Об эквивалентности частичных автоматов

З. Максимович

Рассматривается несколько типов отношений эквивалентности между частичными автоматами, а также между состояниями одного и того же частичного автомата в классе всех частичных автоматов, у которых области определения функций переходов и выходов тождественны.

Введение

Если смотреть на частичные автоматы как на преобразователи входных последовательностей и сравнивать их поведение, то, как и в случае конечных автоматов [1], приходим к ряду отношений эквивалентности между автоматами, а также между состояниями одного и того же частичного автомата. Здесь мы ограничиваемся частичными автоматами, у которых области определения функций переходов и выходов тождественны.

Свойство «частичности» автоматов позволяет ввести два типа соответствий между их состояниями: неотличимость и сильную неотличимость, а между частичными автоматами три типа отношений: слабую неотличимость, неотличимость и сильную неотличимость. Соответствия неотличимости и сильной неотличимости, в свою очередь, позволяют рассматривать два типа приведенных частичных автоматов: приведенные и слабо приведенные частичные автоматы. В настоящей статье особое внимание уделяется слабой приведенности.

Некоторые рассматриваемые здесь утверждения в виде подобных формулировок имеют место для «полных» автоматов. Вводится понятие частичного автомата, который оптимально G-моделирует данный частичный автомат, и доказывается, что все такие частичные автоматы являются приведенными. Наконец, показывается, что сильная неотличимость в случае частичных автоматов мало отличается от отношения неотличимости между автоматами. Этот факт иллюстрируется доказательством одной теоремы, которая имеет место для «полных» автоматов.

1. Основные понятия

Под *частичным отображением* или *частичной функцией* f с множества A в множество B понимаем любое соответствие (бинарное отношение) f между множествами A и B, то есть любое подмножество f множества $A \times B$, которое для любого $a \in A$ удовлетворяет условию $|f(a)| \leqslant 1$, где $f(a) = \{\, b \in B | \, (a,b) \in f\}$. Символ $f : A \to B$ будет обозначать, что f — частичная функция с A в B; при этом не ограничиваем стандартное употребление этого символа для функции (полного отображения), поскольку функцию можно понимать как частный случай частичной функции. Если $f\colon A \to B$ — частичная функция, то в случае, когда $f(a) = b$, то есть, когда существует $b \in B$ такое, что $f(a) = \{b\}$, говорим, что f определена в a. Факт существования значения $f(a)$ обозначаем через $\exists f(a)$; в противном случае пишем $\neg f(a)$. Также обозначим через D_f множество $\{a \in A \,|\, \exists f(a)\}$.

Набор $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ называется *конечным частичным автоматом*, если A, Q, B — конечные множества, а $\varphi\colon Q \times A \to Q$ и $\psi\colon Q \times A \to B$ — частичные функции. Множества A, Q, B называются соответственно *входным алфавитом*, *алфавитом состояний* и *выходным алфавитом* частичного автомата V. Функция φ называется *функцией переходов*, а функция ψ — *функцией выходов* частичного автомата V.

Если $D_\varphi = D_\psi = D_V$, то частичный автомат V называется *частичным автоматом, у которого области определения функций переходов и выходов тождественны*. В дальнейшем будем рассматривать только такие частичные автоматы, и поэтому для краткости вместо фразы «частичный автомат, у которого области определения функций переходов и выходов тождественны» будем просто писать частичный автомат.

Понятия, которые для частичных автоматов вводятся таким же способом, как и для конечных автоматов, будем считать известными и не будем приводить их определения.

Пусть C — некоторый конечный алфавит. Через C^* обозначим множество всех слов в алфавите C, через C^+ — множество всех непустых слов из C^*, через Λ — пустое слово, а через $|\alpha|$ — длину произвольного слова $\alpha \in C^*$. Также для любого $\alpha \in C^+$ через $\alpha(i)$, $1 \leqslant i \leqslant |\alpha|$, обозначим i-тую букву этого слова. Для любого $\alpha \in C^+$, $|\alpha| = n$, и любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, через $\alpha]_i$ и $\alpha[_i$ обозначим соответственно начало и конец слова α длины i, то есть $\alpha]_i = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(i)$ и $\alpha[_i = \alpha(n-i+1)\alpha(n-i+2)\ldots\alpha(n)$; положим также, что $\alpha]_0 = \alpha[_0 = \Lambda$.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — частичный автомат. Слова в алфавитах A, Q и B называются соответственно *входными словами*, *словами состояний* и *выходными словами* частичного автомата V. Функции переходов и выходов частичного автомата V распространим на частичные функции с множества $Q \times A^*$ в множества Q и B соответственно следующим способом. Оставляя те же обозначения для новых функций, для любых $\alpha \in A^*$ и $a \in A$ положим, что:

1) $\varphi(q, \Lambda) = q$, $\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a)$, если $\exists\varphi(q, \alpha)$ и $\exists\varphi(\varphi(q, \alpha), a)$, и $\neg\varphi(q, \alpha a)$ в противном случае;

2) $\psi(q, \Lambda) = \Lambda$, $\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a)$, если $\exists\varphi(q, \alpha)$ и $\exists\psi(\varphi(q, \alpha), a)$, и $\neg\psi(q, \alpha a)$ в противном случае.

Пусть $\hat{D}_\varphi = \{(q, \alpha) \in Q \times A^+ \,|\, \exists\varphi(q, \alpha)\}$ и $\hat{D}_\psi = \{(q, \alpha) \in Q \times A^+ \,|\, \exists\psi(q, \alpha)\}$. Из $D_\varphi = D_\psi = D_V$ следует очевидно, что $\hat{D}_\varphi = \hat{D}_\psi = \hat{D}_V$.

