О распознавании аффинно не эквивалентных трехмерных изображений

В.Н. Козлов

Под изображением или телом понимается конечное (непустое) множество точек в трехмерном евклидовом пространстве.

Пусть изображения A и B состоят из точек $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно, и ψ — взаимнооднозначное соответствие между точками изображений A и B, которым точке a_i из A ставится в соответствие точка $b_{\psi(i)}$ из B $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через B^* множество всех изображений, получаемых из B аффинными преобразованиями. Полагаем, что на произвольном B' из B^* сохраняется нумерация точек, порожденная изображением B, то есть через b'_i на B' обозначена точка, в которую переходит при соответствующем преобразовании точка b_i из B. Точки a_i и $b'_{\psi(i)}$, а также отрезки $(a_i a_j)$ и $(b'_{\psi(i)} b'_{\psi(j)})$ называем соответствующими $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\{B\}^\varepsilon$ множество всех таких B' из B^*, что длина каждого отрезка $(b_i b'_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ не больше ε. Аффинные преобразования, переводящие изображение B в изображения из $\{B\}^\varepsilon$, назовем ε-аффинными. Содержательно их можно трактовать как некоторые локальные, ограниченные пределами величины ε аффинные преобразования для изображения B.

Через $l_A^\psi(B')$ обозначим длину наибольшего из отрезков $(a_i b'_{\psi(i)})$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $B_0 \in B^*$, и ψ_0 биективно отображает A на B. Пусть $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех B' из $\{B_0\}^{\varepsilon_1}$ и при всех биекциях ψ изображения A на B минимум величин $l_A^\psi(B')$ достигается на изображении B_0 при биекции ψ_0. Пусть $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для всякой пары изображений (A', B'_0), получаемой ε_2-аффинными преобразованиями пары (A, B_0) как целого, выполняется аналогичное свойство: для всех B'' из $\{B'_0\}^{\varepsilon_1}$ и при всех биекциях ψ минимум величин $l^{\psi}_{A'}(B'')$ достигается на изображении B'_0 при биекции ψ_0. Тогда B_0 называем искомым изображением для изображения A, а биекцию ψ_0 — искомым соответствием между точками в A и B. Величину $l^{\psi_0}_{A}(B_0)$ обозначаем через $R_A(B)$ и называем расстоянием между изображениями A и B.

Если, с одной стороны, ограничить ε-аффинные преобразования только преобразованиями изометрическими или подобия, а с другой — полагать ε_1 и ε_2 неограниченно большими, то предшествующие определения искомого изображения B_0 и искомого соответствия ψ_0 переходят в соответствующие понятия для преобразований изометрических и подобия. Ранее [1, 2, 3] для этих преобразований и для двухмерного случая получены некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять изображения в паре (A, B_0). Они довольно очевидным образом обобщаются на трехмерный случай и коротко состоят в следующем. Пусть биекцией ψ точке a_{i_k} из A сопоставлена точка b'_{j_k} из B' $(k = 1, \ldots, n)$. Возьмем в пространстве произвольную точку O и параллельным переносом отрезка $(a_{i_k} b'_{j_k})$ совместим точку a_{i_k} с точкой O. Точку, в которую перейдет при этом b'_{j_k}, обозначим через $c_{i_k j_k}$ и назовем соответствующей точкам a_{i_k} и b'_{j_k} и порожденной ими. Изображение, состоящее из точки O — центра, и точек $c_{i_k j_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ — точек ядра, назовем характеристическим изображением C для пары (A, B'). При таком построении некоторые из точек ядра могут совпасть (слиться). Такие точки называем кратными (l-кратными, если слились l точек) и сохраняем в их обозначениях символы слившихся точек. Сферу наименьшего по радиусу шара, включающего все точки ядра, называем ключевой. Для пары (A, B_0) центр характеристического изображения с необходимостью должен совпадать с центром ключевой сферы.

