Оптимальный портфель ценных бумаг

Е. Медведева

1. Введение

На первый взгляд управление инвестициями кажется довольно простым делом. Но в период становления рыночной экономики существует риск недополучения запланированной прибыли в ходе реализации инвестиционных проектов. В настоящее время тема инвестиционных рисков очень интересна, поскольку снижение рисков повышает привлекательность инвестиций, что весьма актуально для России. Инвестиционные проекты могут быть самыми разнообразными — от плана производства новой продукции до целесообразности покупки тех или иных видов ценных бумаг. В данной статье будет рассмотрено инвестирование в ценные бумаги.

Принимая решение в начальный момент, инвестор должен понимать, что доходность ценных бумаг в предстоящий период владения неизвестна. Однако он может оценить ожидаемую доходность различных ценных бумаг, а затем инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Но это будет неразумно, так как инвестор хотя и желает, чтобы доходность была высокой, но одновременно хочет, чтобы доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно. Это означает, что инвестор стремится одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность, то есть риск. Обычно для того, чтобы сбалансировать эти две задачи, разрабатывается программа вложения капитала, обеспечивающая требуемую доходность при минимальном уровне риска.

В ряде случаев приемлемой мерой неопределенности является стандартное отклонение (волатильность) доходности портфеля или дисперсия (вариация) доходности портфеля. Помимо этого подхода к оцениванию рисков, предложенного Г. Марковицем, появляются все новые и новые подходы. Наиболее распространенной на сегодняшний момент в США методологией оценивания рыночных рисков является «Стоимость под риском» (Value-at-Risk, VaR). Она состоит в расчете величины максимально возможных убытков портфеля финансовых инструментов в течение заданного периода с заданной вероятностью. Другой мерой оценивания риска является Средняя Величина Убытка (Conditional VaR, CVaR), когда интересуются не только граничной величиной капитала, ниже которой следует ожидать убыток с определенной долей вероятности, а и размером этого убытка.

Но как бы ни хороша была теория, ее не всегда возможно использовать на практике. Не составляет исключения и теория формирования портфеля ценных бумаг. В классической теории предполагается торговля ценными бумагами с транзакционными расходами, равными нулю. В реальности это не так. Стоит учитывать, что покупка происходит по цене спроса дилера, а продажа по цене предложения. Кроме того, существует комиссионное вознаграждение. Ни одна финансовая модель не будет работать на реальном рынке, если не учесть эти условия.

2. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг, вариационный подход

Известно, что диверсификация снижает риск вложения. Инвестор может вложить свои деньги не в один вид ценных бумаг, а в несколько видов, сформировав портфель ценных бумаг.

Будем использовать стандартные определения, например, из [3]. Пусть $x_j, j = 1, ..., n$ — доля общего вложения, приходящаяся на j-ый вид ценных бумаг, так что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{1}$$

Доходность портфеля R_p равна

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j, \tag{2}$$

если доходность j-ого вида $R_j = \frac{C_{1j} - C_{0j}}{C_{0j}}$, где C_{0j} — цена покупки j-ого вида, C_{1j} — цена продажи j-ого вида, d_j — дивиденды, полученные за время владения ценной бумагой j-го вида. В дальнейшем дивиденды не учитываются.

Ожидаемая доходность портфеля равна

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j m_j, \tag{3}$$

а отклонение

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^{n} x_j (R_j - m_j). \tag{4}$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения есть дисперсия доходности портфеля

$$V_p = E(R_p - m_p)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j E[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \tag{5}$$

где $V_{ij} = E[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ — ковариации R_i и R_j, $V_{jj} = E(R_j - m_j)^2 = \sigma_j^2$ — дисперсии R_j.

Часто также рассматривается величина

$$\sigma_p = \sqrt{V_p}, \tag{6}$$

называемая среднеквадратичным отклонением.

Тогда можно свести задачу выбора оптимальной структуры портфеля к следующей математической проблеме, предложенной Гарри Марковицем.

Найти x_j, минимизирующие вариацию доходности портфеля, при условии обеспечения заданного значения ожидаемой доходности.

Пусть решение данной задачи обозначено знаком *. Если $x_j^* > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_j^* наличного капитала в ценные бумаги вида j. Если $x_j^* < 0$, то это означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве $-x_j^*$ (на единицу наличного капитала), то есть участвовать в операции типа short sale (распоряжение клиента о short sale на определенное количество ценных бумаг означает, что его брокер должен одолжить это количество, затем через непродолжительное время пустить его в продажу, а затем компенсировать долг, вновь купив ранее заимствованные ценные бумаги). Если это невозможно, то приходится вводить дополнительное требование: x_j^* не должны быть отрицательными.

Если отсутствуют ограничения неотрицательности переменных, то возможно явное решение.

$$V_p = x^T V x(\min), \tag{7}$$

$$m^T x = m_p, \tag{8}$$

$$I^T x = 1, \tag{9}$$

где $V = [V_{ij}]$ — матрица ковариаций, $i, j = 1, ..., n$;
$m = (m_j)$ — матрица-столбец ожидаемых доходностей, $j = 1, ..., n$;
$I = (1)$ — матрица-столбец из единиц;
$x = (x_j)$ — матрица-столбец неизвестных долей, $j = 1, ..., n$.

