \gamma \neq w^\infty, |\alpha'| = c(\gamma, w^\infty) - 1 \end{cases}$$

$$I(\alpha, \beta) = \alpha(1)\oplus\beta(1)\ 11\ldots, \quad f_\xi(a\alpha) = a\bar{\xi}w^\infty.$$

Через

$$\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2$$

обозначим двухместные функции из P_k, не принимающие всех значений из E_k, а через

$$\hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1$$

обозначим одноместные функции из P_k, принимающие все значения, соответственно. Нетрудно убедиться, что функции

$\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2,\ \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1$

порождают класс Слупецкого, в котором также лежат все константные функции.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2. *Система*

$$\Sigma = \{\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f_1, \ldots, f_r, f_\xi, G\}$$

полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 3. *Система*

$$\Sigma' = \{\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f'_1, \ldots, f'_r, f_\xi, G\}$$

A-полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Доказательство теорем 1 и 2 следует из лемм 2 и 3, соответственно.

Известны теоремы:

Теорема 5. [4] *Существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subset P$ решающий, верно ли, что $[P_k \cup \nu] = P$.*

Теорема 6. [6] *Существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subset P$ решающий, верно ли, что $[P_k \cup \nu]_A = P$.*

Теоремы 3 и 4 будут доказаны сведением к теоремам 5 и 6. Для этого необходимо указать алгоритм определения выразимости константных истинностных функций через a-функции из ν и U.

Для доказательства теорем 3, 4 понадобятся определения. Для натуральных D, N автоматную функцию с уравнениями (1), где $m = D + N + k, n = 0, Q = \{1, \ldots, D+N\}$ и для любых $i \in Q, a \in {E_k}^n$ выполнено

$$\psi(i,a) = ((i, i\oplus 1, \ldots, i \oplus (k-1)), (0, 0, \ldots, 0, \overset{\ldots i \ldots}{1}, 0, \ldots, 0))$$

$$\phi(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{при } i < D+N, \\ D+1 & \text{при } i = D+N, \end{cases}$$

назовем (D, N)-счетчиком и обозначим через $B_{D,N}$. Здесь $\oplus$ обозначает сложение по модулю k.

Заметим, что счетчик $B_{D,N}$ выдает всегда одну и ту же последовательность с периодом N и предпериодом D. Кроме того, в моменты не сравнимые по модулю N, функция $B_{D,N}$ выдает разные буквы и в каждый момент времени не сохраняет никаких констант. Множество всех счетчиков обозначим через K.

При доказательстве теорем 3, 4, без ограничения общности, будем исследовать на полноту системы вида $\{f\} \cup U$, где f задается уравнениями (1). Для a-функции f с уравнениями (1) и $D \leqslant s$ последовательность (2),

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \ldots, (a(s), b(s)), \tag{2}$$

где

$$a(1),\dots,a(s)\in {E_k}^n; q(1),\dots,q(s)\in Q;$$
$$b(1),\dots,b(s)\in {E_k}^m; b(i)=\psi(q(i),a(i));$$
$$q(t+1)=\phi(q(i),a(i)); i=1,\dots,s; q(1)=q_1,$$

назовем (s)-экспериментом с a-функцией f. Если же еще выполнено

$$q(D+1)=\phi(q(s),a(s)),$$

то назовем ее (D,s)-экспериментом с a-функцией f.

Пусть i,j натуральные числа, $1\leqslant i,j\leqslant s, j\neq i$, скажем, что a-функция f является (j,i)-зависимой на (D,s)-экспериментах ((s)-экспериментах), если для *каждой* последовательности (2) выполнено соотношение (3),

$$\psi(q(j),a(i))=b(i). \tag{3}$$

Скажем, что a-функция f сохраняет константу $l\in\{0,\dots,k-1\}$ в j-тый момент, на (D,s)-экспериментах ((s)-экспериментах), если на *каждой* последовательности (2) выполнено

$$\psi(q(j),(l,l,\dots,l))=(l,l,\dots,l).$$

Скажем, что a-функция f имитирует счетчик $B_{D,N}$ на циклических экспериментах, если для некоторого $s=D+pN$ и любых $1\leqslant i,j\leqslant s, i\neq j| \mod N$, a-функция f не является (j,i)-зависимой и не сохраняет константу $l\in\{0,\dots,k-1\}$ в j-тый момент на (D,s)-экспериментах при всех l и j.