Пусть $(a_{i_1} a_{i_2})$, $(a_{i_3} a_{i_4})$ и $(a_{i_5} a_{i_6})$ — тройка различных отрезков между точками изображения A таких, что они не образуют треугольник. Она называется вырожденной, если отрезки лежат в параллельных плоскостях. Далее мы будем рассматривать только такие изображения, в которых нет вырожденных троек отрезков. С содержательной точки зрения это не очень существенное ограничение. Действительно, пусть в изображении A есть вырожденные тройки отрезков.

Рассмотрим шары радиуса δ, где δ — некоторое положительное число, с центрами в точках a_i изображения A ($i = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 4$). Каким бы малым не было δ, всегда можно выбрать по одной точке a'_i в каждом шаре так, чтобы в изображении A' из точек a'_i ($i = 1, \ldots, n$) уже не было бы вырожденных троек отрезков. Ясно, что в содержательном плане при достаточно малом δ изображение A' «практически» неотличимо от исходного A.

Назовем изображение B' из B^* согласованным с A, если существует в B' тройка отрезков $(b'_{j_1} b'_{j_2})$, $(b'_{j_3} b'_{j_4})$ и $(b'_{j_5} b'_{j_6})$, не являющихся сторонами одного треугольника, равных, параллельных и однонаправленных с соответствующими отрезками $(a_{i_1} a_{i_2})$, $(a_{i_3} a_{i_4})$ и $(a_{i_5} a_{i_6})$ в изображении A. Параллельные отрезки, например, $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b'_{j_1} b'_{j_2})$ называем однонаправленными, если, при условии, что в $(a_{i_1} a_{i_2})$ слева направо сначала идет точка a_{i_1}, а затем a_{i_2}, то и в отрезке $(b'_{j_1} b'_{j_2})$ слева направо тоже идет сначала точка b'_{j_1}, затем b'_{j_2}.

Тройку отрезков $(a_{i_1} a_{i_2})$, $(a_{i_3} a_{i_4})$ и $(a_{i_5} a_{i_6})$ можно интерпретировать как задающую некоторым образом «внутреннюю» в изображении систему координат: начало координат можно совместить с произвольной точкой изображения, оси системы будут определяться прямыми, параллельными отрезкам, сами отрезки — определят масштабные единицы по этим осям. Координаты точек изображения в такой системе не меняются при аффинных преобразованиях изображения. В такой интерпретации согласованность B' с A означает как бы уравнивание двух внутренних систем координат изображений A и B', приведение их, в некотором смысле, к общей системе.

Теорема 1. *Если B_0 — искомое изображение для изображения A, то B_0 согласовано с A.*

Доказательство. На ключевой сфере не может быть меньше пяти точек ядра. Действительно, любые два тетраэдра (а также два треугольника, или два отрезка) можно совместить друг с другом аффинными преобразованиями. Из этого следует, что точки из B_0, порождающие точки на ключевой сфере (если их меньше пяти), всегда могут быть придвинуты некоторым ε-аффинным преобразованием к соответствующим точкам из A. Это уменьшит радиус ключевой сферы, что для пары (A, B_0), по определению, недопустимо.

Далее мы рассмотрим по отдельности случаи, когда на ключевой сфере (иногда, для краткости, просто сфере) находятся соответственно пять, шесть, семь и больше семи точек.

I. Положим, что на сфере ровно пять точек $c_{i_1j_1} - c_{i_5j_5}$.

1) Покажем, что все точки $c_{i_1j_1} - c_{i_5j_5}$ не могут быть разными, то есть попарно несовпадающими. Из определения характеристического изображения следует, что при ε_2-аффинных преобразованиях пары (A, B_0) как целого этим же преобразованиям подвергается и характеристическое изображение C этой пары, то есть если (A', B_0') получено из (A, B_0) аффинным преобразованием, то изображение C', полученное из C этим же преобразованием, будет характеристическим для (A', B_0'). Если все точки $c_{i_1j_1} - c_{i_5j_5}$ из C разные, то, следовательно, точки $c'_{i_1j_1} - c'_{i_5j_5}$ из C' тоже разные и тоже должны лежать на сфере. Это, однако, равносильно тому, что и исходная пятерка точек $c_{i_1j_1} - c_{i_5j_5}$ и каждая из возможных пятерок $c'_{i_1j_1} - c'_{i_5j_5}$ лежат на бесконечном множестве эллипсоидов, что невозможно.

