О числе монотонных булевых функций с фиксированным числом нижних единиц

Г. Килибарда, В. Йовович

Рассматривается проблема перечисления монотонных булевых функций от n переменных с m нижних единиц. Выраженная в терминах теории множеств, эта проблема эквивалентна проблеме перечисления всех семейств Шпернера из m подмножеств n-множества. Получена формула для вычисления числа этих семейств в терминах теории графов. Получены соответствующие явные формулы для случая, когда $m \leqslant 10$ и n произвольное (из-за их длины здесь приводятся только формулы для $m \leqslant 7$).

Введение

Класс Поста есть класс булевых функций, замкнутый относительно операции суперпозиции. Э. Пост описал явным способом решетку этих классов [1, 2]. Одной из проблем, связанных с классами Поста, является проблема их перечисления, то есть перечисления соответствующих «сечений» этих классов, содержащих все их функции от фиксированного числа переменных. Для некоторых из этих классов соответствующие формулы или не существуют, или имеют небольшое практическое значение [3, 4]. Настоящая работа является продолжением наших исследований, изложенных в [5] и связанных с перечислением так называемых F-классов Поста (см. ниже определения). В [5] рассматриваются классы F_8^μ, F_4^μ, F_5^μ и F_1^μ. Случай классов F_7^μ влечет за собой проблему перечисления класса A_1 всех монотонных булевых функций, то есть соответствующих сечений $A_1(n)$, содержащих все монотонные n-местные булевые функции. Проблема перечисления классов $A_1(n)$ имеет длинную историю и известна под названием проблемы Дедекинда. Она была сформулирована Р. Дедекиндом [6] как проблема определения числа элементов в свободной дистрибутивной решетке $FD(n)$ с множеством из n порождающих (см. также, [7]). В терминологии теории множеств эта проблема эквивалентна проблеме нахождения числа всех семейств Шпернера или, что одно и то же, числа всех антицепей некоторого n-множества.

Один из способов перечисления классов $A_1(n)$ сводится к перечислению классов $A_1(m,n)$, то есть классов всех функций из $A_1(n)$, у которых точно m нижних единиц. Из известной леммы Шпернера [8] следует, что m проходит значения от 0 до $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$, так что

$$|A_1(n)| = \sum_{m=0}^{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} |A_1(m,n)|.$$

Предметом настоящей работы является перечисление именно классов $A_1(m,n)$.

Насколько нам известно, проблема перечисления классов $A_1(m,n)$ была впервые сформулирована Н. Ривиером [9]. Он решил проблему в случае, если $1 \leqslant m \leqslant 3$. Д. Цветкович [10] решил случай $m = 4$, используя в основном прямой перебор с помощью компьютера.[1] В настоящей работе предлагается общая процедура перечисления классов $A_1(m,n)$, которая позволяет найти соответствующие явные формулы для случая, когда $1 \leqslant m \leqslant 10$ (при любом n). Преимущества предлагаемого здесь метода иллюстрируются примером в разделе 4: показано, что главный результат из [10], найденный там с помощью компьютера, может быть получен, так сказать «вручную», в несколько шагов.

Уже в процессе подготовки этой статьи к опубликованию авторы узнали про работы Арочи [11, 12].[2] Как это часто бывает, несмотря

[1] Из нашей личной переписки с Г. Лелс (Hervé Leleu, Catholic University of Lille) нам стало известно, что случай $m = 4$ решен в: Hillman Abraham P. On the number of realizations of a Hasse diagram by finite sets // Proc. A.M.S. 6 (1955). P. 542–548. Ссылка на эту статью сделана в книге: Comtet Louis. Advanced Combinatorics. Boston: Reidel, 1974 (книга опубликована на французском языке в 1968).

[2] Авторы выражают свою благодарность Д. Цветковичу (Белградский университет) за то, что обратил их внимание на статью [11].

на то, что здесь и в работе [11] рассматриваются разные задачи, в конечном итоге получаются формулы, которые в сущности не отличаются. Ароча в [12] приводит соответствующие формулы для случая $m = 5, 6$.