Также для любого частичного автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ введем частичные функции $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ следующим способом. Частичный автомат V, находясь в состоянии q, перерабатывает входное слово $\alpha \in A^+$ в слово состояний

$$\overline{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_0)\varphi(q, \alpha]_1)\ldots\varphi(q, \alpha]_{|\alpha|})$$

и в выходное слово

$$\overline{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2)\ldots\psi(q, \alpha]_{|\alpha|}),$$

если $\exists\varphi(q,\alpha)$, или, что то же самое, если $\exists\psi(q,\alpha)$; в противном случае $\neg\overline{\varphi}(q,\alpha)$ и $\neg\overline{\psi}(q,\alpha)$. Под *функционированием частичного автомата* V понимаем тернарное отношение

$$F_V = \{(\alpha, \overline{\varphi}(q,\alpha), \overline{\psi}(q,\alpha)) \,|\, \alpha \in A^*, q \in Q \text{ и } \exists\varphi(q,\alpha)\}.$$

В последующем нам также понадобится понятие изоморфизма двух частичных автоматов. Определим его здесь.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A', Q', B', \varphi', \psi')$ — частичные автоматы. Тройка биекций (f, g, h), где $f : A \to A'$, $g : Q \to Q'$ и $h : B \to B'$, называется *изоморфизмом* V на V', если $(q, a) \in D_V$ тогда и только тогда, когда $(g(q), f(a)) \in D_{V'}$ и при этом

$$g(\varphi(q,a)) = \varphi'(g(q), f(a)) \quad \text{и} \quad h(\psi(q,a)) = \psi'(g(q), f(a))$$

для любого $(q, a) \in D_V$. Если существует изоморфизм частичного автомата V на частичный автомат V', то говорим, что частичные автоматы V и V' являются *изоморфными*.

2. Отличимость состояний частичного автомата

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ — два частичных автомата, $q \in Q$ и $q' \in Q'$ — некоторые их состояния. Говорим, что слово $\alpha \in A^+$ *различает* состояния q и q', если $\exists\psi(q,\alpha)$, $\exists\psi'(q',\alpha)$ и $\psi(q,\alpha) \neq \psi'(q',\alpha)$. Состояния q и q' являются *отличимыми*, если существует слово из A^+, которое различает эти состояния. Состояния q и q' называются *неотличимыми*, если не являются отличимыми, то есть, если для любого слова $\alpha \in A^+$, такого, что $(q,\alpha) \in \hat{D}_V$ и $(q',\alpha) \in \hat{D}_{V'}$, выполнено $\overline{\psi}(q,\alpha) = \overline{\psi'}(q',\alpha)$.

Отличимость состояний можно рассматривать и в случае, когда $V = V'$. Тогда можно говорить об отношениях отличимости и неотличимости на множестве состояний Q автомата V. Следующий пример показывает, что отношение неотличимости не является транзитивным.

Пример 1. Нетрудно видеть, что состояния q_1 и q_2, а также состояния q_2 и q_3 частичного автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где

$$A = \{a, b\}, \quad Q = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad B = \{1, 2\},$$
$$(\varphi, \psi)(q_1, a) = (q_2, 1), \quad (\varphi, \psi)(q_2, b) = (q_3, 1), \quad (\varphi, \psi)(q_3, a) = (q_3, 2),$$

являются неотличимыми, тогда как q_1 и q_3 являются отличимыми.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ — два частичных автомата. Состояния $q \in Q$ и $q' \in Q'$ являются *сильно неотличимыми*, $q \sim q'$, если они неотличимые и если для любого слова $\alpha \in A^+$ удовлетворено, что $\exists\psi(q, \alpha)$ тогда и только тогда, когда $\exists\psi(q', \alpha)$; в противном случае говорим, что состояния q и q' *слабо отличимые*. Сильная неотличимость является соответствием между множествами Q и Q' и зависит от того, какие автоматы V и V' взяты, поэтому вместо $\sim$ было бы правильнее писать, например, ${}_V{\sim}_{V'}$, но мы не будем делать этого, поскольку из контекста всегда будет ясно, о каких автоматах V и V' идет речь. Если $V = V'$, то соответствие $\sim$ является бинарным отношением в Q; ясно, что в таком случае отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Говорим, что частичный автомат является (*слабо приведенным*) *приведенным*, если любая пара его различных состояний является парой (слабо отличимых) отличимых состояний.

Заметим, что для «полных» автоматов понятия сильной неотличимости и неотличимости совпадают.

Длина самого короткого слова, которое различает два отличимых состояния «полного» автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, не больше $|Q| - 1$, причем эту оценку нельзя в общем случае уменьшить. Рассмотрим эту оценку в случае частичных автоматов.

Пусть Q — некоторое множество. Обозначим через $\mathcal{V}(Q)$ множество всех частичных автоматов, у которых Q является множеством состояний.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| \geqslant 2$, — некоторый частичный автомат. Пусть q и q' — пара отличимых состояний автомата V. Тогда обозначим

$$n(q, q'; V) = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in A^+, (q, \alpha), (q', \alpha) \in \hat{D}_V \text{ и } \overline{\psi}(q, \alpha) \neq \overline{\psi}(q', \alpha)\}.$$

Также пусть

$$n(Q) = \max\{n(q, q'; V) \mid V \in \mathcal{V}(Q),\\ q \text{ и } q' \text{ — пара отличимых состояний из } V\}.$$

Теорема 1. *Для любого конечного множества Q, $|Q| \geqslant 2$, имеет место соотношение $n(Q) = |Q|(|Q| - 1)$.*

Доказательство. Пусть Q, $|Q| \geqslant 2$ — некоторое конечное множество, и пусть $m = |Q|(|Q| - 1)$. Покажем сначала, методом от противного, что отношение $n(Q) \leqslant m$ верно.