2) Положим теперь, что из точек $c_{i_1j_1} - c_{i_5j_5}$ совпадают только две, например, $c_{i_1j_1}$ и $c_{i_2j_2}$, и покажем, что этого недостаточно.

Совпадение точек $c_{i_1j_1}$ и $c_{i_2j_2}$ означает, что соответствующие отрезки $(a_{i_1}a_{i_2})$ и $(b^0_{j_1}b^0_{j_2})$ равны по длине, параллельны и однонаправлены. Двухкратная точка $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2})$ и три однократных точки $c_{i_3j_3}$, $c_{i_4j_4}$, $c_{i_5j_5}$ должны образовывать тетраэдр, причем центр его описанной сферы — внутренняя точка этого тетраэдра (по аналогии с остроугольным треугольником назовем такой тетраэдр остроугольным, если центр описанной сферы лежит вне тетраэдра, или на одной из его граней — соответственно тупоугольным и прямоугольным). Действительно, если тетраэдр не остроугольный, то он либо прямоугольный, либо все четыре точки лежат в одной плоскости. В последнем случае в этой плоскости должен находиться и центр ключевой сферы, и, значит, четверка точек должна лежать на большой окружности сферы. При ε_2-аффинных преобразованиях пары (A, B_0) как целого и переводе ее в пару (A', B_0') точки $(c'_{i_1j_1}, c'_{i_2j_2})$, $c'_{i_3j_3}$, $c'_{i_4j_4}$, $c'_{i_5j_5}$ для этой пары тоже должны лежать на окружности. Это равносильно тому, что и эта четверка, и исходная четверка точек $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2})$, $c_{i_3j_3}$, $c_{i_4j_4}$, $c_{i_5j_5}$ лежат на бесконечном множестве эллипсов, что невозможно.

Если предположить, что тетраэдр прямоугольный, то ε_2-аффинным преобразованием (при любом $\varepsilon_2 > 0$) прямоугольный тетраэдр всегда можно сделать тупоугольным. После этого центр ключевой сферы будет совпадать с центром описанной окружности одной из граней тетраэдра — назовем эту грань главной — а противолежащая главной грани вершина тетраэдра будет находиться внутри ключевой сферы. На ключевой сфере, следовательно, будут находиться три точки, если вершины главной грани — однократные точки, или четыре точки, если одна из вершин главной грани – двухкратная точка. В любом случае точек — меньше пяти, то есть мы находимся в границах случая, рассмотренного в начале доказательства теоремы.

Итак, точки $(c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2})$, $c_{i_3 j_3}$, $c_{i_4 j_4}$, $c_{i_5 j_5}$ должны образовывать остроугольный тетраэдр. Покажем теперь, что изображение не может быть искомым, так как некоторым ε_1-аффинным преобразованием изображения B_0 можно уменьшить $R_A(B)$.

Из точек $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_5}$ никакие четыре не лежат в одной плоскости, следовательно, не более чем одна точка может быть внутренней для тетраэдра, образованного остальными четырьмя. Поскольку однократных точек на ключевой сфере три, то, следовательно, есть среди $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_5}$ точка, не являющаяся внутренней, и которой соответствует однократная точка на сфере. Пусть, для определенности, это будет точка $b^0_{j_5}$. Через эту точку можно провести вспомогательную плоскость P_x так, что остальные точки $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$ будут лежать по одну сторону от этой плоскости. Выберем параллельные прямые P', P'', P''', проходящие через точки $(c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2})$, $c_{i_3 j_3}$, $c_{i_4 j_4}$ так, чтобы части этих прямых, примыкающие к этим трем точкам и находящиеся по одну сторону от плоскости образованного ими треугольника, находились бы внутри сферы (пример на рис. 1). Очевидно, что для остроугольного тетраэдра, вписанного в сферу, выбор таких прямых можно осуществить.

Если теперь, оставляя неподвижной вспомогательную плоскость P_x, провести ε_1-аффинное преобразование сжатия (или растяжения) изображения B_0 по направлению прямых P', P'', P''', то точки $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$ придвинутся к соответствующим точкам a_{i_1} – a_{i_4}, что недопустимо для искомого изображения.

