# Простое доказательство обходимости плоских лабиринтов коллективом автоматов*

Е.Г. Сыркина

В работе приводится простое доказательство обходимости семейства всех конечных плоских шахматных лабиринтов конечным коллективом автоматов. Известные доказательства существенно сложнее приводимого.

## Введение

Задача обхода лабиринтов автоматами восходит к К. Шеннону [1]. Л. Будахом и А.С. Подколзиным установлено, что один автомат не может обойти семейство всех плоских лабиринтов [2, 4]. В то же время, М. Блюм и Д. Козен установили, что коллектив автоматов уже в состоянии решить эту задачу. Однако имеющиеся на сегодня обоснования этого факта выглядят громоздко [3]. Целью этой работы является предложение простого доказательства указанного факта. Рассматривается коллектив из одного автомата и шести камней и конструктивно показывается, что он обходит любой заданный конечный плоский шахматный лабиринт. Подробнее о достижениях и проблемах, связанных с поведением систем автоматов в лабиринтах, можно найти в работе [5].

Автор выражает благодарность В.Б. Кудрявцеву за постановку задачи и научное руководство, а также А.В. Галатенко за помощь в работе.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02–01–00162а.

## 1. Основные понятия и результаты

Элементы целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ будем называть *полями*. Обозначим

$$\vec{0} = (0,0), \quad e = (1,0), \quad s = (0,-1), \quad w = (-1,0), \quad n = (0,1),$$

$$\theta = \{a \in \mathbb{Z}^2 \mid \|a\| \leqslant 1\} = \{\vec{0}, e, s, w, n\},$$

$$\theta' = \{a \in \mathbb{Z}^2 \mid \|a\| < 2\} = \{\vec{0}, e, s, w, n, e+s, e+n, w+s, w+n\}.$$

Для произвольного множества $M \subseteq \mathbb{Z}^2$, содержащего нулевой элемент $\vec{0}$, через $\mathcal{P}_0(M)$ обозначим множество всех его подмножеств, содержащих нулевой элемент.

Поля $a$ и $b$ из $\mathbb{Z}^2$ называются *соседними* (*слабо соседними*), если $\|a-b\| = 1$ $(0 < \|a-b\| < 2)$.

Говорят, что поля $a = p_0, p_1, \ldots, p_m = b$ при $m \geqslant 1$ образуют *цепь* (*слабую цепь*), связывающую $a$ и $b$, если $p_{i-1}$ и $p_i$ соседние (слабо соседние) для $\forall i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ называется *связным* (*слабо связным*), если для $\forall a, b \in V$ существует связывающая их цепь (слабая цепь) или $a = b$.

Граф (неориентированный) $G = (P_G, X_G)$, в котором $P_G$ — множество всех его вершин, $X_G$ — множество всех его ребер, будем называть *плоским шахматным лабиринтом*, если $P_G \subseteq \mathbb{Z}^2$ является конечным связным множеством и любые две его вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они соседние.

*Дырой* лабиринта $G$ называется произвольная компонента слабой связности множества $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Ограниченные дыры будем называть внутренними, а неограниченную дыру — внешней (в конечном лабиринте она одна).

*Граница дыры* $V$ лабиринта — это множество полей из $P_G$, слабо соседних хотя бы с одним полем из $V$. Обозначение: $\partial_G V = \partial V$.

*Пешкой* будем называть любой инициальный конечный автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi_{\mathfrak{A}}, \psi_{\mathfrak{A}}, q_0)$ такой, что $A = \mathcal{P}_0(\theta)$ — входной алфавит, $Q$ — множество состояний, $B = \theta$ — выходной алфавит, $\varphi_{\mathfrak{A}} : A \times Q \to Q$ — функция переходов состояния, $\psi_{\mathfrak{A}} : A \times Q \to B$ — функция выходов.

Предположим, пешка $\mathfrak{A}$ находится на поле $z$ лабиринта $G$, то есть $z \in P_G$. Тогда в качестве входной буквы эта пешка $\mathfrak{A}$ получает множество всех векторов $\omega \in \theta$, переместившись на которые из поля $z$, она снова окажется в лабиринте $G$, то есть $z + \omega \in P_G$. Таким образом, всякий раз, когда пешка находится на поле $z \in P_G$, она получает на вход множество $\{\omega \in \theta \mid z + \omega \in P_G\}$, обозначаемое далее $\theta_G(z)$. Выходной алфавит $B = \theta$ интерпретируется как множество всех векторов возможных перемещений из $\mathbb{Z}^2$. Иногда в качестве $A$ берут $\mathcal{P}_0(\theta')$, расширяя тем самым обзор пешки до $\theta'$.