Предположим, что существуют $V = (A, Q, B, \varphi, \psi) \in \mathcal{V}(Q)$ и пара q_0' и q_0'' отличимых состояний из V, такие, что длина любого слова $\alpha \in A^*$, различающего q_0' и q_0'', больше m. Пусть α_0 — некоторое слово длины $n_0 = n(q_0', q_0''; V)$, различающее состояния q_0' и q_0''. Поскольку $n_0 > m$, то в последовательности $(q_0', q_0''), (q_1', q_1''), \ldots, (q_{n_0-1}', q_{n_0-1}'')$, где $(q_i', q_i'') = (\varphi(q_0', \alpha_0]_i), \varphi(q_0'', \alpha_0]_i))$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n_0 - 1$, один из ее членов повторяется или $q_j' = q_j''$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n_0 - 1$. Но если $q_j' = q_j''$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n_0 - 1$, то слово α_0 не может различать состояния q_0' и q_0'', и мы приходим к противоречию. А если $(q_{l_1}', q_{l_1}'') = (q_{l_2}', q_{l_2}'')$ для некоторых $0 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant n_0 - 1$, то слово $\alpha_0' = \alpha_0]_{l_1} \alpha_0[_{n_0 - l_2}$ различает состояния q_0' и q_0'', и поскольку $|\alpha_0'| < |\alpha_0|$, то мы опять приходим к противоречию.

Покажем теперь, что $n(Q) \geqslant m$. Пусть $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Упорядочим некоторым способом все пары различных элементов множества Q, и пусть $(q_{i_1}, q_{j_1}), (q_{i_2}, q_{j_2}), \ldots, (q_{i_m}, q_{j_m})$ — полученная таким способом последовательность. Пусть также $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ и $B = \{1, 2\}$. Построим частичный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, такой, что $\varphi(q_{i_l}, l) = q_{i_{l+1}}$, $\varphi(q_{j_l}, l) = q_{j_{l+1}}$, $\psi(q_{i_l}, l) = \psi(q_{j_l}, l) = 1$ $(1 \leqslant l < m)$ $\psi(q_{i_m}, m) = 1$ и $\psi(q_{j_m}, m) = 2$. Очевидно, что $n(q_{i_1}, q_{j_1}; V) = m$. Следовательно, $n(Q) \geqslant m$, а поскольку имеет место и соотношение $n(Q) \leqslant m$, то получаем, что $n(Q) = m$. Теорема доказана.

Длина самого короткого слова, которое различает два отличимых состояния двух автоматов, не больше $|Q_1| + |Q_2| - 1$ ([1]), причем эту оценку нельзя в общем случае уменьшить. Рассмотрим эту оценку в случае частичных автоматов.

Пусть $V_1 = (A, Q_1, B, \varphi_1, \psi_1)$ и $V_2 = (A, Q_2, B, \varphi_2, \psi_2)$ — некоторые частичные автоматы, и $q_1 \in Q_1$ и $q_2 \in Q_2$ — пара отличимых состояний этих автоматов. Обозначим

$$n_{V_1,V_2}(q_1, q_2) = \\ = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in A^+, \exists(q_1, \alpha), \exists(q_2, \alpha) \text{ и } \overline{\psi_1}(q_1, \alpha) \neq \overline{\psi_2}(q_2, \alpha)\}.$$

Также, пусть

$$n(Q_1, Q_2) = \max\{n_{V_1,V_2}(q_1, q_2) \mid V_1 \in \mathcal{V}(Q_1), V_2 \in \mathcal{V}(Q_2),\ \ q_1 \in Q_1 \text{ и} \\ q_2 \in Q_2 \text{ — пара отличимых состояний автоматов } V_1 \text{ и } V_2\}.$$

Для частичных автоматов действительно следующее утверждение, доказательство которого практически полностью получается повторением основных рассуждений доказательства предыдущей теоремы, и при этом оценку длины «минимального различающего слова», как и в Теореме 1, нельзя уменьшить.

Теорема 2. *Для любых конечных множеств Q_1 и Q_2 имеет место соотношение $n(Q_1, Q_2) = |Q|\,|Q'|$.*

Говорим, что частичный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ является *слабо вложимым* в частичный автомат $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, и пишем в таком случае, что $V \leqslant V'$, если для произвольных состояний $q \in Q$ и слова $\alpha \in A^*$, таких, что $\exists\psi(q, \alpha)$, существует состояние $q' \in Q'$ такое, что $\exists\psi(q', \alpha)$ и $\overline{\psi'}(q', \alpha) = \overline{\psi}(q, \alpha)$.

Про частичный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ говорим, что он является (*сильно вложимым*) *вложимым* в частичный автомат $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, и пишем ($V \trianglelefteq V'$) $V \preceq V'$, если для произвольного состояния $q \in Q$ существует (сильно неотличимое) неотличимое состояние q' автомата V'. Заметим, что понятия вложимости и сильной вложимости совпадают для автоматов.

Очевидно, что из $V \trianglelefteq V'$ следует как $V \preceq V'$, так и $V \leqslant V'$. Легко убедиться, что из этих трех отношений только отношения $\trianglelefteq$ и $\leqslant$ являются транзитивными. Отношение вложимости для автоматов не является симметричным [1]. Покажем, что такое утверждение имеет место и для отношений $\trianglelefteq$ и $\leqslant$.

Теорема 3. *Пусть* $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|B| \geqslant 2$ — *некоторый частичный автомат. Тогда существует частичный автомат* $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, *такой, что* $V \trianglelefteq V'$ *и* $V' \ntrianglelefteq V$.