3) Итак, все пять точек на ключевой сфере разными быть не мо-

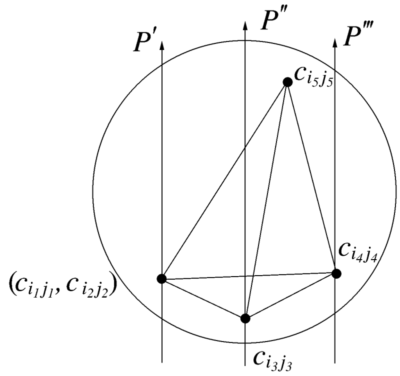

Рис. 1.

гут, и только две из них совпадать тоже не могут. Предположим теперь, что: а) совпадают три точки, например, $c_{i_1j_1}$, $c_{i_2j_2}$, $c_{i_3j_3}$, б) совпадают две пары по две точки, например, $c_{i_1j_1}$, $c_{i_2j_2}$ и $c_{i_3j_3}$, $c_{i_4j_4}$. Покажем, что и этого недостаточно, так как некоторым ε_1-аффинным преобразованием изображения B_0 можно уменьшить $R_A(B)$.

В случае (а) имеем на ключевой сфере одну трехкратную точку $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, c_{i_3j_3})$ и две однократных $c_{i_4j_4}$ и $c_{i_5j_5}$. В случае (б) имеем две двухкратных точки $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2})$, $(c_{i_3j_3}, c_{i_4j_4})$ и одну однократную $c_{i_5j_5}$. Ясно, что в обоих случаях треугольники из этих точек должны быть остроугольными, и вершины их должны лежать на большой окружности сферы. Рассуждения, обосновывающие остроугольность (то есть исключающие прямоугольность треугольника), такие же, как и в предшествующем пункте для остроугольности тетраэдра.

В случае (а) хотя бы одной из однократных точек на сфере — пусть, для определенности, это будет точка $c_{i_5j_5}$ — соответствует точка изображения B_0, то есть точка $b^0_{j_5}$, не являющаяся внутренней в тетраэдре, образованном остальными точками $b^0_{j_1} - b^0_{j_4}$. Проводим вспомогательную плоскость P_x через точку $b^0_{j_5}$ так, чтобы точки $b^0_{j_1} - b^0_{j_4}$ лежали по одну сторону от этой плоскости. Выбираем параллельные прямые P' и P'', проходящие через точки $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, c_{i_3j_3})$ и $c_{i_4j_4}$ и лежащие в плоскости треугольника из этих точек и точки $c_{i_5j_5}$, причем таким образом, чтобы части этих прямых, примыкающие к точкам $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, c_{i_3j_3})$ и $c_{i_4j_4}$ лежали внутри большой окружности (пример на рис. 2). Затем, при неподвижной плоскости P_x, сжатием (или растяжением) изображения B_0 к этой плоскости по направлению прямых P', P'' придвинем точки $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$ к соответствующим точкам a_{i_1} – a_{i_4}. Это уменьшит величину $R_A(B)$, что для изображения B_0 недопустимо.

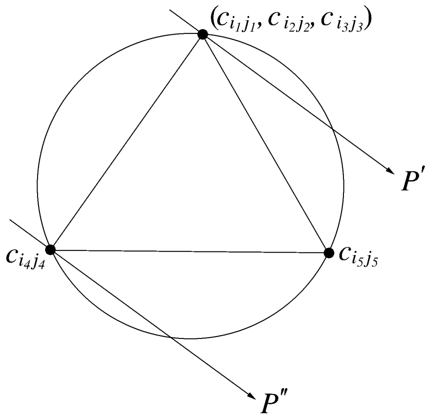

Рис. 2.

