К вопросу о числе пороговых функций*

М.В. Носов

В работе описывается способ получения очень сложного арифметического выражения, задающего число пороговых функций N_n.

Определим булевую функцию как отображение $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, а пороговую функцию будем задавать формулой

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{sign}(F(x_1,\ldots,x_n)),$$

$$F(x_1,\ldots,x_n) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

полагая $\mathrm{sign}(0) = -1$, используя известный факт, в качестве коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ можно взять целые числа такие, что $|a_i| \leqslant l$, $l = \left[(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\right] + 1$. Значит $F(x_1,\ldots,x_n)$ будет принимать целые значения, причем $|F(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant (n+1)l$. С использованием интерполяционного многочлена можно построить характеристическую функцию:

$$\chi_F(x_1,\ldots,x_n) = \left\{ \begin{array}{l} 1, F(x_1,\ldots,x_n) \geqslant 1 \\ 0, F(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

Ее можно представить в виде

$$\chi_F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\beta,\beta\subseteq\{1,\ldots,n\}} u_\beta(a_0,a_1,\ldots,a_n)\prod_{i\in\beta} x_i,$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 99-01-00317.

где $u_\beta(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ многочлены от переменных $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Положим аналогично $G(x_1, \ldots, x_n) = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n, g(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{sign}(G(x_1, \ldots, x_n))$ и строим $\chi_G(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$|\chi_F(x_1, \ldots, x_n) - \chi_G(x_1, \ldots, x_n)| = \\ = \chi_F(x_1, \ldots, x_n) + \chi_G(x_1, \ldots, x_n) - 2\chi_F(x_1, \ldots, x_n)\chi_G(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \left\{ \begin{array}{lcl} 1, f(x_1, \ldots, x_n) & \neq & g(x_1, \ldots, x_n) \\ 0, f(x_1, \ldots, x_n) & = & g(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. .$$

Определим

$$\Delta(f,g) = \sum_{x_1,\ldots,x_n} \big|\chi_F(x_1, \ldots, x_n) - \chi_G(x_1, \ldots, x_n)\big| = \\ = 2^n \Big(u_\varnothing(a_0, a_1, \ldots, a_n) + u_\varnothing(b_0, b_1, \ldots, b_n) - \\ - 2\sum_\beta u_\beta(a_0, a_1, \ldots, a_n) u_\beta(b_0, b_1, \ldots, b_n) \Big).$$

$\Delta(f,g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$, иначе $\Delta(f,g) \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Вновь строим интерполяционный многочлен

$$\xi(f,g) = \frac{1}{2^n!} \prod_{i=1}^{2^n} (\Delta(f,g) - i) = \left\{ \begin{array}{l} 1, f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n) \\ 0, f(x_1, \ldots, x_n) \neq g(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. .$$

Тогда

$$h(f) = \sum_{b_0, b_1, \ldots, b_n, b_i \in Z, |b_i| \le l} \xi(f,g)$$

равна числу целых точек в кубе $[-l, l]^{n+1}$, задающих такую же, что и f. $\xi(f,g)$ есть многочлен от $a_0, a_1, \ldots, a_n$, с коэффициентами в виде многочленов от $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Следует заметить, что для натуральных $j_1, \ldots, j_r$ имеет место равенство

$$\sum_{b_0, b_1, \ldots, b_n, b_i \in Z, |b_i| \le l} b_{i_1}^{j_1} \ldots b_{i_r}^{j_r} = (2l+1)^{n-r} \prod_{k=1}^{r} \left(\sum_{-l}^{l} b_{i_k}^{j_k} \right),$$

значит, если хотя бы одна из степеней нечетна, то выражение равно 0, а при четных имеем сумму степеней натуральных чисел

$$(2l+1)^{n-r}2^{r+1}\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{l^{j_k+1}}{j_k+1}+\frac{l^{j_k}}{2}+\frac{1}{2}\binom{j_k}{1}B_2 l^{j_k-1}+\frac{1}{4}\binom{j_k}{3}B_4 l^{j_k-3}+\ldots\right).$$

Очевидно, что $h(f)\geqslant 1$, тогда

$$N_n=\sum_{a_0,a_1,\ldots,a_n}\frac{1}{h(f)}.$$

Однако, чтобы оставаться в рамках многочленов от $a_0,a_1,\ldots,a_n$, с учетом, что $h(f)\in\left\{1,\ldots,(2l+1)^{n+1}\right\}$ и с использованием интерполяционного многочлена, имеем

$$N_n=-\sum_{K=1}^{(2l+1)^{n+1}}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{a_0,a_1,\ldots,a_n}\frac{1}{(k-1)!\,((2l+1)^{n+1}-k)!}\prod_{i=1,i\neq k}^{(2l+1)^{n+1}}(h(f)-i)\,.$$

Следует отметить, что формула для N_n верна при всех l больших вышеуказанного значения, в том числе и при l стремящемся к бесконечности.