Периодические фрагменты изображений

С.Б. Родин

Предметом данной статьи является изучение внутренней структуры изображений, в частности вопрос о нахождении «периодических» структур, являющихся частью изображения.

С одной стороны, это позволяет записывать изображения в более компактном виде.

С другой стороны, наличие таких структур является отличительным признаком определенного типа изображения, и может быть использовано в распознавании.

В статье приведен алгоритм поиска периодических структур.

Пусть задано некоторое изображение J объекта Q. Изображения состоят из некоторых «неделимых» частей, которые, вообще говоря, могут пересекаться. Назовем их элементами. Изображения размещены на плоскости. Таким образом, элемент — это множество точек плоскости, а изображение является объединением элементов.

Каждый элемент изображения J будем относить к одному из типов $T_1, T_2, ..., T_n$, то есть существует набор предикатов $P_j(J, q, x, y)$, $j = 1, 2, ..., n$, такой, что $P_j(J, q, x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда элемент q изображения J расположен на плоскости так, что он накрывает точку с координатами (x, y) и относится к типу T_j.

Тройка (q, x, y) называется «особой» точкой типа T_i изображения J, если $P_i(J, q, x, y) = 1$.

Тип особой точки (q, x, y) обозначим через $T(q, x, y)$.

Определение. Тройки (q, x, y) и (q, x', y') называются эквивалентными в изображении J.

Считаем, что число попарно неэквивалентных особых точек любого изображения J конечно.

Будем считать, что для каждого класса эквивалентности Q существуют точки $({x^q}_{\min}, {y^q}_{\min})$ и $({x^q}_{\max}, {y^q}_{\max})$ такие, что ${x^q}_{\min}$ минимальная координата x среди всех особых точек (q, x, y) из данного класса эквивалентности, то есть ${x^q}_{\min} = \min_{(q,x,y)\in Q}\{x\}$, ${y^q}_{\min}$ минимальная координата y среди всех особых точек (q, x, y) из данного класса эквивалентности, то есть ${y^q}_{\min} = \min_{(q,x,y)\in Q}\{y\}$, соответственно ${x^q}_{\max} = \max_{(q,x,y)\in Q}\{x\}$, ${y^q}_{\max} = \max_{(q,x,y)\in Q}\{y\}$.

Определение. Расстояние $\rho_x((q, x, y),(q', x', y'))$ по оси X между двумя особыми точками (q, x, y) и (q', x', y') определим, как $|{x^q}_{\min} - {x'^q}_{\min}|$.

Определение. Расстояние $\rho_y((q, x, y),(q', x', y'))$ по оси Y между двумя особыми точками (q, x, y) и (q', x', y') определим, как $|{y^q}_{\min} - {y'^q}_{\min}|$.

Пусть R — некоторое подмножество особых точек изображения J.

Определение. Базовым набором B подмножества R назовем подмножество особых точек такое, что существуют числа dx, dy и числа $c_R \in \mathbb{N}$ и $r_R \in \mathbb{N}$ такие, что

1) $\forall l, l \in 0...c_R - 1$ и $\forall j, j \in 0...r_R - 1$, для любой особой точки $(q, x, y) \in B$ особая точка $(q', x + l \cdot dx, y + j \cdot dy)$ принадлежит R и $T(q, x, y) = T(q', x + l \cdot dx, y + j \cdot dy)$.

2) Для любой особой точки (q, x, y), принадлежащей R, найдутся числа $l, l \in 0...c_R - 1$ и $j, j \in 0...r_R - 1$ такие, что особая точка $(q', x - l \cdot dx, y - j \cdot dy)$ принадлежит B и $T(q, x, y) = T(q', x - l \cdot dx, y - j \cdot dy)$.

Определение. Говорим, что подмножество R особых точек изображения J образует периодическую структуру, если для нее найдется базовый набор B такой, что для него либо $c_R > 1$, либо $r_R > 1$.

Числа r_R и c_R в определении базового набора называются числом строк и столбцов периодической структуры соответственно.

Теперь приведем описание алгоритма для нахождения периодических структур изображений. Если структура найдена, то для нее указывается базовый набор и сдвиги dx, dy базового набора.

Этап 1. Формирование элемента периодичности.

На данном этапе мы построим структуру, которая выдерживает сдвиги по осям координат. Обозначим эту структуру через B.

Шаг 1) Поскольку изображение размещено на плоскости, мы можем говорить о прямоугольнике, его накрывающем. Рассмотрим прямоугольник, накрывающий наше изображение J и центральную точку этого прямоугольника. В качестве первой особой точки структуры B возьмем ближайшую к центру окна особую точку (q_1, x, y) изображения J. Без ограничения общности считаем, что она имеет тип T_1. Обозначим минимальную точку структуры B, как $(x^B{}_{\min}, y^B{}_{\min})$.

Шаг 2) Найдем среди особых точек (q, x, y) изображения J типа T_1 таких, что расстояние по Y до структуры B равно 0, и $(x^q{}_{\min} - x^B{}_{\min}) > 0$ ближайшую особую точку не эквивалентную ни одной особой точке, входящей в структуру B. Обозначим эту точку через (q^N_x, x, y). Расстояние между найденной точкой и структурой B обозначим dx. Если такой точки нет, то считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Шаг 3) Найдем среди особых точек (q, x, y) изображения J типа T_1 таких, что расстояние по X до структуры B равно 0, и $(y^q{}_{\min} - y^B{}_{\min}) > 0$ ближайшую особую точку не эквивалентную ни одной особой точке, входящей в структуру B. Обозначим эту точку через (q^N_y, x, y). Расстояние между найденной точкой и структурой B обозначим dy. Если такой точки нет, то считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Шаг 4) Включим в структуру B все попарно неэквивалентные особые точки, накрываемые прямоугольником $x^B{}_{\min} \leqslant x \leqslant x^B{}_{\min} + dx$, $y^B{}_{\min} \leqslant x \leqslant y^B{}_{\min} + dy$.