Введем функцию Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_1 (I^T x - 1) + \lambda_2 (m^T x - m_p). \tag{10}$$

Явное представление для оптимальной структуры портфеля:

$$x = x^* = V^{-1} \frac{m_p (I I^T V^{-1} m - m I^T V^{-1} I) + m I^T V^{-1} m - I m^T V^{-1} m}{(I^T V^{-1} m)^2 - I^T V^{-1} I m^T V^{-1} m}. \tag{11}$$

Если наложено условие неотрицательности на переменные «x», то исходная задача становится проблемой квадратичного программирования. В настоящей статье разобран алгоритм решения этой задачи с использованием метода Вольфа [5].

$$
\begin{gathered}
V_p = x^T V x(\min), \\
m^T x = m_p, \\
I^T x = 1 \\
x \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Метод Вольфа используется для задачи максимизации с отрицательно определенной квадратичной формой. Это нам подходит, так как $\min V_p = -\max(-V_p)$, и форма $x^T(-V)x$ будет отрицательно определена в силу того, что V — положительно определенная матрица. Таким образом, рассматривается задача:

$$x^T(-V)x(\max), \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$x \geqslant 0.$$

Если выписать функцию Лагранжа $L = x^T(-V)x + \lambda_1(m_p - m^T x) + \lambda_2(1 - I^T x)$, ($\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$), то условия Куна-Таккера для этой задачи выглядят следующим образом:

$$v = \begin{pmatrix} m & I \end{pmatrix} \lambda + 2Vx \geqslant 0, \tag{15}$$

$$x^T v = 0 \text{ *или* } x_j v_j = 0, j = 1, ..., n, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А если x^* и λ^* удовлетворяют этим условиям, и целевая функция вогнута на неотрицательном октанте (у нас это так потому, что квадратичная форма является вогнутой функцией, если она является отрицательно определенной формой), а i-ое ограничение — выпуклая функция, если $\lambda_i^* > 0$, и вогнутая, если $\lambda_i^* < 0$, $i = 1, 2$ (так как ограничения линейны, они могут рассматриваться и как выпуклые, и как вогнутые), то $(x^*)^T(-V)x^*$ является абсолютным максимумом

$x^T(-V)x$, когда x принадлежит множеству точек, удовлетворяющих ограничениям.

Таким образом, если существуют $x \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, λ, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v - \begin{pmatrix} m & I \end{pmatrix} \lambda - 2Vx = 0, \tag{17}$$

$$x^T v = 0,$$

то x является оптимальным решением задачи.

Для получения решения методом Вольфа используется симплекс-метод. Система $\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}$ решается обычным первым этапом симплекс-метода, то есть находится матрица B — подматрица матрицы $\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix}$, являющаяся базисной матрицей, и x_B — вектор базисных переменных такой, что $Bx_B = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}$. Это базисное решение удовлетворяет двум первым ограничениям системы

$$\begin{pmatrix} m^T & 0 & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 & 0 \\ -2V & -m & -I & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Поэтому, используя его, добавляются искусственные переменные лишь в последние n ограничений (18). Это делается следующим образом. Вместо (18) рассматривается система

$$\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$-2Vx - \begin{pmatrix} m & I \end{pmatrix} \lambda + v + Su = 0, \tag{19}$$

где $S = \|\triangle_j \delta_{ij}\|$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\triangle_j = \pm 1$, причем требуется, чтобы $u \geqslant 0$.

Пусть D_B содержит столбцы матрицы $(-V)$, соответствующие тем столбцам матрицы $\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix}$, которые вошли в B. Пусть j-ая строка матрицы D_B обозначена через d_B^j. Тогда

$$\triangle_j = \begin{cases} +1, & \text{если } 2d_B^j x_j \leqslant 0 \\ -1, & \text{если } 2d_B^j x_j > 0 \end{cases}. \tag{20}$$

При таких $\triangle_j$, если положить

$$u_j = |-2d_B^j x_j| \geqslant 0, j = 1, ..., n, \lambda = 0, v = 0, \tag{21}$$

получится допустимое решение для (14), (19).

Можно написать

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 2D_B & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Полученное решение является базисным для (14), (19), поскольку если $B_Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 2D_B & S \end{pmatrix}$, то $B_Q^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -2SD_BB^{-1} & S \end{pmatrix}$, то есть матрица коэффициентов B_Q неособенная. Имея базисное решение для (14), (19) с $x_B \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, можно использовать симплекс-метод, чтобы свести выражение $(-\sum_{j=1}^n u_j)$, максимизируя его к нулю. Отличие от стандартной схемы симплекс-метода состоит только в том, что если $x_j > 0$, то запрещается вводить в базис $v_j > 0$, и наоборот.