Пешка называется *регулярной*, если для $\forall a \in A$ и $\forall q \in Q$ имеет место $\psi_{\mathfrak{A}}(a, q) \in a$. Регулярность пешки означает, что она, будучи помещенной на любое поле произвольного лабиринта, не выходит за его пределы. Далее будем рассматривать только регулярные пешки.

*Поведением пешки* $\mathfrak{A}$ *в лабиринте* $G$ *с началом в* $p_0 \in P_G$ называется последовательность четвёрок $(z_t, a_t, q_t, b_t)_{t=0}^{\infty}$, определяемая индукцией по $t \geqslant 0$:

$z_0 = p_0, \quad a_t = \theta_G(z_t), \quad q_{t+1} = \varphi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t),$

$b_t = \psi_{\mathfrak{A}}(q_t, a_t), \quad z_{t+1} = z_t + b_t.$

Если множество полей $\bigcup\limits_{t=0}^{\infty}\{z_t\}$, где побывала пешка $\mathfrak{A}$, стартуя с поля $p_0$, совпадает с $P_G$, то говорят, что $\mathfrak{A}$ *обходит лабиринт* $G$ *с началом в* $p_0$. Пешка *слабо обходит* лабиринт, если она обходит его хотя бы с одним началом, и *сильно обходит*, если она обходит его с любым началом из $P_G$. Возможность остановки пешки означает существование такого $n$, что $(z_n, q_n, a_n, b_n) = (z_{n+k}, q_{n+k}, a_{n+k}, b_{n+k})$ для $\forall k \in \mathbb{N}$. В этом случае $q_n$ называем конечным состоянием.

В лабиринте можно также рассмотреть систему взаимодействующих пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ (частный случай коллектива автоматов). Каждой пешке $\mathfrak{A}_i$ на вход, кроме множества всех векторов перемещений из $\theta$, которые она может сделать, не покидая лабиринта, подаётся ещё и информация о наличии на полях, куда она может попасть, делая эти перемещения, других пешек системы $\mathcal{A}$ и их состояниях. Дадим точное определение. Пусть $I = \{1, \ldots, n\}$. Тогда *системой взаимодействующих пешек* будем называть любую систему пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = (\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ такую, что каждая $i$-тая пешка $(i \in I)$ имеет вид $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_0^i)$, где $B_i = \theta$ — выходной

алфавит пешки $\mathfrak{A}_i$, $A_i$ — входной алфавит пешки $\mathfrak{A}_i$, состоящий, по определению, из всех упорядоченных пар $(\Omega, F)$, удовлетворяющих следующим трём условиям:
1) $\vec{0} \in \Omega \subseteq \theta$,
2) $F \subseteq \{(j, \omega, q) \mid j \in I \setminus \{i\}, \omega \in \Omega, q \in Q_j\} = \bigcup\limits_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times \Omega \times Q_j)$,
3) для $\forall j, \omega', q', \omega'', q''$ из того, что $(j, \omega', q')$ и $(j, \omega'', q'') \in F$ следует, что $\omega' = \omega''$ и $q' = q''$.
*Регулярность пешки* $\mathfrak{A}_i$ *из системы* $\mathcal{A}$ определяется условием: для $\forall (\Omega, F) \in A_i$ и $\forall q \in Q_i$ имеет место $\psi_i((\Omega, F), q) \in \Omega$.