Доказательство. Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|B| \geqslant 2$ — некоторый частичный автомат и $n = |Q|$. Построим частичный автомат $V'' = (A, Q'', B, \varphi'', \psi'')$, который не является слабо вложимым в V. Для этого фиксируем некоторое $a \in A$. Для любого $m \in \mathbf{N}$ через a^m обозначим слово длины m, у которого все буквы равны a. Для любого $q \in Q$ пусть $w_a(q)$ — самое длинное слово вида a^m, такое, что $m \leqslant n$ и $\exists \psi(q, a^m)$. Пусть $W_a = \{\overline{\psi}(q, w_a(q)) \,|\, q \in Q\}$. Поскольку $|W_a| \leqslant n$, $|B| \geqslant 2$ и соотношение $2^n > n$ удовлетворено для любого натурального n, то существует $\beta \in B^+$, $|\beta| = n$, такое, что $\beta \notin W_a$. Пусть $Q'' = \{q''_0, \ldots, q''_{n-1}\}$. Определим функции φ'' и ψ'' следующим способом: $\varphi''(q''_i, a) = q''_{i+1 (\mathrm{mod\ n})}$ и $\psi''(q''_i, a) = \beta(i)$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Ясно, что для состояния q''_0 и слова a^n не существует состояние $q \in Q$, такое, что $\overline{\psi}(q, a^n) = \overline{\psi''}(q''_0, a^n)$, и следовательно, автомат V'' не является слабо вложимым в V. Обозначим через V' сумму частичных автоматов V и V''. Поскольку автомат V'' слабо вложим в автомат V', то из-за транзитивности отношения слабой вложимости автомат V' не может быть слабо вложимым в автомат V. Ясно также, что автомат V является сильно вложимым в автомат V'. Теорема доказана.

Легко убедиться, что и отношение $\preceq$ не является симметричным.

3. Об эквивалентности частичных автоматов

Рассмотрим проблему эквивалентности частичных автоматов, у которых множества определения функций переходов и выходов тождественны. Введем несколько необходимых понятий.

Частичные автоматы V и V' называются *слабо неотличимыми*, $V \sim V'$, если $V \leqslant V'$ и $V' \leqslant V$. Частичные автоматы V и V' называются *сильно неотличимыми*, $V \approx V'$, если $V \trianglelefteq V'$ и $V' \trianglelefteq V$. Легко убедиться, что введенные отношения являются отношениями эквивалентности. Очевидно, что аналогичное отношение в случае $\preceq$ нет смысла вводить, поскольку такое отношение не являлось бы транзитивным.

Из сильной неотличимости частичных автоматов V и V' очевидно следует их слабая неотличимость. Обратное утверждение не имеет места, поскольку уже в классе «полных» автоматов такое утверждение было бы неверным.

Для сильно связных автоматов понятия слабой вложимости, сильной вложимости, слабой неотличимости и сильной неотличимости совпадают, то есть для сильно связных автоматов верно, что из слабой вложимости следует их неотличимость [1]. Как показывает следующий пример, это не имеет места для частичных автоматов.

Пример 2. Пусть даны автоматы $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, где

$$Q = \{q_1, q_2\}, \quad Q' = \{q_1', q_2'\}, \quad A = \{a, b\}, \quad B = \{1, 2\},$$
$$\varphi(q_1, a) = q_1, \quad \varphi(q_1, b) = q_2, \quad \varphi(q_2, b) = q_1,$$
$$\varphi'(q_1', a) = q_1', \quad \varphi'(q_1', b) = q_2', \quad \varphi'(q_2', b) = q_1', \quad \varphi'(q_2', a) = q_2'$$
$$\psi(q_1, a) = 1, \quad \psi(q_1, b) = 1, \quad \psi(q_2, b) = 1$$
$$\psi'(q_1', a) = 1, \quad \psi'(q_1', b) = 1, \quad \psi'(q_2', b) = 1, \quad \psi'(q_2', a) = 2.$$

Частичные автоматы V и V' являются сильно связными. Легко убедиться, что автоматы V и V' не являются слабо неотличимыми, и следовательно, не являются сильно неотличимыми, но автомат V является слабо вложимым в автомат V'.

Фиксируем некоторое счетное множество $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Обозначим через $P(A, B)$ множество всех частичных автоматов, у которых A — входной алфавит и B — выходной алфавит, и у которых множество состояний является подмножеством множества $\mathcal{Q}$. Отношения слабой неотличимости и сильной неотличимости разбивают множество $P(A, B)$ на классы эквивалентности.

Теорема 4. *Если $|B| \geqslant 2$, тогда число классов эквивалентности, на которые множество $P(A, B)$ разбивает отношение слабой неотличимости, счетное.*

Доказательство. Пусть V — произвольный частичный автомат из $P(A, B)$. На основании Теоремы 3 существует последовательность частичных автоматов $V = V_1, V_2, \dots$ из $P(A, B)$, такая, что $V_{i+1} \not\trianglelefteq V_i$ и $V_i \trianglelefteq V_{i+1}$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Возьмем произвольные $j_1, j_2 \in \mathbf{N}$, $j_1 < j_2$.

Покажем, что $V_{j_1} \nsim V_{j_2}$. Предположим противоположное, то есть, что $V_{j_1} \sim V_{j_2}$. Но тогда $V_{j_2} \leqslant V_{j_1}$, и поскольку $V_{j_1} \leqslant V_{j_1+1} \leqslant \cdots \leqslant V_{j_2-2} \leqslant V_{j_2-1}$, то $V_{j_1} \leqslant V_{j_2-1}$ и, следовательно, $V_{j_2} \leqslant V_{j_2-1}$. Из полученного противоречия следует данное утверждение.