Все компоненты вектора λ не имеют ограничений на знак. Для того, чтобы в новой задаче нелинейного программирования сделать все переменные неотрицательными, вводятся новые переменные $\xi \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$ такие, что $\lambda = \zeta - \xi$.

Тогда, если обозначить $Q = \begin{pmatrix} m^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2V & -m & -I & m & I & E_n & S \end{pmatrix}$,
$f = (m_p, 1, 0, ..., 0)$,
$w = (x, \zeta, \xi, v, u)$,

то нелинейная задача, которую надо решать, принимает вид

$$Z = (-\sum_{j=1}^{n} u_j)(\max), \tag{23}$$

$$Qw = f, \tag{24}$$

$$w \geqslant 0, \tag{25}$$

$$x^T v = 0.$$

В этой задаче нелинейным является лишь ограничение $x^T v = 0$. Она решается симплекс-методом с описанным выше видоизменением. Для решения удобно использовать модифицированный симплекс-метод. Нужно определить начальное базисное решение для $(23), (24), (25), (16)$. Сначала, используя первый этап, находится базисное решение x_B и матрица B при рассмотрении лишь ограничений $\begin{pmatrix} m^T \\ I^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}$. Если затем положить $u = E(-2D_B x_B) \geqslant 0$, то $q_B = (x_B, u)$ будет базисным решением для $(23), (24), (25), (16)$ с базисной матрицей B_Q, определяемой как и раньше. Далее нужно найти B_Q^{-1} и использовать ее в исходной таблице для реализации модифицированного симплекс-метода.

Был описан один шаг симплексной итерации. Доказано, что если очередная итерация метода, учитывающего требование $x_j v_j = 0$ неосуществима, то на последней итерации выполняется равентво $Z = 0$, и получается желаемое решение.

Имеется программа на языке C, реализующая данный алгоритм.

3. Использование мер риска VaR и CVaR для формирования оптимального портфеля ценных бумаг

Пусть β-VaR — это величина такая, что с вероятностью β абсолютные потери не превысят β-VaR. Еще одна мера — это CVaR. Минимизация CVaR ведет к минимизации VaR, так как VaR $\leqslant$ CVaR.

Будем использовать определения из [10]. Можно сказать, что β-VaR — это β-квантиль распределения потерь, то есть вероятность того, что потери превысят β-VaR, равна $1-\beta$. Соответственно, β-CVaR — это ожидаемая величина $(1-\beta)\times 100\%$ самых больших потерь. Обычно рассматривают три значения β: $\beta = 0.90$, $\beta = 0.95$, $\beta = 0.99$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — это функция потерь, которая зависит от управляющего вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и случайного вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Предполагается, что $\mathbf{y}$ имеет плотность распределения $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, которая зависит от вектора $\mathbf{x}$. Обозначим через $\Psi(\mathbf{x},\alpha)$ вероятностную функцию

$$\Psi(\mathbf{x},\alpha) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant\alpha} p(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}, \tag{26}$$

которая по определению является вероятностью того, что потери не превысят некоторой величины α. β-VaR определяется как $\alpha(\mathbf{x},\beta)$:

$$\alpha(\mathbf{x},\beta) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \Psi(\mathbf{x},\alpha) = \beta\}. \tag{27}$$

Рассматривается следующая представляющая β-CVaR функция $\frac{1}{1-\beta}\Phi(\mathbf{x})$, которая есть условное математическое ожидание потерь $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ при условии, что они превышают $\alpha(\mathbf{x},\beta)$, где

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqslant\alpha(\mathbf{x},\beta)} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}. \tag{28}$$

Считается, что вектор решений $\mathbf{x}$ принадлежит некоторому вероятностному множеству $X \subset \mathbb{R}^n$ (например, это может быть набор векторов со средней доходностью, превышающей 10%).

Теперь будет показано, что минимизация функции $\frac{1}{1-\beta}\Phi(\mathbf{x})$ на множестве X может быть сведена к минимизации функции

$$F(\mathbf{x},\alpha) = (1-\beta)\alpha + \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqslant\alpha} (f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha)p(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{29}$$

на множестве $X \times \mathbb{R}$.

Функция $F(\mathbf{x},\alpha)$ может быть переписана в следующем виде:

$$F(\mathbf{x},\alpha) = (1-\beta)\alpha + \int_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} (f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha)^+ p(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}, \tag{30}$$

где $a^+ = \max\{0, a\}$.

Предполагается, что функция $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$, задаваемая уравнением (26) непрерывна по $\alpha \in \mathbb{R}$ для любого $\mathbf{x} \in X$. Вероятностная функция $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$ монотонно возрастает и принимает значения между 0 и 1. Следовательно, для каждого $\mathbf{x} \in X$ и $\beta \in (0, 1)$ множество

$$A(\mathbf{x}, \beta) = \{\alpha : \Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \beta\} \tag{31}$$

непусто, и

$$\alpha(\mathbf{x}, \beta) = \min\{\alpha : \alpha \in A(\mathbf{x}, \beta)\}. \tag{32}$$

Далее доказывается, что $A(\mathbf{x}, \beta)$ — это множество точек минимума функции $F(\mathbf{x}, \alpha)$ по α. Если есть только одна минимальная точка, тогда это $\alpha(\mathbf{x}, \beta)$. Рассмотрим две теоремы из [10].