*Поведением системы* $\mathcal{A}$ *в лабиринте* $G$ *с началом в* $p_0 \in P_G$ называется последовательность $((z_t^1, \ldots, z_t^n), (a_t^1, \ldots, a_t^n), (q_t^1, \ldots, q_t^n), (b_t^1, \ldots, b_t^n))_{t=0}^{\infty}$, определяемая индукцией по $t \geqslant 0$. Для всех $i \in I$ полагаем:

$$z_0^i = p_0,$$
$$a_t^i = (\theta_G(z_t^i), \{(j, z_t^j - z_t^i, q_t^j) \mid j \in I \setminus \{i\}, z_t^j - z_t^i \in \theta_G(z_t^i)\}) =$$
$$= (\theta_G(z_t^i), \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (\{j\} \times (\{z_t^j - z_t^i\} \cap \theta_G(z_t^i)) \times \{q_t^j\})),$$
$$q_{t+1}^i = \varphi_i(a_t^i, q_t^i), \quad b_t^i = \psi_i(a_t^i, q_t^i), \quad z_{t+1}^i = z_t^i + b_t^i.$$

Если $\bigcup\limits_{t=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i \in I} \{z_i^j\}) = P_G$, то говорят, что *система* $\mathcal{A}$ *обходит лабиринт* $G$ *с началом в* $p_0$; если последнее имеет место для любого $p_0 \in P_G$, то система $\mathcal{A}$ *сильно обходит* $G$.

Пусть в $J$ есть непустое подмножество множества номеров $I$, такое что $J \neq I$. Подсистему $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$ системы взаимодействующих пешек $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ будем называть *камнями в системе* $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$, если для любого номера $j$ из $J$ выполняются следующие условия:
1) $Q_j = \{q_0^j\}$, то есть $\mathfrak{A}_j$ имеет только одно состояние;
2) для $\forall (\Omega, F) \in A_j$ из условия $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) \neq \vec{0}$ следует, что $\exists i \in I \setminus J$ и $\exists q \in Q_i$, такое что $(i, \vec{0}, q) \in F$ и $\psi_j((\Omega, F), q_0^j) = \psi_i((\Omega, (F \setminus \{(i, \vec{0}, q)\}) \cup \{(j, \vec{0}, q_0^j)\}), q)$. Это означает, что пешка $\mathfrak{A}_j$ может передвигаться (в ненулевом направлении), только если с ней на одном поле находится ещё одна пешка $\mathfrak{A}_i$ (не из подсистемы $(\mathfrak{A}_j)_{j \in J}$), причём $\mathfrak{A}_j$ может переместиться только на то же поле, что и $\mathfrak{A}_i$.
Для пешек, которые не являются камнями, камни играют роль ограниченной внешней памяти.

**Теорема 1.** *Существует коллектив, состоящий из одной пешки и шести камней (коллектив типа (1,6)), который сильно обходит (то есть обходит, стартуя с любого поля) произвольный плоский шахматный лабиринт и останавливается после обхода.*

## 2. Вспомогательные утверждения

**Лемма 1.** *[3] Существует пешка $\mathfrak{A}^+$ (соответственно, $\mathfrak{A}^-$) с 4 состояниями, которая, находясь на границе $\partial V$ дыры $V$ лабиринта $G$, последовательно обходит все поля $\partial V$ в направлении против часовой стрелки (соответственно, по часовой стрелке), то есть поля лабиринта при обходе остаются справа (соответственно, слева).*

**Доказательство.** Для определённости рассмотрим случай $\mathfrak{A}^+$.

Пусть $Q = \{q_e, q_s, q_w, q_n\}$, и состояние у $\mathfrak{A}^+$ меняется так: если пешка сделала шаг в направлении $\omega$, то она переходит в состояние $q_\omega$.

Обозначим через $\pi$ циклическую перестановку $(e, s, w, n)$, через $-\omega$ — направление, противоположенное $\omega$. Пусть пешка находится в состоянии $q_\omega$, $d_0$ — минимальное из всех натуральных $d$, таких что в направлении $\pi^d(-\omega)$ находится поле из $P_G$. Тогда пешка идёт в направлении $\pi^{d_0}(-\omega)$ и переходит в состояние $q_{\pi^{d_0}(-\omega)}$. Осталось выбрать начальное состояние $q_0$.