Пусть $F_V \subseteq A^* \times Q^* \times B^*$ — функционирование частичного автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. Пусть $G_V = \{(\alpha, \beta) : (\exists u \in Q^*)\, (\alpha, u, \beta) \in F_V\}$.

Лемма 1. *Если у частичного автомата* $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ *есть хотя бы одна пара различных неотличимых состояний, тогда существует частичный автомат* $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ *такой, что* $G(V) \subseteq G(V')$ *и* $|Q'| < |Q|$.

Доказательство. Пусть q_1 и q_2 — два неотличимых состояния частичного автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. Построим искомый частичный автомат V', у которого $Q' = Q \setminus \{q_2\}$, следующим способом. Для любых $q \in Q'$ и $a \in A$, таких, что $(q, a) \in D_V$, положим, что $\psi'(q, a) = \psi(q, a)$, а также что $\varphi'(q, a) = \varphi(q, a)$, если $\varphi(q, a) \neq q_2$ и $\varphi'(q, a) = q_1$, если $\varphi'(q, a) = q_2$. Также, если $\alpha = \alpha' a$ ($\alpha' \in A^*$, $a \in A$) такое слово, что $\exists\varphi(q_1, \alpha')$, $\exists\varphi(q_2, \alpha)$ и $\neg\varphi(q_1, \alpha)$, то положим, что $\varphi'(\varphi(q_1, \alpha'), a) = \varphi(q_2, \alpha)$ и $\psi'(\varphi(q_1, \alpha'), a) = \psi(q_2, \alpha)$. Заметим, что из того, как определена функция ψ' следует, что если $\exists\varphi(q_2, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in A^+$, то $\overline{\psi'}(q_1, \alpha) = \overline{\psi}(q_2, \alpha)$.

Поскольку $|Q'| = |Q| - 1 < |Q|$, то остается еще показать, что $G(V) \subseteq G(V')$. Пусть $(\alpha, \beta) \in G(V)$ и пусть $|\alpha| = n$. Если $\varphi(q, \alpha]_m) \neq q_2$ для любого $0 \leqslant m < n$, то очевидно, что $(\alpha, \beta) \in G(V')$. Поэтому предположим, что существует

$$i_0 = \min\{i \,|\, 0 \leqslant i < n \wedge \varphi(q, \alpha]_i) = q_2\}.$$

Тогда $\beta = \overline{\psi}(q, \alpha]_{i_0})\overline{\psi}(q_2, \alpha[_{n-i_0}) = \overline{\psi'}(q, \alpha]_{i_0})\overline{\psi'}(q_1, \alpha[_{n-i_0})$ и, следовательно, $(\alpha, \beta) \in G(V')$.

Про частичный автомат V' говорим, что он *оптимально G-моделирует* частичный автомат V, если $G_V \subseteq G_{V'}$ и если у любого автомата V'', такого, что $G_V \subseteq G_{V''}$, состояний не меньше, чем у автомата V'. Поскольку множество всех неизоморфных частичных автоматов из $P(A, B)$, у которых не больше состояний, чем у автомата V, конечно, то частичный автомат, который оптимально G-моделирует данный автомат, всегда существует, при этом ясно, что в общем случае такой автомат не единственный.

Теорема 5. *Все частичные автоматы, которые оптимально G-моделируют частичный автомат V, являются частичными автоматами приведенного вида.*

Доказательство. Предположим противоположное, то есть, что существует частичный автомат $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$, оптимально G-моделирующий частичный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, который не является частичным автоматом приведенного вида. Тогда у V' существуют хотя бы два неотличимых состояния. Теперь из Леммы 1 следует, что существует частичный автомат $V'' = (A, Q'', B, \varphi'', \psi'')$, такой, что $|Q''| < |Q'|$ и $G_{V'} \subseteq G_{V''}$. Поскольку V' оптимально G-моделирует V, то также имеет место соотношение $G_V \subseteq G_{V'}$. Следовательно, получаем, что $G_V \subseteq G_{V''}$. Но поскольку $|Q''| < |Q'|$, то V' не является частичным автоматом, оптимально G-моделирующим V. Из полученного противоречия следует утверждение теоремы.

В оставшейся части работы покажем, что понятие сильной неотличимости частичных автоматов и соответствующее понятие в случае «полных» автоматов, понятие неотличимости, существенно не различаются. Образно говоря, введение в игру «частичности» (в таком смысле, в каком она здесь трактуется) не добавляет к соответствующей картине никаких принципиально новых интересных моментов.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — частичный автомат. Говорим, что вход $a \in A$ является *существенным* для V, если $(q, a) \in D_V$ для некоторого $q \in Q$; в противном случае этот вход назовем *несущественным* для V.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi) \in P(A, B)$ — частичный автомат, и $\hat{a} \notin A$, $\hat{q} \notin \mathcal{Q}$ и $\hat{b}_1, \hat{b}_2 \notin B$ — некоторые фиксированные элементы. Введем обозначения: $\hat{A} = A \cup \{\hat{a}\}$, $\hat{Q} = Q \cup \{\hat{q}\}$ и $\hat{B} = B \cup \{\hat{b}_1, \hat{b}_2\}$. Автомат $\overline{V} = (\hat{A}, \hat{Q}, \hat{B}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$ называется $(\hat{a}, \hat{q}, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$-*пополнением* автомата V, если

1) $\hat{\varphi}(q, a) = \varphi(q, a)$ и $\hat{\psi}(q, a) = \psi(q, a)$ для любых $(q, a) \in D_V$;

2) $\hat{\varphi}(q, a) = \hat{q}$ и $\hat{\psi}(q, a) = \hat{b}_1$ для любых $(q, a) \in (A \times Q) \backslash D_V$;

3) $\hat{\varphi}(\hat{q}, a) = \hat{\varphi}(q, \hat{a}) = \hat{q}$, $\hat{\psi}(q, \hat{a}) = \hat{b}_1$ и $\hat{\psi}(\hat{q}, a) = \hat{b}_2$ для любых $a \in \hat{A}$ и $q \in Q$.