По отношению к [11], где результаты получены в рамках теории частично упорядоченных множеств и выражены в терминах этой теории, настоящее исследование является самодостаточным и не использует вспомогательные результаты теории связных графов (Утверждение 1 в [11]).

В настоящей статье показано, что проблема перечисления классов $A_1(m, n)$ сводится к проблеме перечисления так называемых у-(n, m)-T_1-гиперграфов, которая в свою очередь сводится к проблеме нахождения числа всех двудольных графов с фиксированным числом вершин и ребер и с данным числом независимых множеств вершин. Независимое множество вершин трактуем здесь как определенного типа раскраску двумя красками графов, а для определения числа таких раскрасок используется так называемая Декомпозиционная лемма (Предложение 1).

Приводим здесь также формулу из [5] для числа так называемых 2-полных у-T_0-гиперграфов, чтобы отметить сходство этой формулы с формулой, данной в Теореме 1. Авторы предполагают, что существует более глубокий комбинаторный смысл, отвечающий за это сходство.

В конце статьи приложены явные формулы для случая $m \leqslant 7$ и любого n. Формулы для $m = 8, 9, 10$ не приводятся здесь из-за их длины, но их можно найти на вебсайте [13]; для их порождения написана компьютерная программа, имплементирующая приведенный здесь метод. Соответствующие числовые последовательности, вычисленные с помощью этих формул, также даны в [13].

1. Основные понятия

Пусть X — некоторое множество. Через $|X|$ будем обозначать мощность множества X, через $\mathfrak{B}(X)$ — булеан множества X, то есть множество всех подмножеств множества X. Если $|X| = n$, то говорим, что X является n-множеством.

Для любых целых чисел $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $m_1 \leqslant m_2$, через $\overline{m_1, m_2}$ обозначаем целочисленный интервал $\{m_1, m_1+1, \ldots, m_2\}$. Также для любого $n \in \mathbb{N}$ через $\overline{n}$ обозначаем множество $\{1, \ldots, n\}$, а через $\mathbb{N}_0$ — множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Вместо фразы «упорядоченный набор длины n» часто будем говорить просто «n-набор». Пусть a — некоторый n-набор и $i \in \overline{n}$. Через $\mathbf{pr}_i(a)$ обозначаем i-тую координату a.

Введем некоторые понятия из теории графов и теории булевых функций, которыми мы в последующем будем пользоваться. Понятия теории графов, которыми мы пользуемся здесь, не определяя их, определяются как в [14].

Под *гиперграфом* подразумеваем пару $H = (V, \mathcal{E})$, где V — конечное непустое множество и $\mathcal{E} = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — конечное семейство подмножеств множества V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества $\mathcal{E}$ *ребрами* данного гиперграфа H. Из определения ясно, что множество ребер может быть пустым, ребра могут повторяться и даже могут быть пустыми. В дальнейшем множество вершин гиперграфа H часто будем обозначать через VH, а семейство ребер — через $\mathcal{E}H$. Если $|V| = n$ и $|\mathcal{E}| = m$, то гиперграф H назовем *(m, n)-гиперграфом*. Если в выше данном определении в качестве $\mathcal{E}$ берем не семейство, а m-набор $(e_1, \ldots, e_m)$ подмножеств множества V (то есть $e_i \subseteq V$ для любого $i \in \overline{m}$), то получаем *упорядоченный гиперграф* или, короче, *у-гиперграф*; если при этом $|V| = n$, то он называется *упорядоченным (m, n)-гиперграфом*, то есть, *у-(m, n)-гиперграфом*. Множества e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, являются его *ребрами*. Если e некоторое ребро гиперграфа (или у-гиперграфа) H, то через $||e||$ обозначим *кратность* ребра e в H, то есть число появлений ребра e в $\mathcal{E}H$. Говорим, что (у-гиперграф) гиперграф H является (у-гиперграфом) гиперграфом *без кратных ребер*, если $||e|| = 1$ для любого $e \in \mathcal{E}H$.