Предположим, в начальный момент времени пешка находится на поле $a \in \partial V$. Если в направлении $\omega \in \theta, \omega \neq \vec{0}$ находится поле из $V$ ($a+\omega \in V$), то за $q_0$ можно взять $q_{\pi(\omega)}$. Если среди полей соседних с $a$ нет полей из $V$, но есть поле из $V$, слабо соседнее с $a$ ($a+\omega+\pi(\omega) \in V$), то обзора $\theta$ недостаточно для определения $q_0$, и его расширяют до $\theta'$, что в нашем случае не достижимо, и тогда полагаем $q_0 = q_{-\omega}$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Существует коллектив типа (1,6), такой что если он оказался на границе $\partial V$ какой-либо дыры $V$ лабиринта $G$, и в направлении $n$ оказалось поле из $V$, то этот коллектив распознаёт (то есть находит и останавливается) ближайшее сверху (не строго) поле на $\partial V$, находящееся на той же вертикали.*

**Доказательство.** Обозначим через $p_0$ поле на $\partial V$, на котором в начальный момент времени находится коллектив пешек $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6)$, где $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6$ — камни в коллективе; через $l_\omega(z, z')$ — число шагов, сделанных пешкой $\mathfrak{A}^+$ в направлении $\omega$ при однократном прохождении части границы $\partial V$ от $z \in \partial V$ до $z' \in \partial V$. Фиксируем на поле $p_0$ камень $\mathfrak{B}_1$.

Нам надо найти поле $z^*$ на $\partial V$, такое что $l_w(p_0, z^*) - l_e(p_0, z^*) = 0$, $0 \leqslant l_n(p_0, z^*) - l_s(p_0, z^*) \leqslant l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z)$ для $\forall z \in \partial V$.

Через $z_i$ обозначим поле, на котором в каждый данный момент времени находится камень $\mathfrak{B}_i$. Положим $z'$ в начальный момент времени равным $p_0$.

**Шаг 1.** С помощью трех камней пешка может распознать ближайшее по ходу $\mathfrak{A}^+$ поле $z'' \in \partial V$ на одной вертикали с исходным полем $z' \in \partial V$ $(l_w(z', z'') - l_e(z', z'') = 0)$:

(1) Оставляем камни $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ на поле $z'$.

(2) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_4$ движутся как $\mathfrak{A}^+$ до первого шага в напралении $e$ или $w$, делают этот шаг, $\mathfrak{A}$ запоминает направление (обозначим его $\omega$), $\mathfrak{B}_4$ остается.

(3) $\mathfrak{A}$ идёт как $\mathfrak{A}^-$ до $\mathfrak{B}_3$ и передвигает его на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$, если $\omega = w$, и по ходу $\mathfrak{A}^+$, если $\omega = e$.

(4) $\mathfrak{A}$ движется как $\mathfrak{A}^+$ до первой встречи с $\mathfrak{B}_4$.

Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (3) $\mathfrak{B}_3$ снова не окажется на одном поле с $\mathfrak{B}_2$. В этот момент $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ находятся на поле $z'$, а $\mathfrak{B}_4$ на искомом поле $z''$. Переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Аналогично вычисляется разность $l_n(p_0, z'') - l_s(p_0, z'')$ при прохождении от поля с $\mathfrak{B}_1$ до поля с $\mathfrak{B}_4$ (используя $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$):

(1) Оставляем камень $\mathfrak{B}_2$ на поле $p_0$.

(2) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_3$ движутся как $\mathfrak{A}^+$ до первого шага в напралении $n$ или $s$, делают этот шаг ($\mathfrak{A}$ запоминает направление - $\omega$), $\mathfrak{B}_3$ остается.

(3) $\mathfrak{A}$ идёт как $\mathfrak{A}^-$ до $\mathfrak{B}_2$, далее $\mathfrak{B}_2$ передвигается на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$, если $\omega = s$ и по ходу $\mathfrak{A}^+$, если $\omega = n$.

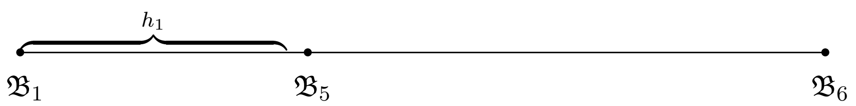
(4) $\mathfrak{A}$ движется как $\mathfrak{A}^+$ до $\mathfrak{B}_3$.

Затем повторяем (2), (3), (4) до тех пор, пока после действия (1) $\mathfrak{B}_3$ не окажется на одном поле с $\mathfrak{B}_4$.