Теорема 1. *Пусть функция $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$ непрерывна по α на $\mathbb{R}$ для всех $\mathbf{x} \in X$, функция $F(\mathbf{x}, \alpha)$ дифференцируема по $\alpha \in \mathbb{R}$ для всех $\mathbf{x} \in X$, тогда*

$$A(\mathbf{x}, \beta) = \{\alpha : F(\mathbf{x}, \alpha) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(\mathbf{x}, \alpha)\} \tag{33}$$

и

$$\alpha(\mathbf{x}, \beta) = \min\{\alpha : \alpha \in A(\mathbf{x}, \beta)\}. \tag{34}$$

Доказательство. Выпуклость функции $(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+$ по α подразумевает выпуклость функции $F(\mathbf{x}, \alpha)$ по α. Функция $F(\mathbf{x}, \alpha)$ выпукла и дифференцируема по α, поэтому минимум может быть найден приравниванием частной производной $\nabla_\alpha F(\mathbf{x}, \alpha)$ к нулю.

$\nabla_\alpha F(\mathbf{x}, \alpha) = \nabla_\alpha((1 - \beta)\alpha + \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+ p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}) =$
$= 1 - \beta + \nabla_\alpha \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+ p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} =$
$= 1 - \beta + \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y} \geqslant \alpha} \nabla_\alpha (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} =$
$= 1 - \beta - \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant \alpha} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1 - \beta - (1 - \Psi(\mathbf{x}, \alpha)) =$
$= \Psi(\mathbf{x}, \alpha) - \beta$

То есть $\nabla_\alpha F(\mathbf{x}, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{x}, \alpha) - \beta = 0$, что доказывает (33).

Функция $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$, определяемая уравнением (26), непрерывна и монотонна по α. Она принимает все значения в интервале (0,1). Поэтому для каждого $\mathbf{x} \in X$ и $\beta \in (0, 1)$ уравнение $\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \beta$ имеет, по крайней мере, одно решение относительно α. По определению $\alpha(\mathbf{x}, \beta)$ это минимальная величина, удовлетворяющая последнему уравнению, то есть получается (34).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для любого* $\mathbf{x} \in X$ *функция* $F(\mathbf{x}, \alpha)$ *постоянна при* $\alpha \in A(\mathbf{x}, \beta)$ *и*

$$\Phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \alpha), \alpha \in A(\mathbf{x}, \beta). \tag{35}$$

Доказательство. По теореме 1 функция $F(\mathbf{x}, \alpha)$ является константой на множестве $A(\mathbf{x}, \beta)$. Поскольку $\alpha(\mathbf{x}, \beta) \in A(\mathbf{x}, \beta)$, то для того, чтобы доказать (35), достаточно показать, что $\Phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta))$. По определению функции $F(\mathbf{x}, \alpha)$ мы имеем

$$F(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta)) = (1 - \beta)\alpha(\mathbf{x}, \beta) + \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{x}, \beta))p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Из уравнений (31) и (32) следует, что $\beta = \Psi(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta))$.

$$\begin{aligned} &(1 - \beta)\alpha(\mathbf{x}, \beta) = \alpha(\mathbf{x}, \beta)(1 - \Psi(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta)) = \\ &= \alpha(\mathbf{x}, \beta)(1 - \int_{\alpha(\mathbf{x},\beta) \geqslant f(\mathbf{x},\mathbf{y})} p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \beta)\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha(\mathbf{x},\beta)} p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha(\mathbf{x},\beta)} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{x}, \beta))p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \\ &= \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha(\mathbf{x},\beta)} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} - \alpha(\mathbf{x}, \beta) \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha(\mathbf{x},\beta)} p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

В результате получаем
$F(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta)) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant \alpha(\mathbf{x},\beta)} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$,
что доказывает теорему 2.

Теоремы 1 и 2 показывают, что задача минимизации функции $\Phi(\mathbf{x})$ на множестве X может быть сведена к задаче минимизации функции $F(\mathbf{x}, \alpha)$ на множестве $X \times \mathbb{R}$. Действительно,

$$\min_{\mathbf{x} \in X, \alpha \in \mathbb{R}} F(\mathbf{x}, \alpha) = \min_{\mathbf{x} \in X} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(\mathbf{x}, \alpha) = \min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x}, \beta)) = \min_{\mathbf{x} \in X} \Phi(\mathbf{x}). \tag{36}$$

Предположим, что используя методы оптимизации, мы нашли оптимальный вектор $(\mathbf{x}^*, \alpha^*)$, то есть $F(\mathbf{x}^*, \alpha^*) = \min_{\mathbf{x} \in X, \alpha \in \mathbb{R}} F(\mathbf{x}, \alpha)$. Тогда $\mathbf{x}^*$ — это точка, где достигается минимум функции $\Phi(\mathbf{x})$ на множестве X. $\alpha(\mathbf{x}, \beta) = \operatorname{argmin}\{\alpha : F(\mathbf{x}^*, \alpha) = F(\mathbf{x}^*, \alpha^*)\}$. Таким образом, минимизируя $F(\mathbf{x}, \alpha)$, мы можем одновременно найти VaR и оптимальный CVaR.