Скажем, что a-функция f имитирует счетчик $B_{D,N}$ на простых экспериментах, если для некоторого $s=D+N$ и любых $i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant s$ a-функция f не является (j,i)-зависимой и не сохраняет константу $l\in\{0,\dots,k-1\}$ в j-тый момент на (s)-экспериментах при всех l и j.

Имеют место леммы:

Лемма 4. *Имеет место включение* $[\{f\}\cup U]\supseteq K$ *точно тогда, когда для любых натуральных* D,N f *имитирует счетчик* $B_{D,N}$ *на циклических экспериментах.*

Лемма 5. *Свойство функции f для любых натуральных D, N имитировать счетчик $B_{D,N}$ на циклических экспериментах алгоритмически проверяемо.*

Лемма 6. *Имеет место включение $[\{f\} \cup U]_A \supseteq K$ точно тогда, когда для любого натурального s f имитирует счетчик $B_{0,s}$ на простых экспериментах.*

Лемма 7. *Свойство функции f для любого натурального s имитировать счетчик $B_{0,s}$ на простых экспериментах алгоритмически проверяемо.*

Доказательство теорем 3 и 4 следует из теорем 5 и 6, лемм 4, 5, 6, 7 и того факта, что $[K \cup U] \supseteq P_k$.

3. Доказательство лемм 2 и 3

Пусть S — схема над множеством a-функций Σ. Правым путем в схеме S назовем такую последовательность элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ схемы S, что выход a-функции g_1 совпадает с выходом схемы, а выходы a-функций g_{i+1} для многоместных g_i соединены с правым входом g_i, а для одноместных g_i с их единственным входом. Элемент g_n называется начальным элементом пути.

Утверждение 1. *Пусть некоторая схема S над системой Σ реализует константную a-функцию с выходным сверхсловом $(k-1)ww\alpha$, тогда в схеме S существует правый путь с начальным элементом $g \in \{I,\ \hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2\}$.*

Доказательство. Пусть схема S_1 над Σ получается из схемы S заменой a-функций на функции их начальных состояний. S_1 реализует константу $k-1$ и состоит из функций начальных состояний системы

$$\Sigma = \{\hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\},$$

которые таковы

$\{\hat{g}_i(x,y), i=1,\ldots,m_2, \hat{h}_i(x), i=1,\ldots,m_1, x \bigoplus y, z, x\ldots x, y\}$, соответственно.

Представим схему S_1 в виде, приведенном на рис. 1. Пусть g_1 — элемент схемы S_1, выход которого совпадает с выходом схемы, и пусть $g_1 \notin \{I, \hat{g}_i(x,y), i=1,\ldots,m_2\}$. Тогда выходная функция его начального состояния взаимнооднозначна, а значит схема S_2 имеет фиктивный вход y (который можно отбросить), а на выходе x_3 реализуется константа. Продолжая эту процедуру, мы получим искомый путь.

Утверждение доказано.

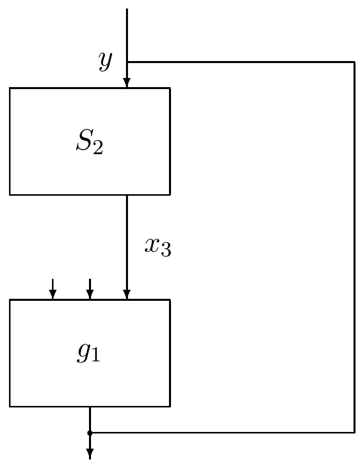

Рис. 1.

Доказательство леммы 2. Достаточность. Пусть последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, первая буква слова ξ_j есть d_{ij} и длина слова ξ_s меньше W, тогда

$$u(x) = f_{i_s}\left(f_{i_{s-1}}(\ldots f_{i_1}(f_\xi(x))\ldots)\right), u(k-1) = u_{k-1}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$E_(x, y, u(I(x,y))) = x \oplus y, \qquad G(x, u_{k-1}) = B(x).$$

Существенная функция $x \oplus y$ вместе с функциями класса Слупецкого [8] порождает полную в P_k систему истинностных функций. Значит, система Σ полна.