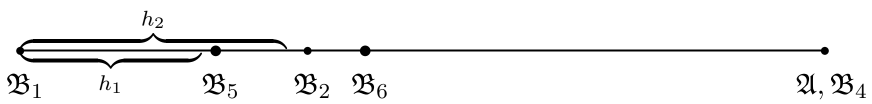
У $\mathfrak{A}$ можно ввести дополнительное состояние $q_{\mathrm{sgn}}(z) = \mathrm{sgn}(l_n(p_0, z) - l_s(p_0, z))$ (меняется при переходе $\mathfrak{B}_2$ через $\mathfrak{B}_1$; в начальный момент времени $q_{\mathrm{sgn}} = 0$; после первого шага $g_{\mathrm{sgn}} = +1$, если $\omega = n$, и $q_{\mathrm{sgn}} = -1$, если $\omega = s$). Тогда в зависимости от значения $q_{\mathrm{sgn}}(z'')$ после шага 2 возможны 3 случая:

**1)** Если $q_{\mathrm{sgn}}(z'') = -1$, то поле $z''$ ниже $p_0$ и $\mathfrak{A}$ забирает $\mathfrak{B}_2$ и идёт на $z''$. После этого переходим к шагу 1 (в качестве $z'$ берём $z''$). Таким образом находим следующее ближайшее против часовой стрелки поле на данной вертикали.

**2)** Если $q_{\mathrm{sgn}}(z'') = +1$, то поле $z''$ выше поля $p_0$. Предположим, это первое поле по ходу $\mathfrak{A}^+$, которое выше $p_0$. В этом случае камни $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ заменяются, соответственно, на $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_6$, которые фиксируются.




После этого переходим к шагу 1 (в качестве $z'$ берём $z''$). Если это не первое поле по ходу $\mathfrak{A}^+$, которое выше $p_0$, то камнями $\mathfrak{B}_6$ и $\mathfrak{B}_5$ уже помечены некоторые поля (см. рис.). Обозначим $l_n(p_0, z_6) - l_s(p_0, z_6)$ через $h_1$, а $l_n(p_0, z_4) - l_s(p_0, z_4)$ через $h_2$.




Тогда $\mathfrak{A}$ сравнивает $h_1$ и $h_2$, двигаясь от $z_4$ до первой встречи с $\mathfrak{B}_2$ или с $\mathfrak{B}_5$. Если раньше произошла встреча с $\mathfrak{B}_5$ (то есть $h_2 < h_1$), то $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_4$ заменяются на $\mathfrak{B}_5$ и $\mathfrak{B}_6$. Затем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ продолжают искать поле с минимальной высотой над уровнем $p_0$. Поиск продолжается до тех пор, пока $q_{\mathrm{sgn}}$ не станет равным нулю.

**3)** Если $q_{\mathrm{sgn}}(z'') = 0$, то $\mathfrak{A}$ обошел полный оборот вокруг дыры $V$ и снова оказался на поле $p_0$, помеченном $\mathfrak{B}_1$. В этот момент искомое поле помечено камнем $\mathfrak{B}_6$. Лемма 2 доказана.

**Замечание.** Очевидно, что описанная система может распознать отсутствие полей лабиринта выше данного на той же вертикали ($q_{\mathrm{sgn}}(z) \neq +1$ для $\forall z \in \partial V$ на данной вертикали).

**Лемма 3.** *Существует коллектив типа (1,6), который обходит любой лабиринт, начиная с самого нижнего среди самых левых его полей и останавливается после обхода.*

**Доказательство.** Пусть дан произвольный лабиринт, и коллектив находится на самом нижнем среди самых левых его полей в начальном состоянии.

**Шаг 1.** С самого нижнего поля вертикали коллектив движется в направлении $n$, пока это возможно, то есть пока в направлении $n$ не встретит поле из $\mathbb{Z}^2 \setminus P_G$. Пусть впервые это случится на границе дыры $V$. Тогда, применив лемму 2, перейдём на ближайшее сверху поле на той же вертикали (отличное от данного). С этого поля идём так же, как в начальный момент времени. И так далее, пока это возможно (см. замечание). Таким образом, мы обошли все поля данной вертикали.