Если интеграл в формуле (30) может быть посчитан или приближен аналитически, тогда можно минимизировать функцию $F(\mathbf{x}, \alpha)$ с помощью техники нелинейного программирования [10]. Здесь рассматривается случай, когда интеграл приближается с помощью использования сценариев $\mathbf{y}_j, j = 1, .., J$, которые выбраны по функции плотности $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y})$, которая не зависит от $\mathbf{x}$, то есть

$$\int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \approx J^{-1} \sum_{j=1}^{J} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - \alpha)^+. \tag{37}$$

Если функция потерь $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)$ выпукла, множество X выпукло, то должна быть решена следующая выпуклая оптимизационная задача

$$\tilde{F}(\mathbf{x}, \alpha) = (1 - \beta)\alpha + J^{-1} \sum_{j=1}^{J} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - \alpha)^+ \to \min_{\mathbf{x} \in X, \alpha \in \mathbb{R}}. \tag{38}$$

При решении этой задачи будет найден вектор позиций оптимального портфеля $\mathbf{x}^*$, отвечающий этому портфелю VaR, который равен α^* и оптимальный CVaR, равный $\frac{1}{1-\beta} \tilde{F}(\mathbf{x}^*, \alpha^*)$. Кроме того, если функция потерь $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j)$ линейна по x, и множество X задается линейными неравенствами, тогда можно свести оптимизационную задачу (38) к задаче линейного программирования

$$(1 - \beta)\alpha + J^{-1} \sum_{j=1}^{J} z_j \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^J, \alpha \in \mathbb{R}} \tag{39}$$

при ограничениях

$$\mathbf{x} \in X, \tag{40}$$

$$z_j \geqslant f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - \alpha, \quad z_j \geqslant 0, \quad j = 1, ..., J, \tag{41}$$

где $z_j, j = 1, ..., J$ — искусственные переменные.

Для примера будет рассматриваться проблема оптимизации портфеля с нормально распределенными доходностями. Будет доказано, что в этом случае подходы минимальной вариации, минимального VaR и минимального CVaR эквивалентны, то есть один портфель оптимален для всех трех критериев. Подход минимальной вариации рассматривался выше, он будет использован в качестве базы. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ — это портфель из n активов, а $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ — вектор соответствующих доходностей. Функция потерь портфеля, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{y}^T\mathbf{x}$ определяется как отрицательная доходность. Нужно наложить несколько ограничений:

на средние потери

$$\mu(\mathbf{x}) = E(f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leqslant -R, \tag{42}$$

на доли

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \tag{43}$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n. \tag{44}$$

Рассматриваются три задачи:

Задача 1. $\sigma^2(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$ с ограничениями (42), (43), (44).

Задача 2. β-VaR$(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$ с ограничениями (42), (43), (44).

Задача 3. β-CVaR$(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}$ с ограничениями (42), (43), (44).

Формулировку следующей теоремы можно найти в [10]. Доказательство проведено самостоятельно.

Теорема 3. *Предположим, что потери портфеля $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ нормально распределены. Если $\beta > 0.5$ в задачах 1, 2, 3, то эти задачи эквивалентны: у них один и тот же вектор решений $\mathbf{x}^*$, отвечающий оптимальному портфелю.*

Доказательство.

$$\beta\text{-VaR} = \mu(\mathbf{x}) + \alpha(\beta)\sigma(\mathbf{x}), \alpha(\beta) = \sqrt{2}h^{-1}(2\beta - 1), \tag{45}$$

где $h(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp\{-t^2\} dt$.

Действительно, $\beta = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant(\beta\text{-VaR})} p(\mathbf{y})d\mathbf{y}$. Пусть $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = u$, и так как потери нормально распределены,

$$\beta = \int_{u\leqslant(\beta\text{-VaR})} \tilde{p}(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(\beta\text{-VaR})-\mu(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}} \exp\{-\frac{\tilde{u}^2}{2}\}d\tilde{u} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{(\beta\text{-VaR})-\mu(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})}} exp\{-\frac{\tilde{u}^2}{2}\}d\tilde{u} + \frac{1}{2} =_{(\tilde{u}=\sqrt{2}t)}$$
$$=_{(\tilde{u}=\sqrt{2}t)} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{(\beta\text{-VaR})-\mu(\mathbf{x})}{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})}} \exp\{-t^2\}dt + \frac{1}{2},$$

$$2\beta - 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{(\beta\text{-VaR})-\mu(\mathbf{x})}{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})}} \exp\{-t^2\}dt,$$

$$\frac{(\beta\text{-VaR}) - \mu(\mathbf{x})}{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})} = h^{-1}(2\beta - 1), \text{ если } \beta > 0.5.$$

$$\beta\text{-CVaR} = \mu(\mathbf{x}) + \alpha 1(\beta)\sigma(\mathbf{x}), \alpha 1(\beta) =$$
$$= (\sqrt{2\pi}\exp\{h^{-1}(2\beta - 1)\}^2(1 - \beta))^{-1}, \quad (46)$$

где $h(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp\{-t^2\}dt$.