Теорема 6. *Если V и V' частичные автоматы, то V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\overline{V}$ и $\overline{V'}$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ и $V' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ — некоторые частичные автоматы. Предположим сначала, что V и V' изоморфны, и пусть (f, g, h) — некоторый изоморфизм V на V'. Определим: $\hat{f}(\hat{a}) = \hat{a}$ и $\hat{f}(a) = f(a)$ для любого $a \in A$; $\hat{g}(\hat{q}) = \hat{q}$ и $\hat{g}(q) = g(q)$ для любого $q \in Q$; $\hat{h}(\hat{b}_1) = \hat{b}_1$, $\hat{h}(\hat{b}_2) = \hat{b}_2$ и $\hat{h}(b) = h(b)$ для любого $b \in B$. Покажем, что $(\hat{f}, \hat{g}, \hat{h})$ изоморфизм автомата $\overline{V}$ на автомат $\overline{V'}$. Поскольку (f, g, h) изоморфизм V на V', то $(q, a) \in D_V$ тогда и только тогда, когда $(g(q), f(a)) \in D_{V'}$, и следовательно, имеем, что

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) &= g(\varphi(q, a)) = \varphi'(g(q), f(a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)),\\
\hat{h}(\hat{\psi}(q, a)) &= h(\psi(q, a)) = \psi'(g(q), f(a)) = \hat{\psi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a))
\end{aligned}$$

для любого $(q, a) \in D_V$. Также, поскольку $(q, a) \in (A \times Q) \backslash D_V$ тогда и только тогда, когда $(g(q), f(a)) \in (A \times Q') \backslash D_{V'}$, то

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) &= \hat{g}(\hat{q}) = \hat{q} = \hat{\varphi}'(g(q), f(a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)),\\
\hat{h}(\hat{\psi}(q, a)) &= \hat{h}(\hat{b}_1) = \hat{b}_1 = \hat{\psi}'(g(q), f(a)) = \hat{\psi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a))
\end{aligned}$$

для любого $(q, a) \in (A \times Q) \backslash D_V$. Наконец,

$$\begin{gathered}
\hat{g}(\hat{\varphi}(\hat{q}, a)) = \hat{g}(\hat{\varphi}(q, \hat{a})) = \hat{g}(\hat{q}) = \hat{q} = \hat{\varphi}'(\hat{g}(\hat{q}), \hat{f}(a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(\hat{a})),\\
\hat{h}(\hat{\psi}(q, \hat{a})) = \hat{b}_1 = \hat{\psi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(\hat{a})) \quad \text{и} \quad \hat{h}(\hat{\psi}(\hat{q}, a)) = \hat{b}_2 = \hat{\psi}'(\hat{g}(\hat{q}), \hat{f}(a))
\end{gathered}$$

для любых $a \in \hat{A}$ и $q \in Q$.

Предположим теперь, что автоматы $\overline{V}$ и $\overline{V'}$ изоморфны, и пусть $(\hat{f}, \hat{g}, \hat{h})$ — некоторый изоморфизм автомата $\overline{V}$ на автомат $\overline{V'}$. Покажем, что $\hat{g}(\hat{q}) = \hat{q}$, $\hat{h}(\hat{b}_1) = \hat{b}_1$ и $\hat{h}(\hat{b}_2) = \hat{b}_2$. Пусть $a' \in \hat{A}$ такое, что $\hat{f}(a') = \hat{a}$. Поскольку $\hat{g}(\hat{q}) = \hat{g}(\hat{\varphi}(\hat{q}, a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(\hat{q}), \hat{f}(a))$, то $\hat{g}(\hat{q}) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(\hat{q}), \hat{f}(a')) = \hat{q}$. Для произвольного фиксированного $a \in A$ имеем также, что

$$\hat{h}(\hat{b}_2) = \hat{h}(\hat{\psi}(\hat{q}, a)) = \hat{\psi}'(\hat{g}(\hat{q}), \hat{f}(a)) = \hat{\psi}'(\hat{q}, \hat{f}(a)) = \hat{b}_2.$$

Далее, поскольку $\hat{g}(\hat{\varphi}(q, \hat{a})) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(\hat{a}))$ для любого $q \in Q$, то $\hat{q} = \hat{\varphi}'(q', \hat{f}(\hat{a}))$ для любого $q' \in Q$. Отсюда или $\hat{f}(\hat{a})$ несущественно для V', или $\hat{f}(\hat{a}) = \hat{a}$. Фиксируем некоторое $q \in Q$. Поскольку или $\hat{f}(\hat{a})$ несущественно для V', или $\hat{f}(\hat{a}) = \hat{a}$, то

$$\hat{h}(\hat{b}_1) = \hat{h}(\hat{\psi}(q, \hat{a})) = \hat{\psi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(\hat{a})) = \hat{b}_1.$$