Необходимость. Пусть система Σ полна и некоторой схемой S над Σ выразима константная a-функция с выходным сверхсловом $(k-1)w^\infty$. Из утверждения получаем, что в схеме S существует правый путь $g_1, \dots, g_n$ с начальным элементом $g_n \in \{I,\ \hat{g}_i(x,y), i = 1, \dots, m_2\}$. Среди $g_1, \dots, g_{n-1}$ найдется элемент типа f_ξ, в противном случае схема S будет выдавать сверхслово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Пусть g_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \dots d_{j_l}$. Тогда либо $\hat{g}_{i_0-1}$, — взаимнооднозначная одноместная функция, либо g_{i_0-1} — элемент типа f_i. В других случаях схема S обязана выдавать слово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Просмотрев таким образом всю цепочку $g_{i_0}, \dots, g_1$, получим, что последовательность $g_n, \dots, g_1$ содержит конечную подпоследовательность $f_\xi, f_i, \dots, f_{i_s}$, соответствующую конечной последовательности продукций слова ξ.

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Достаточность. Пусть последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ продукций слова ξ бесконечна, первая буква слова ξ_j есть d_{ij}. Тогда для любого τ на всех словах δ длины τ $u(\delta)$ совпадает с

$$f'_{i_\tau}\left(f'_{i_{\tau-1}}(\dots f'_{i_1}(f_\xi(\delta))\dots)\right),$$

и $u((k-1)\delta)$ совпадает с $u_{k-1}(a\delta)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$E_(x, y, u(I(x,y))) = x \oplus y, \qquad G(x, u_{k-1}) = B(x).$$

Существенная функция $x \oplus y$ вместе с функциями класса Слупецкого порождает полную в P_k систему истинностных функций. Значит, система Σ' τ-полна при всех τ, то есть она А-полна.

Необходимость. Пусть от противного система Σ' А-полна и при этом система продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Выберем $\tau = Wks(r+1) + k + 1$ и рассмотрим все a-функции из Σ' на словах длины τ.

Пусть схема S над Σ' реализует константную a-функцию с выходным сверхсловом $(k-1)w^\infty]_\tau$. Из утверждения получаем, что в схеме S существует правый путь $g_1, \dots, g_n$ с начальным элементом

$g_n \in \{I,\ \hat{g}_i(x,y), i = 1,\dots,m_2\}$. Обозначим через A_τ множество слов α длины τ таких, что

$$\{\alpha(\tau-(k-1)), \alpha(\tau-(k-2)), \dots, \alpha(\tau)\} \neq E_k$$

В словах из A_τ последние k букв неразнозначны.

Среди $g_1,\dots,g_{n-1}$ найдется элемент типа f_ξ, в противном случае схема S будет выдавать сверхслово из A_τ, что противоречиво. В самом деле: начальный элемент пути $g_n \in \{I,\ \hat{g}_i(x,y), i = 1,\dots,m_2\}$ всегда выдает слова из A_τ, однозначные функции не выводят их из A_τ, по определению функций E, G, f'_i нарушение разнозначности на (правом) входе в кортеже из последних τ букв приводит к выдаче одной и той же буквы с предыдущего такта.

Пусть g_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \dots d_{j_l}$. Тогда либо g_{i_0-1}, — взаимнооднозначная одноместная функция, либо g_{i_0-1} — элемент f_i. В других случаях схема S обязана выдавать слово из A_τ, что противоречиво. Просмотрев таким образом всю цепочку $g_{i_0},\dots,g_1$, получим, что последовательность $g_n,\dots,g_1$ обязана содержать конечную подпоследовательность $f_\xi, f_i, \dots, f_{i_s}$, соответствующую конечной последовательности продукций слова ξ. Значит по соотношению $c')$ на выходе f_{i_s} все-таки получится слово из A_τ, что противоречиво. Значит предположение об A-полноте и одновременной конечности продукций слова ξ неверно.

Лемма доказана.