Действительно,

$$\beta\text{-CVaR} = \frac{1}{1-\beta}\int_{u\geqslant(\beta\text{-VaR})} u\tilde{p}(u)du =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\int_{u\geqslant(\beta\text{-VaR})} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\mathbf{x})}\exp\{-\frac{(u-\mu(\mathbf{x}))^2}{2\sigma^2(\mathbf{x})}\}du =$$

$$\underset{\substack{(u=\mu(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x})t,\\ (\beta\text{-VaR})=\mu(\mathbf{x})+\alpha\sigma(\mathbf{x}))}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\beta)}\int_{t\geqslant\alpha}(\mu(\mathbf{x})+\sigma(\mathbf{x})t)\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt =$$

$$=_{(t=\sqrt{2}z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-\beta)}\int_{z\geqslant\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}(\mu(\mathbf{x})+\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})z)\exp\{-z^2\}dz =$$

$$= \frac{\mu(\mathbf{x})}{\sqrt{\pi}(1-\beta)}\int_{z\geqslant\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}\exp\{-z^2\}dz + \frac{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})}{\sqrt{\pi}(1-\beta)}\int_{z\geqslant\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} z\exp\{-z^2\}dz =$$

$$=_{(k=z^2)} \frac{\mu(\mathbf{x})}{(1-\beta)}(1-\beta) + \frac{\sqrt{2}\sigma(\mathbf{x})}{2\sqrt{\pi}(1-\beta)}\int_{k\geqslant\frac{\alpha^2}{2}}\exp\{-k\}dk =$$

$$= \mu(\mathbf{x}) + (\sqrt{2\pi}(1-\beta)\exp\{\frac{\alpha^2}{2}\})^{-1}\sigma(\mathbf{x}) =$$

$$= (\sqrt{2\pi}\exp\{h^{-1}(2\beta-1)\}^2(1-\beta))^{-1}\sigma(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}).$$

Можно заменить (42) на

$$\mu(\mathbf{x}) = -R. \tag{47}$$

Следовательно, задачи могут быть переписаны в следующем виде:
Задача 1(а). $\sigma^2(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}$ с ограничениями (47), (43), (44).
Задача 2(а). $-R+\alpha(\beta)\sigma(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}$ с ограничениями (47), (43), (44).
Задача 3(а). $-R+\alpha 1(\beta)\sigma(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}$ с ограничениями (47), (43), (44).

Очевидно, что все три задачи эквивалентны, что доказывает теорему.

Удалось подобрать на российском рынке акции с нормально распределенными доходностями. Рассмотрим портфель, состоящий из акций трех компаний: РАО ЕЭС, Ростелекома и Сургутнефтегаза.

Обозначим через $\mathbf{m}$ вектор средних доходностей, а через V матрицу ковариаций доходностей для трех активов.

$\mathbf{m} = (0.001248838; 0.000168551; 0.001523505)$

$$V = \begin{pmatrix} 0.001377956 & 0.000967002 & 0.001048420 \\ 0.000967002 & 0.001204755 & 0.000810129 \\ 0.001048420 & 0.000810129 & 0.001165746 \end{pmatrix}$$

Пусть требуемая доходность $R = 0.001$. Тогда оптимальный портфель – это решение следующей оптимизационной задачи:

$$\mathbf{x}^T V \mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3}$$

$$\mu(\mathbf{x}) = -\mathbf{m}^T \mathbf{x} \leqslant -R,$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j = 1,$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$$

Найдем оптимальный портфель для заданного уровня доходности с помощью программы, описанной выше.

$\mathbf{x}^* = (0; 0.386364; 0.613636)$,

$\sigma^2(\mathbf{x}^*) = (\sigma^*)^2 = 0.001002945$.

Тогда

0.95-VaR $= -R + 1.64485\sigma^* = 0.051091267$,

0.90-VaR $= -R + 1.28155\sigma^* = 0.039585806$.

Соответственно,

0.95-CVaR $= 0.064325084$,

0.90-CVaR $= 0.054579225$.

Как уже было сказано, минимизация CVaR и подсчет VaR могут осуществляться посредством техники линейного программирования. Для этого должна решаться задача:

$$F(\mathbf{x}, \alpha) = (1 - \beta)\alpha + J^{-1} \sum_{j=1}^{J} (-\mathbf{y}_j^T \mathbf{x} - \alpha)^+ \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}}. \qquad (48)$$

Она, в свою очередь, сводится к задаче:

$$(1-\beta)\alpha + J^{-1}\sum_{j=1}^{J} z_j \to \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \mathbf{z}\in\mathbb{R}^J, \alpha\in\mathbb{R}} \tag{49}$$

при ограничениях:

$z_j \geqslant -\mathbf{y}_j^T\mathbf{x} - \alpha, \quad z_j \geqslant 0, \quad j = 1, ..., J,$

где $z_j, j = 1, ..., J$ — искусственные переменные,

и (47), (43), (44).