В случае (б) на сфере однократная точка только одна — точка $c_{i_5j_5}$. Если ей соответствует точка $b^0_{j_5}$, не являющаяся внутренней в тетраэдре $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$, то повторяются построения и рассуждения для случая (а). Если точка $b^0_{j_5}$ внутренняя, то проводим через $b^0_{j_5}$ вспомогательную плоскость P_x так, чтобы точки $b^0_{j_1}$, $b^0_{j_2}$ были по одну сторону от этой плоскости, а точки $b^0_{j_3}$ – $b^0_{j_4}$ — по другую. При точке $b^0_{j_5}$, внутренней в тетраэдре из точек $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$ это, очевидно, всегда можно сделать. Далее выбираем параллельные прямые P' и P'', проходящие через точки $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2})$ и $(c_{i_3j_3}, c_{i_4j_4})$ и лежащие в плоскости треугольника из этих точек и точки $c_{i_5j_5}$, таким образом, чтобы части этих прямых, примыкающие к кратным точкам и находящиеся внутри окружности, располагались по разные стороны от отрезка с кратными точками на концах (пример на рис. 3). Теперь сжатие (или растяжение) изображения B_0 к неподвижной плоскости P_x по направлению прямых P', P'' придвинет точки $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_4}$ к соответствующим точкам a_{i_1} – a_{i_4}, что недопустимо для изображения B_0.

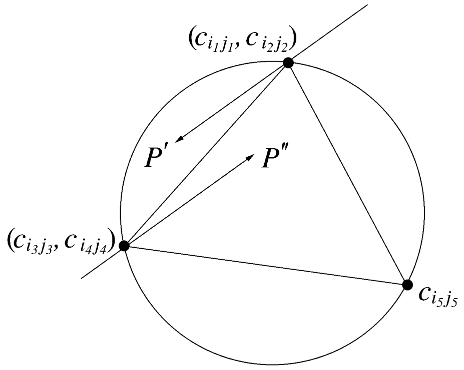

Рис. 3.

После рассмотренного в пунктах 1, 2, 3 остается предположить, что из пяти точек на ключевой сфере либо слиты четыре и пятая однократная, либо слиты три и одна двухкратная, а это и дает доказываемое утверждение для случая I (с пятью точками).

II. Положим теперь, что на ключевой сфере шесть точек $c_{i_1j_1}$ – $c_{i_6j_6}$. Все шесть или пять из них несовпадающими быть не могут – на ключевой сфере должно быть, как показано в пункте 1 случая I, не более четырех точек (включая кратные). Если полагать, что доказываемое утверждение не выполняется, то возможных вариантов два: а) трехкратная точка и три однократных (точки $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, c_{i_3j_3})$, $c_{i_4j_4}$, $c_{i_5j_5}$, $c_{i_6j_6}$), б) две двухкратных точки и две однократных (точки $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2})$, $(c_{i_3j_3}, c_{i_4j_4})$, $c_{i_5j_5}$, $c_{i_6j_6}$). Эти четыре точки в каждом из вариантов должны образовывать остроугольные тетраэдры. Обоснования остроугольности аналогичны пункту 2 случая I.

В варианте (а) среди точек $b^0_{j_1}$ – $b^0_{j_6}$ не более двух являются внутренними для тетраэдра (или тетраэдров), образованными остальными. Значит по крайней мере одной из однократных точек соответствует не внутренняя. Пусть, для определенности, это будет точка $b^0_{j_6}$.

Проводим через нее вспомогательную плоскость так, чтобы остальные точки $b^0_{j_1} - b^0_{j_5}$ располагались по одну сторону от этой плоскости. Затем через вершины грани, образованной точками $(c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, c_{i_3j_3})$, $c_{i_4j_4}$, $c_{i_5j_5}$, проводим параллельные прямые P', P'', P''' так, чтобы части этих прямых, примыкающие к вершинам и расположенные по одну сторону от плоскости грани, находились бы внутри ключевой сферы (рис. 4). Далее сжатием (или растяжением) изображения B_0 по направлению прямых P', P'', P''' к неподвижной плоскости P_x придвинем все точки $b^0_{j_1} - b^0_{j_5}$ к соответствующим точкам $a_{i_1} - a_{i_5}$, что для B_0 недопустимо.