4. Доказательство лемм 4–7

Доказательство леммы 4. Необходимость. Пусть через a-функции из $\{f\} \cup U$, выражена a-функция g, равная $B_{D,N}$. Это значит, что найдутся натуральные $p, D, s = D + pN$ такие, что a-функция g не является (j,i)-зависимой при всех $i \neq j (\mod N)$ и не сохраняет констант в j-тый момент при всех j. Зафиксируем для определенности $i < j$.

Если a-функция g получилась операцией обратной связи последнего выхода с последним входом из a-функции $\tilde{g}$, то $\tilde{g}$ также не будет (j,i)-зависимой.

В самом деле: пусть при этом эксперимент (2) a-функции g нарушает (j,i)-зависимость и получился из эксперимента (4), который ее сохранял.

$$((a(1),e(1)),(b(1),e(1))),\ldots,((a(s),e(s)),(b(s),e(s))). \tag{4}$$

Это означает, что $b=\psi(q(j),a(i))\neq b(i)$. Пусть входная буква $a(i)$ в диаграмме g в состоянии $q(j)$ получилась из входной буквы $(a(i),e)$ в диаграмме $\tilde{g}$ в состоянии $q(j)$. Тогда имеем

$$\psi_{\tilde{g}}(q(j),(a(i),e))=(b,e),\psi_{\tilde{g}}(q(j),(a(i),e(i)))=(b',e').$$

По правилу применимости о.с. имеем $e=e'$, если есть сохранение (j,i)-зависимости для $\tilde{g}$, то $e'=e(i)$, откуда следует $b'=b=b(i)$, а это означает сохранение (j,i)-зависимости для g, что противоречиво.

Если $\psi_{\tilde{g}}$ в некотором состоянии сохраняла константу l, то подача обратной связи на несущественный для нее вход не может изменить этого свойства.

Пусть теперь g получилась суперпозицией a-функций g_1 и g_2, и эксперимент (2) получился из экспериментов

$$(a(1),c(1)),\ldots,(a(s),c(s)), \qquad (c(1),b(1)),\ldots,(c(s),b(s)),$$

a-функций g_1 и g_2, соответственно. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют (j,i)-зависимость, то получим, что g также сохраняет (j,i)-зависимость. Значит, хотя бы одна из a-функций g_1 или g_2 не сохраняет (j,i)-зависимость на (D,s)-экспериментах. Очевидно, что не сохраняющая константу функция не может быть получена суперпозицией функций эту константу сохраняющих.

Заметим, что всякая истинностная a-функция сохраняет все (j,i)-зависимости на всех (D,s)-экспериментах. Повторяя эти рассуждения, мы получим, что сама базисная a-функция f не должна сохранять (j,i)-зависимость на (D,s)-экспериментах при $i\neq j(\mod N)$, и не должна сохранять констант во все моменты. Значит, f имитирует счетчик $B_{D,N}$, при всех натуральных D,N на своих циклических экспериментах.

Необходимость доказана.

Доказательство леммы 4. Достаточность. Для фиксированных $N, D, k, s = D+kN$ и некоторого j рассмотрим множество всех (D, s)-экспериментов P с a-функцией f, имитирующей счетчик $B_{D,N}$. Пусть $|P| = t$ и g_j — параллельное соединение t копий a-функции f. Пусть g_j описывается уравнениями (1) и $\alpha_l \in P$ l-тый эксперимент из P

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1)), (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), \ldots, (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)), \quad l = 1, 2, \ldots, t,$$
$$a(i) = (a^{(1)}(i), \ldots, (a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i), \ldots, (b^{(t)}(i)), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Можно считать, что среди $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(s)$ нет равных и нет наборов вида $(l, l, \ldots, l)$ (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(s)$ попарно не равными). Рассмотрим (D, s)-эксперимент (2) с a-функцией g_j. Для $a \in {E_k}^n$ определим функцию $h_j \in U$

$$h_j \colon E_k^{m+n} \to E_k^n$$
$$h_j(x, y) = \begin{cases} a(i) & \text{для } x = a(i),\ y = b(i), i = 1, \ldots, s \\ a(j) & \text{для } x \in {E_k}^n,\ y = \psi(q(j), x). \end{cases}$$