Существует программа на языке C для решения этой задачи. Нужно иметь сценарии $\mathbf{y}_j, j = 1, .., J$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, распределенные с плотностью $p(\mathbf{y})$, которая является плотностью многомерного нормального распределения $N(\mathbf{m}, V)$ в $\mathbb{R}^3$. Далее рассказывается, каким образом моделируются эти сценарии.

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}|V|}\exp\{-\frac{1}{2}(V^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u})\}. \tag{50}$$

Если вычислить матрицу A такую, что $V^{-1} = A^T A$ (эта матрица находится с помощью алгоритма разложения Холецкого), то замена переменных по формуле $\mathbf{z} = A\mathbf{u}$ приведет к системе независимых нормально распределенных с параметрами (0,1) случайных величин z_1, z_2, z_3 [7]. При этом случайный вектор $\mathbf{y}$ моделируются следующим образом. Из формул $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{m}, \mathbf{z} = A\mathbf{u}$ следует $\mathbf{y} = \mathbf{m} + A^{-1}\mathbf{z}$. А случайный вектор $\mathbf{z}$ имеет координаты z_1, z_2, z_3, независимые нормально распределенные с параметрами (0,1), которые моделируются с помощью пакета Statistica 5.0. Сама задача является вырожденной задачей линейного программирования, которая решается с помощью симплекс-метода [1].

В ней для J= 750 получены следующие результаты:

$\beta = 0.90$

$x^* = (0.002726; 0.385811; 0.611463)$

0.90-VaR = 0.041819

0.90-CVaR = 0.054753;

$\beta = 0.95$

$x^* = (0; 0.386364; 0.613636)$

0.95-VaR = 0.049940

0.95-CVaR = 0.064857.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что два подхода нахождения VaR и оптимального CVaR эквивалентны.

4. На практике...

Как уже было сказано выше, покупка ценных бумаг на вторичном рынке обычно происходит по цене спроса дилера (ask), а продажа по цене предложения (bid). При этом взимается комиссионное вознаграждение. Покажем, как можно учесть это в классической теории.

Допустим, у нас в управлении находится портфель ценных бумаг $x_1, ..., x_n$, и еще в данный момент мы располагаем суммой наличных денег S. То есть,

$$I = S + P = S + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i, \tag{51}$$

где I — величина инвестиции, S — сумма наличными, P — стоимость портфеля, c_i — цена закрытия акции i-го вида (если мы пересматриваем портфель после окончания торговой сессии, то это цена закрытия), q_i — число акций i-го вида, n — количество видов акций. Таким образом, $x_i = \frac{c_i q_i}{P}$.

Итак, пересматриваем портфель, так как он с течением времени перестал быть оптимальным.

$$I^{new} = S^{new} + P^{new} = S^{new} + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{new}, \qquad x_i^{new} = \frac{c_i q_i^{new}}{P^{new}}. \tag{52}$$

Пусть $x_i^{new}, i = 1, ..., n$ — решение задачи Марковица. Нужно учесть комиссионное вознаграждение. Пусть при переформировании портфеля мы сначала продаем, а потом покупаем ценные бумаги.

Пусть c — комиссионные, ask_i — цена спроса (покупки) i-ой бумаги, bid_i — цена предложения (продажи) i-ой бумаги. Итак, при продаже i-ой бумаги получаем $(1-c)bid_i q_i$, а при покупке j-ой бумаги тратим $(1+c)ask_j q_j$.

Сортируем акции по $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ по возрастанию, так как сортировать акции по $\frac{\Delta x_i^{new}}{x_i}$ тоже самое, что сортировать по $\frac{\Delta q_i^{new}}{q_i}$.

Докажем это:
$\Delta x_i^{new} = c_i(\frac{q_i^{new}}{P^{new}} - \frac{q_i}{P})$
$\frac{\Delta q_j}{q_j} \geqslant \frac{\Delta q_i}{q_i} \leftrightarrow \frac{c_j q_j^{new}/P^{new}}{c_j q_j} \geqslant \frac{c_i q_i^{new}/P^{new}}{c_i q_i} \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \frac{c_j(q_j^{new}/P^{new} - q_j/P)}{c_j q_j/P} \geqslant \frac{c_i(q_i^{new}/P^{new} - q_i/P)}{c_i q_i/P}$, то есть $\frac{\Delta x_j}{x_j} \geqslant \frac{\Delta x_i}{x_i}$.