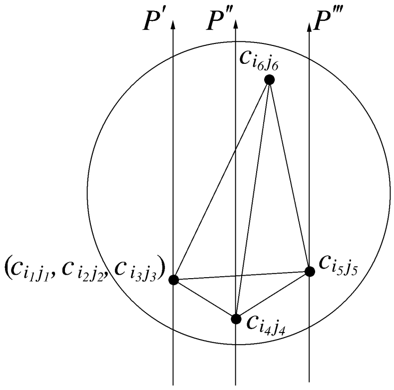

Рис. 4.

В варианте (б), если какой-либо из двух однократных точек $c_{i_5j_5}$ и $c_{i_6j_6}$ соответствует не внутренняя точка (то есть $b^0_{j_5}$ или $b^0_{j_6}$ не внутренняя), то повторяем рассуждения варианта (а).

Если же обеим однократным точкам соответствуют точки внутренние в тетраэдре, образованном остальными точками $b^0_{j_1} - b^0_{j_4}$, то вспомогательную плоскость проводим через ребро тетраэдра, соответствующее какой-либо из кратных точек, например, через ребро $(b^0_{j_1} b^0_{j_2})$. Остальные точки, то есть $b^0_{j_3} - b^0_{j_6}$, будут располагаться по одну сторону от этой плоскости. Далее повторяем построения для варианта (а).

Итак, четырех точек (включая кратные) на ключевой сфере быть не может. Значит, таких точек не больше трех. Если их три, то остаются следующие варианты: а) одна четырехкратная точка и две однократных, б) одна трехкратная точка, одна двухкратная и одна однократная, в) три двухкратных точки. Все эти варианты дают доказываемое утверждение для рассматриваемого случая.

III. Если на ключевой сфере семь точек $c_{i_1j_1} - c_{i_7j_7}$, то все семь, шесть или пять из них несовпадающими быть не могут — это показано в случае I: на ключевой сфере с учетом кратности должно быть не более четырех точек. Это, нетрудно видеть, для семи точек сразу дает доказываемое утверждение.

IV. Если точек на ключевой сфере восемь и больше, то к любым семи из них применимы рассуждения предшествующего случая. Теорема доказана.

Итак, имеем теперь два необходимых условия для пары (A, B_0): искомое изображение B_0 должно быть согласовано с A, и центр характеристического изображения должен совпадать с центром ключевой сферы. Сочетание этих двух условий позволит нам далее вычленить из континуального по мощности множества B^* конечное подмножество U изображений, среди которых только и может находиться искомое.

Действительно, согласовывать B' с A можно по разным тройкам отрезков $(a_{i_1}a_{i_2})$, $(a_{i_3}a_{i_4})$ и $(a_{i_5}a_{i_6})$. Пусть эти отрезки равны, параллельны и однонаправлены с соответствующими отрезками из B', то есть с отрезками $(b'_{\psi(i_1)}b'_{\psi(i_2)})$, $(b'_{\psi(i_3)}b'_{\psi(i_4)})$ и $(b'_{\psi(i_5)}b'_{\psi(i_6)})$. Но этим условием выделяется не единственное изображение из B^*, а некоторое континуальное по мощности множество, и изображения в этом множестве переводимы друг в друга параллельными переносами. Однако среди них имеется только единственное — обозначим его через $B_{\psi(i_1)-\psi(i_6)}$ — для которого в паре с A центр ключевой сферы совпадает с центром характеристического изображения.

Отрезки $(a_{i_1}a_{i_2})$, $(a_{i_3}a_{i_4})$ и $(a_{i_5}a_{i_6})$ можно выбирать в A не более чем $(\mathrm{C}_n^2)^3$ способами. Соответственно, не больше будет и изображений $B_{\psi(i_1)-\psi(i_6)}$. Обозначим множество их через U^ψ. Объединение множеств U^ψ для всех возможных биекций ψ обозначим через U. Таким образом приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Искомое изображение B_0 может находиться только среди изображений множества U.*

Самое трудоемкое в построении множества U — необходимость в переборе $n!$ биекций ψ. Рассмотрим, как можно обойти их использование.