Это можно сделать ввиду отсутствия (j, i)-зависимостей и не сохранения констант. В состоянии $q(j)$ выходная функция a-функции $f_j(x) = h_j(x, q_j(x))$ принимает значение $a(j)$ для всех входных букв, то есть является константой. Рассмотрим a-функцию

$$F_{N,D,k}(x) = f_s(\ldots f_2(f_1(x)) \ldots)$$

с начальным состоянием $(q(1), q(1), \ldots q(1))$ она имеет n входов и n выходов. В состоянии $(q(j), q(j), \ldots q(j))$ реализуется константа $a(j)$. После n применений операции обратной связи от соответствующих выходов к соответствующим входам получится a-функция, с точностью до перекодировки функциями из U, равная $B_{D,N}$.

Достаточность доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть ${Q_p}^T \subseteq Q$ — множество состояний a-функции f, достижимых из состояния p за T тактов, а R_L — множество состояний, из которых достижимо состояние L.

$$Q^T_{p,L} = {Q_p}^T \cap R_L,$$

тогда
$$Q_{p,L}^{T+1} = \{\phi(p,a) | a \in {E_k}^m, p \in Q_{p,L}^T\} \cap R_L.$$
Последовательность $Q_{p,L}^T, T = 1, 2, \ldots$, будет детерминированной, а, значит, и периодической.

Выберем период и предпериод этой последовательности равный, для простоты, одному и тому же числу ρ при всех $p, L \in Q$. Очевидна грубая оценка
$$\rho \leqslant (k^{|Q|}!).$$
Получилось что, для любых $p, L \in Q$, и любого натурального T выполнено
$$Q_{p,L}^T = Q_{p,L}^{T+\rho}.$$
Возьмем, к примеру, такой случай расположения чисел
$$D < D + \rho < i < i + \rho < j < s - \rho < s.$$
Если для (D, s)-экспериментов выполнена (j, i)-зависимость, то для (D_1, s_1)-экспериментов, будет выполнена (j_1, i_1)-зависимость, где
$$D_1 < D_1 + \rho < i_1 < D + 2\rho < j_1 < s_1 < j_1 + \rho,$$
$D_1, D; i_1, i; j_1, j; s_1, s$ попарно совпадают по модулю ρ. Это следует из того, что для каждого $p \in Q_{q_1,p}^D$ имеем $Q_{q_1,p}^D = Q_{q_1,p}^{D_1}$ и $Q_{p,p}^i = Q_{p,p}^{i_1}$; для каждого $r \in Q_{p,p}^{i-D}$ имеем $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i_1}$; для каждого $l \in Q_{r,p}^{j-i}$ имеем $Q_{l,p}^{s-j} = Q_{l,p}^{s_1-j_1}$.

В случае другого расположения чисел D, j, i мы таким же способом сократим интервалы между числами $1, D, j, i$. Следовательно, наличие или отсутствие (j, i)-зависимости на (D, s)-экспериментах (а также сохранение констант) равносильно, соответственно, наличию или отсутствию (j_1, i_1)-зависимости (а также сохранению констант) на (D_1, s_1)-экспериментах при $D_1 \leqslant s_1 \leqslant 5\rho$. Последний факт проверяется перебором всех (D_1, s_1)-экспериментов.

Лемма 5 доказана.

Леммы 6 и 7 доказывается аналогично леммам 4 и 5, соответственно.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. Т. 151. №3. 1963. С. 493–496.

[2] Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155. №1. С. 35–37.

[3] Летичевский А.А. Условия полноты для конечных автоматов // Вычислительная математика и математическая физика. №4. 1961. С. 702–710.

[4] Бабин Д.Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. М.: Наука, 1992. Том 4. Вып. 4. С. 41–56.

[5] Часовских А.А. О полноте в классе линейных автоматов // Математическме вопросы кибернетики. 1995. №3. С. 140–166.

[6] Буевич В.А. Условия А-полноты для автоматов. М.: МГУ, 1986.

[7] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[8] Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

[9] Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

[10] Бабин Д.Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Доклады Академии наук. №4. Т. 367. 1999. С. 439–441