Предположим, что мы продаем первые m и покупаем последние $(n-m)$ бумаг.

$$S^{new} = S + (1-c)\sum_{sell(m)}(q_i - q_i^{new})bid_i - (1+c)\sum_{buy(n-m)}(q_i^{new} - q_i)ask_i \quad (53)$$

$$S^{new} + (1-c)\sum_{sell(m)} q_i^{new} bid_i + (1+c)\sum_{buy(n-m)} q_i^{new} ask_i =$$
$$= S + (1-c)\sum_{sell(m)} q_i bid_i + (1+c)\sum_{buy(n-m)} q_i ask_i = f(m) \quad (54)$$

$$S^{new} + (1-c)\sum_{sell(m)} \frac{x_i^{new} bid_i P^{new}}{c_i} + (1+c)\sum_{buy(n-m)} \frac{x_i^{new} ask_i P^{new}}{c_i} = f(m) \quad (55)$$

$$S^{new} + P^{new}((1-c)\sum_{sell(m)} \frac{x_i^{new} bid_i}{c_i} + (1+c)\sum_{buy(n-m)} \frac{x_i^{new} ask_i}{c_i}) = f(m). \quad (56)$$

Отношение $\frac{S^{new}}{I^{new}}$ обычно устанавливается инвестором, пусть в нашем случае оно равно r (r известно).

$$S^{new} = I^{new} r,\ P^{new} = I^{new}(1-r). \quad (57)$$

Учтем (57) и получим

$$I^{new} r + I^{new}(1-r)((1-c)\sum_{sell(m)} \frac{x_i^{new} bid_i}{c_i} + (1+c)\sum_{buy(n-m)} \frac{x_i^{new} ask_i}{c_i}) = f(m) \quad (58)$$

$$I^{new}(r+(1-r)((1-c)\sum_{sell(m)}\frac{x_i^{new}bid_i}{c_i}+(1+c)\sum_{buy(n-m)}\frac{x_i^{new}ask_i}{c_i})) = f(m). \tag{59}$$

Учитывая (59), получаем

$$I^{new} = I - c\sum_{sell(m)} q_i bid_i + c\sum_{buy(n-m)} q_i ask_i + c\sum_{sell(m)}\frac{x_i^{new}bid_i}{c_i} - c\sum_{buy(n-m)}\frac{x_i^{new}ask_i}{c_i} \tag{60}$$

$$I^{new} - c(1-r)I^{new}(\textstyle\sum_{sell(m)}\frac{x_i^{new}bid_i}{c_i} - \sum_{buy(n-m)}\frac{x_i^{new}ask_i}{c_i}) =$$

$$= I - c\sum_{sell(m)} q_i bid_i + c\sum_{buy(n-m)} q_i ask_i. \tag{61}$$

Отсюда

$$I^{new} = \frac{I - c\sum_{sell(m)} q_i bid_i + c\sum_{buy(n-m)} q_i ask_i}{1 - c(1-r)\sum_{sell(m)}\frac{x_i^{new}bid_i}{c_i} + c(1-r)\sum_{buy(n-m)}\frac{x_i^{new}ask_i}{c_i}}. \tag{62}$$

Предполагаем, что m=1. Находим I^{new}; считаем $q_1^{new} - q_1$, чтобы убедиться, что $q_1^{new} < q_1$; проверяем, выполняется ли, что $q_2^{new} \geqslant q_2$. Если выполняется, то $m^{new} = 1$, иначе пусть $m = 2$. Снова находим I^{new} и т.д.

В результате находим те ценные бумаги, которые нужно продавать и те ценные бумаги, которые нужно покупать; таким образом, мы получаем оптимальный портфель, учитывающий реальные факторы.

Приведем пример, показывающий, что оптимальный портфель из классической теории и оптимальный портфель, учитывающий реальные факторы, действительно отличаются. Рассмотрим портфель, состоящий из акций пяти компаний: Сбербанка, Мосэнерго, ЛУКойла, Ростелекома и Сургутнефтегаза.

Начальный портфель (количество акций):

Сбербанк 3,296
Мосэнерго 4,192,646

ЛУКойл 19,041
Ростелеком 140,869
Сургутнефтегаз 0

Классический оптимальный портфель:

Сбербанк 2,393 (-903)
Мосэнерго 3,982,529 (-210,117)
ЛУКойл 19,713 (+672)
Ростелеком 220,978 (+80,109)
Сургутнефтегаз 30,623 (+30,623)

Портфель, учитывающий реальные факторы (комиссия — 10%):

Сбербанк 2,307 (-989)
Мосэнерго 3,840,535 (-352,111)
ЛУКойл 19,010 (-31)
Ростелеком 213,099 (+72,230)
Сургутнефтегаз 29,531 (+29,531)

Список литературы

[1] Арушанян И.О., Чижонков Е.В. Материалы семинарских занятий по курсу «Методы вычислений». Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 1999.

[2] Гранатуров В.М. Экономический риск. М., 1999.

[3] Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М., 1994.

[4] Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. М., 1999.

[5] Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., 1967.

[6] Хохлов Н.В. Управление риском. М., 1999.

[7] Чернецкий В.И. Математическое моделирование стохастических систем. Петрозаводск, 1994.

[8] Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джеффри В. Инвестиции. М., 1998.

[9] Jorion Philippe. Value-at-Risk: the new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill, 2000.

[10] Uryasev Stanislav, Rockafellar R. Tyrrell. Optimization of Conditional Value-at-Risk. Research Report. 1999.