**Шаг 2.** Пусть весь коллектив находится на поле $z$ (оно принадлежит границе внешней дыры). $\mathfrak{A}$ с помощью трех камней может вычислить первое по ходу $\mathfrak{A}^+$ поле $z'$ границы внешней дыры на ближайшей справа вертикали ($l_e(z,z') - l_w(z,z') = 1$) и перейти туда. Таким образом весь коллектив окажется на ближайшей справа вертикали.

**Шаг 3.** Аналогично шагу 1 спустимся до самого нижнего поля вертикали.

**Шаг 4.** Повторяем последовательно шаги 1, 2, 3.

В некоторый момент мы не сможем выполнить действия шага 2, так как $l_e(z,z') - l_w(z,z')$ будет $\leqslant 0$ для $\forall z'$ с границы внешней дыры, то есть правее данной вертикали нет полей лабиринта. В этот момент лабиринт обойдён. Лемма 3 доказана.

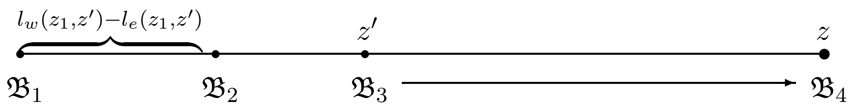
**Лемма 4.** *Существует коллектив типа (1,6), который, начиная с любого поля произвольного лабиринта, приходит в самое нижнее среди самых левых его полей и останавливается.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный лабиринт.

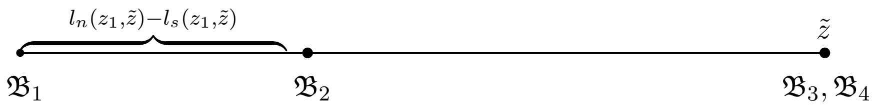
**Шаг 1.** С любого поля лабиринта пешка с шестью камнями может распознать самое левое поле данной горизонтали (доказательство аналогично предыдущим леммам). Помечаем его камнем $\mathfrak{B}_1$.

**Шаг 2.** Начинаем с этого поля (оно принадлежит границе внешней дыры) двигаться вдоль границы по ходу $\mathfrak{A}^-$, разыскивая ближайшее поле $\tilde{z}$, которое строго левее. Это можно сделать с помощью пешки и трех камней (не считая $\mathfrak{B}_1$).

Для каждого поля $z$, принадлежащего границе внешней дыры, они вычисляют $l_w(z_1, z) - l_e(z_1, z)$ (поле $z$ каждый раз помечаем камнем $\mathfrak{B}_4$):




Если для некоторого поля $z = \tilde{z}$ эта разность положительная (то есть поле $\tilde{z}$ левее исходного),




то весь коллектив переходит туда (поле помечено камнем $\mathfrak{B}_4$) и шаг 2 выполняется с начала. Если разность отрицательная или равна нулю, то $\mathfrak{A}$ перемещает $\mathfrak{B}_4$ на 1 шаг по ходу $\mathfrak{A}^-$ и для этого поля снова вычисляет $l_w(z_1, z_4) - l_e(z_1, z_4)$.

Процесс завершается, когда мы находим такое поле $z^*$, что для любого поля $z$ с границы внешней дыры разность $l_w(z^*, z) - l_e(z^*, z)$ не будет положительной ($\mathfrak{B}_4$ пройдет всю границу и вернётся к $\mathfrak{B}_1$). Поле $z^*$ принадлежит самой левой вертикали. Весь коллектив переходит на $z^*$.

**Шаг 3.** На самой левой вертикали коллектив типа (1,6) распознаёт самое нижнее поле. Лемма 4 доказана.

## 3. Доказательство теоремы

По лемме 4 существует коллектив типа (1,6), который в любом лабиринте, стартуя с произвольного поля, распознаёт (находит и останавливается) самое нижнее среди самых левых полей. Если после того, как пешка из этого коллектива перейдёт в конечное состояние, заменить её функции перехода и выхода функциями перехода и выхода коллектива, который обходит весь лабиринт, начиная с этого поля, и останавливается после обхода (он существует по лемме 3), то получим искомый коллектив. При этом конечное состояние пешки из первого коллектива заменяем начальным состоянием пешки из второго коллектива. Теорема доказана.

## Список литературы

[1] Shannon Cl.E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H. Foerster. 1951. P. 173–180.

[2] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха–Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3.

[3] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2.

[4] Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[5] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3.