Шаг 5) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q', x+dx, y)$, такая что $T(q, x, y) = T(q', x + dx, y)$, переходим к следующему шагу. В противном случае включаем особую точку (q^N_x, x, y) в структуру B и переходим к шагу 2).

Шаг 6) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q', x, y+dy)$, такая что $T(q, x, y) = T(q', x, y + dy)$, переходим к следующему шагу. В противном случае включаем особую точку (q^N_y, x, y) в структуру B и переходим к шагу 2).

Шаг 7) Построенную структуру назовем элементом периодичности.

А числа dx и dy считаем сдвигами структуры B по осям координат. Переходим к этапу 2.

В завершении этапа 1 хотелось отметить, что при каждом добавлении особых точек в структуру B мы проверяем, не превысило ли их количество N_B, где число N_B является параметром алгоритма. Если их число больше N_B, считаем, что изображение не содержит периодической структуры.

Этап 2. Поиск области периодичности.

Шаг 8) Положим i равным нулю.

Шаг 9) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q', x+ i \cdot dx, y)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x + i \cdot dx, y)$, увеличиваем i на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через $c_{\max}$ максимальное i, при котором выполнена проверка.

Шаг 10) Положим i равным нулю.

Шаг 11) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q, x-i\cdot dx, y)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x - i \cdot dx, y)$, увеличиваем i на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через $c_{\min}$ максимальное i, при котором выполнена проверка.

Шаг 12) Если $c_{\max}+c_{\min} < \kappa$, где κ — параметр алгоритма, добавляем в структуру B все попарно не эквивалентные особые точки (q, x, y) изображения J такие, что расстояния по X от них до минимальной точки структуры B не превосходят $c_{\max} \cdot dx$, если $x^q{}_{\min} - x^B{}_{\min} > 0$, и не превосходят $c_{\min} \cdot dx$, если $x^q{}_{\min} - x^B{}_{\min} < 0$, и переходим к шагу 2).

Шаг 13) Положим j равным нулю.

Шаг 14) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q', x, y + j \cdot dy)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x, y + j \cdot dy)$, увеличиваем j на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через $r_{\max}$ максимальное j, при котором выполнена проверка.

Шаг 15) Положим j равным нулю.
Шаг 16) Если для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q, x, y - j \cdot dy)$ такая, что $T(q, x, y) = T(q', x, y - j \cdot dy)$, увеличиваем j на единицу и осуществляем ту же проверку.

Обозначим через $r_{\min}$ максимальное j, при котором выполнена проверка.
Шаг 17) Если $r_{\max} + r_{\min} < \kappa$, где κ — параметр алгоритма, добавляем в структуру B все попарно не эквивалентные особые точки (q, x, y) изображения J такие, что расстояния по Y от них до минимальной точки структуры B не превосходят $r_{\max} \cdot dy$, если ${y^q}_{\min} - {y^B}_{\min} > 0$, и не превосходят $r_{\min} \cdot dy$, если ${y^q}_{\min} - {y^B}_{\min} < 0$, и переходим к шагу 2).
Этап 3. Проверка периодичности.
Шаг 18) Если для каждых i и j, таких, что $(-1) \cdot c_{\min} \leqslant i \leqslant c_{\max}$ и $(-1) \cdot r_{\min} \leqslant j \leqslant r_{\max}$ и для каждой особой точки (q, x, y), принадлежащей структуре B, изображению J принадлежит особая точка $(q', x + i \cdot dx, y + j \cdot dy)$, такая, что $T(q, x, y) = T(q', x + i \cdot dx, y + j \cdot dy)$, то считаем, что найдена периодическая структура. Базовым набором является структура, построенная на первом этапе, и сдвинутая на $((-1) \cdot c_{\min} \cdot dx, (-1) \cdot r_{\min} \cdot dy)$, где сдвигами по осям X и Y являются числа dx и dy соответственно, число столбцов равно $c_{\min} + c_{\max}$, число строк равно $r_{\min} + r_{\max}$.
Шаг 19) Обозначим через $({x^R}_{\min}, {y^R}_{\min})$ минимальную точку периодической структуры. Разобьем оставшиеся элементы изображения на 4 изображения следующим образом. Обозначим их через J_1, J_2, J_3, J_4.

В J_1 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что ${x^q}_{\min} - {x^R}_{\min} < 0$.

В J_2 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что ${x^q}_{\min} - {x^R}_{\min} > 0$.

В J_3 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что ${y^q}_{\min} - {y^R}_{\min} < 0$.

В J_1 включим все попарно неэквивалентные особые точки (q, x, y) изображения, не принадлежащие построенной периодической структуре, и такие что ${y^q}_{\min} - {y^R}_{\min} > 0$. И для каждого изображения применим описанный алгоритм нахождения периодических структур.

Список литературы

[1] Алешин С.В., Переяславский В.И. Распознавание с опорной точкой // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: МГУ, 1987.

[2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. М.: МГУ, 1996.