Далее, пусть $a \in A$ несущественно для V. Тогда $\hat{\varphi}(q, a) = \hat{q}$ для любого $q \in Q$, и получаем, что $\hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)) = \hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) = \hat{g}(\hat{q}) = \hat{q}$, то есть, что $\hat{\varphi}'(q', \hat{f}(a)) = \hat{q}$ для любого $q' \in Q'$. Отсюда получаем, что $\hat{f}(a) = \hat{a}$ или $\hat{f}(a)$ несущественно для V'. В случае, когда $a \in A$ существенно для V, покажем, что $\hat{f}(a)$ также существенно для V'. На самом деле, поскольку a существенно для V, то существует $q_1 \in Q$ такое, что $\varphi(q_1, a) = q_2$ для некоторого $q_2 \in Q$. Тогда $\hat{\varphi}'(\hat{g}(q_1), \hat{f}(a)) = \hat{g}(\hat{\varphi}(q_1, a)) = \hat{g}(\varphi(q_1, a)) = \hat{g}(q_2) \in Q'$, и следовательно, $\hat{f}(a)$ является существенным для V'. Таким образом, мы получаем, что $\hat{f}(A_0 \cup \hat{a}) = A'_0 \cup \hat{a}$, где A_0 и A'_0 — множество входов из A, которые несущественны для V и V', соответственно. Фиксируем некоторую биекцию $i\colon A_0 \to A'_0$. Пусть $f(a) = \hat{f}(a)$ для любого $a \in A \backslash A_0$, $f(a) = i(a)$ для любого $a \in A_0$, $g(q) = \hat{g}(q)$ для любого $q \in Q$ и $h(b) = \hat{h}(b)$ для любого $b \in B$. Покажем, что тройка (f, g, h) является изоморфизмом V на V'.

Пусть $(q, a) \in D_V$. Поскольку

$$\hat{\varphi}'(g(q), f(a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)) = \hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) = g(\varphi(q, a)) = q' \in Q',$$

то $\varphi'(g(q), f(a)) = q'$. Следовательно, $(g(q), f(a)) \in D_{V'}$ и $g(\varphi(q, a)) = q' = \varphi'(g(q), f(a))$. Ясно также, что

$$h(\psi(q, a)) = \hat{h}(\hat{\psi}(q, a)) = \hat{\psi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)) = \psi'(g(q), f(a)).$$

Для полного доказательства данного утверждения осталось еще показать, что из $(g(q), f(a)) \in D_{V'}$ следует $(q, a) \in D_V$. Действительно, из $(g(q), f(a)) \in D_{V'}$ следует $\hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) = \hat{\varphi}'(\hat{g}(q), \hat{f}(a)) = \varphi'(g(q), f(a)) = q' \in Q'$. Но если $\hat{g}(\hat{\varphi}(q, a)) \in Q'$, то $\hat{\varphi}(q, a) \in Q$, и тем самым $(q, a) \in D_V$, что и требовалось доказать.

Легко убедиться, что следующая лемма верна.

Лемма 2. *Для любого $V = (A, Q, B, \varphi, \psi) \in P(A, B)$ и любых $q \in Q$ и $\alpha \in A^*$ значение $\psi(q, \alpha)$ определено тогда и только тогда, когда слово $\overline{\hat{\psi}}(q, \alpha)$ не содержит символ $\hat{b}_1$. Если $\psi(q, \alpha)$ определено, то $\overline{\hat{\psi}}(q, \alpha) = \overline{\psi}(q, \alpha)$.*

Теорема 7. *Если V и V' частичные автоматы из $P(A,B)$, то $V \approx V'$ тогда и только тогда, когда $\overline{V} \approx \overline{V'}$.*

Доказательство. Пусть $V = (A,Q,B,\varphi,\psi)$ и $V' = (A,Q',B,\varphi',\psi')$. Из $V \approx V'$ очевидным образом следует, что $\overline{V} \approx \overline{V'}$. Для полного доказательства теоремы надо показать еще, что из $\overline{V} \approx \overline{V'}$ следует $V \approx V'$, то есть, что $V \trianglelefteq V'$ и $V' \trianglelefteq V$. Покажем, что $V \trianglelefteq V'$; соотношение $V' \trianglelefteq V$ показывается подобным образом.

Возьмем произвольное $q \in Q$, и пусть q' из $\overline{V'}$ такое, что $q \sim q'$, и следовательно, удовлетворяет условию $\hat{\overline{\psi}}(q,\alpha) = \hat{\overline{\psi'}}(q',\alpha)$ для любого $\alpha \in A^*$. Из первой части выше данной леммы следует, что $\exists\psi(q,\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\exists\psi'(q',\alpha)$ для любого $\alpha \in A^*$. Теперь, пусть $\alpha \in A^*$ такое, что $\exists\psi(q,\alpha)$. Тогда из Леммы 2 следует, что $\hat{\overline{\psi}}(q,\alpha) = \overline{\psi}(q,\alpha)$, а также, что $\hat{\overline{\psi'}}(q',\alpha) = \overline{\psi'}(q',\alpha)$. Но, поскольку $\hat{\overline{\psi}}(q,\alpha) = \hat{\overline{\psi'}}(q',\alpha)$, то окончательно получаем, что $\overline{\psi}(q,\alpha) = \overline{\psi'}(q',\alpha)$. Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть $V = (A,Q,B,\varphi,\psi)$ — некоторый частичный автомат из $P(A,B)$. Если $\overline{V} \approx V'$ для некоторого «полного» приведенного автомата $V' = (\hat{A},Q',\hat{B},\varphi',\psi')$, то тогда существует частичный автомат $V'' \in P(A,B)$, такой, что $\overline{V''}$ и V' изоморфны, и $V'' \approx V$.*

Доказательство. Из приведенности автомата V' следует, что в нем существует единственное q_1 такое, что $\hat{q} \sim q_1$, то есть такое, что $\overline{\psi}(\hat{q},\alpha) = \overline{\psi'}(q_1,\alpha)$, для любого $\alpha \in \hat{A}^*$. Поскольку $\hat{q} \sim q_1$, то $\hat{q} = \hat{\varphi}(\hat{q},\alpha) \sim \varphi'(q_1,\alpha)$ для любого $\alpha \in \hat{A}^*$. Но тогда $\varphi'(q_1,\alpha) \sim q_1$, и следовательно, $\varphi'(q_1,\alpha) = q_1$ для любого $\alpha \in \hat{A}^*$. Отсюда $\varphi'(q_1,a) = q_1$ для любого $a \in \hat{A}$.