Согласованность B_0 с A означает, что среди точек ядра на ключевой сфере есть четырехкратная (или большей кратности) точка (первая ситуация), или есть одна трехкратная и одна (или больше) двухкратная (или большей кратности) точка (вторая ситуация), или есть три или больше двухкратных точки (третья ситуация). Оценим число возможных вариантов первой второй и третьей ситуаций — соответственно множеств $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ и $\widetilde{U}_3$ изображений из B^*.

Наличие четырехкратной точки означает, что некоторые два тетраэдра с вершинами в точках соответственно из A и B' переводятся друг в друга параллельным переносом. Пар тетраэдров с вершинами из A и B' можно выбрать и сопоставить друг другу не более чем $4!(\mathrm{C}_n^4)^2$ способами (с учетом возможности по разному сопоставлять друг другу вершины в тетраэдрах).

Однако четырехкратная точка не может быть единственной точкой на ключевой сфере. Должны быть либо еще одна точка, образующая с кратной точкой концы диаметра ключевой сферы, либо еще две точки, образующие с кратной остроугольный треугольник, вписанный в большую окружность сферы, либо еще три точки, образующие с кратной точкой остроугольный тетраэдр, вписанный в сферу. В первом случае в B^* существует единственное изображение, для которого в паре с A центр характеристического изображения совпадает с серединой отрезка между кратной точкой и дополнительной. Эту дополнительную точку можно породить, очевидно, не более чем $(n-4)^2$ способами сопоставления по одной точке из A и B' друг другу. Во втором случае в B^* существует единственное изображение, для которого в паре с A центр характеристического изображения совпадает с центром описанной окружности треугольника (остроугольного). Дополнительные две точки можно породить не более чем $2(\mathrm{C}_{n-4}^2)^2$ способами сопоставления пар точек из A и B' друг другу. В третьем случае в B^* существует единственное изображение, для которого в паре с A центр характеристического изображения совпадает с центром сферы, описанной около тетраэдра (остроугольного). Дополнительные три точки можно породить не более чем $3!(\mathrm{C}_{n-4}^3)^2$ способами сопоставления троек точек из A и B' друг другу.

В целом получаем, что в $\widetilde{U}_1$ может быть не более чем $4!(\mathrm{C}_n^4)^2((n-4)^2 + 2(\mathrm{C}_{n-4}^2)^2 + 3!(\mathrm{C}_{n-4}^3)^2$ изображений.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию, когда на ключевой сфере находится одна трехкратная и одна двухкратная точка. Пятерки точек из A и B', порождающие эти кратные точки, можно выбрать и сопоставить друг другу не более чем $3!(\mathrm{C}_n^3)^2 \cdot 2(\mathrm{C}_n^2)^2$ способами. Далее возможен случай, когда эти две кратные точки являются концами диаметра ключевой сферы, случай, когда есть еще одна дополнительная точка, образующая с кратными точками остроугольный треугольник, и случай, когда есть еще две дополнительные точки на сфере, образущие с кратными точками остроугольный тетраэдр. В первом случае однозначно определяется изображение из B^*, для которого в паре с A центр характеристического изображения совпадает с серединой отрезка между кратными точками. Во втором случае существует в B^* единственное изображение, у которого в паре с A центр характеристического изображеиия совпадает с центром описанной окружности треугольника. При этом дополнительную (третью) точку можно породить выбором и сопоставлением друг другу по одной точке на A и B'. Вариантов такого выбора будет, очевидно, не более чем $(n-5)^2$. В третьем случае существует в B^* единственное изображение, у которого в паре с A центр характеристического изображения совпадает с центром описанной около тетраэдра сферы. При этом дополнительные две точки можно породить не более чем $2(\mathrm{C}_{n-5}^2)^2$ способами.

В целом получаем, что в $\widetilde{U}_2$ может быть не более чем $2 \cdot 3!(\mathrm{C}_n^3)^2(\mathrm{C}_n^2)^2(1 + (n-5)^2 + 2(\mathrm{C}_{n-5}^2)^2)$ изображений.