Пусть q' — произвольное состояние автомата V', и пусть $q \in Q$ такое, что $q \sim q'$. Тогда $\hat{q} = \varphi(q,\hat{a}) \sim \varphi'(q',\hat{a})$. Отсюда следует, что $\varphi'(q',\hat{a}) = q_1$.

Ясно, что $\psi'(q_1,a) = \hat{b}_2$ для любого $a \in \hat{A}$. Пусть теперь $\psi'(q',a) = \hat{b}_1$ для некоторой пары $(q',a) \in Q' \backslash \{q_1\} \times \hat{A}$, и пусть q — состояние автомата V такое, что $q \sim q'$. Тогда $\psi(q,a) = \psi'(q',a) = \hat{b}_1$, и следовательно, $\varphi(q,a) = \hat{q}$. Отсюда $\varphi'(q',a) \sim \varphi(q,a) = \hat{q}$. Из последнего следует, что $\varphi'(q',a) = q_1$.

Пусть $Q'' \in \mathcal{Q}$ — некоторое множество, такое, что $|Q''| = |Q'| - 1$. Определим биекцию $g : Q'' \cup \{\hat{q}\} \to Q'$ так, что $g(\hat{q}) = q_1$. Тогда из предыдущего следует, что существует частичный автомат $V'' = (A, Q'', B, \varphi'', \psi'')$ такой, что тройка $(i_{\hat{A}}, g, i_{\hat{B}})$ является изоморфизмом автомата $\overline{V''}$ на V'. Ясно, что при этом и $\overline{V''} \approx V'$. Но тогда $\overline{V''} \approx \overline{V}$. Из Теоремы 7 теперь получаем, что $V'' \approx V$.

Лемма 4. *Частичный автомат V является слабо приведенным тогда и только тогда, когда автомат $\overline{V}$ является приведенным.*

Доказательство. Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — некоторый слабо приведенный частичный автомат. Очевидно, что любые два различных состояния автомата $\overline{V} = (\hat{A}, \hat{Q}, \hat{B}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$ из множества Q отличимы друг от друга. Но, поскольку $\hat{q}$ отличимо от любого другого состояния автомата $\overline{V}$, то $\overline{V}$ является приведенным.

Предположим теперь, что автомат $\overline{V}$ является приведенным, и покажем, что тогда V является слабо приведенным частичным автоматом. Предположим, что последнее не верно. В таком случае существует пара сильно неотличимых состояний q_1 и q_2 частичного автомата V. Но тогда q_1 и q_2 являются также неотличимыми состояниями автомата $\overline{V}$. Следовательно, автомат $\overline{V}$ также является неприведенным.

Пусть $V \in P(A, B)$ — некоторый частичный автомат. Обозначим через $P_V(A, B)$ множество всех частичных автоматов $V' \in P(A, B)$, таких, что $V' \approx V$. Если V — автомат, то множество $P_V(A, B)$ чаще обозначается через $K_V(A, B)$ [1]. Для любого автомата $V \in P(A, B)$ в классе $K_V(A, B)$ существует единственный с точностью до изоморфизма приведенный автомат. Оказывается, что аналогичное утверждение имеет место и в случае частичных автоматов и сильной неотличимости.

Теорема 8. *Пусть V_0 — произвольный частичный автомат множества $P(A, B)$. Тогда в классе $P_{V_0}(A, B)$ существует единственный с точностью до изоморфизма слабо приведенный частичный автомат.*

Доказательство. Обозначим $\overline{P}_{V_0}(A,B) = \{\overline{V} \mid V \in P_V(A,B)\}$. Из Теоремы 7 получаем, что $\overline{P}_{V_0}(A,B) \subseteq K_{\overline{V_0}}(\hat{A},\hat{B})$. В $K_{\overline{V_0}}(\hat{A},\hat{B})$ существует единственный с точностью до изоморфизма приведенный автомат V'. Из Леммы 3 тогда следует, что существует V'', такое, что $V'' \approx V_0$, то есть $V'' \in P_{V_0}(A,B)$, и при этом V' и $\overline{V''}$ изоморфны. Поскольку V' приведенный, то и автомат $\overline{V''}$ является приведенным. Теперь из Леммы 4 следует, что и V'' является слабо приведенным частичным автоматом.

Предположим теперь, что в $P_{V_0}(A,B)$ существуют два неизоморфных слабо приведенных частичных автомата V_1 и V_2. Тогда $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$ два приведенных автомата класса $K_{\overline{V_0}}(\hat{A},\hat{B})$ (Лемма 4). Отсюда следует, что автоматы $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$ являются изоморфными, что влечет изоморфность частичных автоматов V_1 и V_2 (Теорема 6). Из полученного противоречия следует утверждение теоремы.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: МГУ, 1985.

[2] Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 179–210.

[3] Грунский И.С., Пономаренко Г.Г. Критерий конечности класса автоматов, неотличимых простым экспериментом // Дискретный анализ. 1981. Вып. 35. С. 3–15.

[4] Максимович З. О синтезе оптимальных автоматов в некоторых классах лабиринтов (на сербском языке). Канд. дисс. Математический факультет Белградского университета, 2001.