Рассмотрим, наконец, третью ситуацию, когда на ключевой сфере три двухкратных точки. Случаи, когда две из них образуют концы диаметра ключевой сферы, или все три образуют остроугольный треугольник, центр описанной окружности которого совпадает с центром характеристического изображения, очевидно аналогичны рассмотренным выше. Остается случай, когда к трем кратным точкам добавляется еще одна, и центр ключевой сферы совпадает с центром описанной сферы получающегося тетраэдра. Эту дополнительную точку можно породить выбором и сопоставлением друг другу по одной точке из A и B', то есть не более чем $(n-6)^2$ способами. В целом получаем, что в $\widetilde{U}_3$ может быть не более чем $4(\mathrm{C}_n^2)^6(1+(n-6)^2)$ изображений.

Через $\widetilde{U}$ обозначим объединение множеств $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$, $\widetilde{U}_3$. Из рассмотренного вытекает следующее утверждение (аналогичное теореме 2).

Теорема 3. *Искомое изображение B_0 может находиться только среди изображений множества $\widetilde{U}$.*

Формирование множества $\widetilde{U}$, в отличие от U, не требует перебора $n!$ взаимнооднозначных соответствий между точками изображений A и B. Если фрагментом изображения называть некоторое подмножество точек в нем, то при построении $\widetilde{U}$ в сущности сопоставляются друг другу только фрагменты изображений A и B', а не изображения в целом. Число же вариантов такого сопоставления, как это видно из рассмотренного выше, зависит от n полиномиально.

Однако формирование множества $\widetilde{U}$ не есть окончание задачи. Надо определить, каким образом из $\widetilde{U}$ будет выделяться искомое изображение B_0 и как будут сопоставляться друг другу точки на A и B_0.

Пусть включение изображения B' в $\widetilde{U}$ определялось фрагментами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ изображений A и B' при некотором соответствии $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}$ между точками этих фрагментов. По построению, соответствующие точки во фрагментах находятся друг от друга на одинаковом расстоянии, которое обозначим через $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Если B' — искомое изображение, то и все остальные точки из B' должны находиться от соответствующих точек из A на расстоянии, меньшем или равном $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Отсюда следует процедура определения того, что можно назвать приемлемым изображением из $\widetilde{U}$. Для каждой точки a_i из A определяем множество Q_{a_i} всех тех точек из B', расстояние до которых от точки a_i не больше $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Аналогично через $Q_{b'_j}$ обозначим множество всех тех точек из A, расстояние до которых от точки b'_j не больше $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Если все множества Q_{a_i} и $Q_{b'_j}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ непусты, то изображение B' — приемлемое.

Назовем приемлемое изображение B' узкоприемлемым, если можно из каждого множества Q_{a_i} выбрать ровно по одной точке изображения B' так, чтобы все выбранные точки были разными. Таким образом, нетрудно видеть, определяется некоторое взаимнооднозначное соответствие между точками двух изображений.

Среди узкоприемлемых выбираем изображение с наименьшей величиной $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$. Оно и будет искомым изображением, а соответствующая биекция — искомым соответствием между точками изображений A и B.

Изменим теперь определения искомого изображения и искомого соответствия между точками изображений. В качестве искомого будем теперь по-прежнему выбирать изображение B_0 с наименьшей величиной $R_{\tilde{a}}(\tilde{b})$, но среди приемлемых изображений, а не узкоприемлемых. Точке a_i, будем полагать, соответствует теперь не одна точка, а все точки множества Q_{a_i}, точке b_j^0 соответствуют все точки из множества $Q_{b_j^0}$. Кроме того, теперь можно полагать, что изображения A и B состоят не обязательно из одинакового числа точек. В целом так измененные определения, если иметь ввиду содержательную сторону дела, более оправданы, и прежние определения можно рассматривать как их специальный, частный случай.

Список литературы

[1] Козлов В.Н. О распознавании аффинно разных дискретных изображений // Интеллектуальные системы. 1998. Вып. 3-4. С. 95–122.

[2] Козлов В.Н. Способ оценки похожести изображений, основанный на преобразованиях подобия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 5. С. 800–812.

[3] Kozlov V.N. Visual Pattern and Geometric Transformations of Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. Vol. 10. N 3. P. 321–342.