Очевидно, что граф можно рассматривать как специальный случай гиперграфа. Для графов и для орграфов примем такое же соглашение, как и выше: множество вершин (орграфа) графа G будем обозначать через VG, а (дуги) ребра — через EG.

Говорим, что вершина $v \in VH$ *инцидентна* ребру e некоторого (у-гиперграфа) гиперграфа H, если $v \in e$. Множество $V' \subseteq VH$ является множеством *смежных* вершин (у-гиперграфа) гиперграфа H, если существует ребро $e \in \mathcal{E}H$, такое, что $V' \subseteq e$.

У-гиперграф или гиперграф H является *k-полным*, $1 \leqslant k \leqslant |V|$, если любое множество $V' \subseteq V$, $|V'| \leqslant k$, является множеством смежных вершин.

Предположим, что любой (у-гиперграф) гиперграф, с которым мы будем иметь дело, является помеченным, то есть на множестве его вершин дан некоторый линейный порядок. Два помеченных гиперграфа H_1 и H_2 являются *одинаковыми*, $H_1 = H_2$, если существует биекция $\iota : VH_1 \to VH_2$, такая, что $e \in \mathcal{E}H_1$ тогда и только тогда, когда $\iota(e) \in \mathcal{E}H_2$, $||\iota(e)|| = ||e||$ для любого $e \in \mathcal{E}H_1$, и ι сохраняет линейный порядок, то есть, из $v <_1 v'$ следует, что $\iota(v) <_2 \iota(v')$ (здесь $<_i$, $i \in \overline{2}$ — соответствующий линейный порядок на множестве VH_i). Два помеченных у-гиперграфа $H_1 = (V_1, (e_1, \ldots, e_{m_1}))$ и $H_2 = (V_2, (e'_1, \ldots, e'_{m_2}))$ являются *одинаковыми*, если $m_1 = m_2$ и существует биекция $\iota : V_1 \to V_2$ такая, что $e'_i = \iota(e_i)$ для любого $i \in \overline{m_1}$. Если рассматривать множество всех помеченных гиперграфов на одном и том же множестве вершин V, как это и делается в настоящей статье, то будем считать, что два помеченных (у-гиперграфа) гиперграфа H_1 и H_2 одинаковы, если они одинаковы по отношению к тождественному отображению множества V на себя. Следовательно, два таких у-гиперграфа H_1 и H_2 одинаковы, если $\mathcal{E}V_1 = \mathcal{E}V_2$.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый (орграф) граф. Под раскраской (орграфа) графа G понимаем любую функцию вида $\nu : V \to \{0, 1\}$. Если дана некоторая раскраска, то про вершины множества $\nu^{-1}(1)$ будем говорить, что они «окрашены» в красный цвет, а вершины множества $\nu^{-1}(0)$ — в зеленый цвет. Раскраска графа или орграфа называется его *$\uparrow$-раскраской*, если не существует пара его смежных вершин, окрашенная в красный цвет (здесь $\uparrow$ обозначает функцию Шеффера, которая только в точке $(1, 1)$ принимает значение 0, и тем самым напоминает, что при только что определенном способе раскрашивания нельзя окрасить в красный цвет смежные вершины). Раскраска орграфа называется его *$\Rightarrow$-раскраской*, если не существует дуга данного орграфа, идущая из вершины, окрашенной в красный цвет, в вершину, окрашенную в зеленый цвет, то есть если $(\nu^{-1}(1) \times \nu^{-1}(0)) \cap EG = \varnothing$. Через $\eta_{\uparrow}(G)$ $(\eta_{\Rightarrow}(G))$ обозначим число всех $\uparrow$-раскрасок ($\Rightarrow$-раскрасок) графа (орграфа) G.

Класс Поста является классом булевых функций, который замкнут относительно операции суперпозиции. Е. Пост показал, что существует счетное множество таких классов, и явно описал решетку этих классов [1, 2]. Введем некоторые классы Поста, которые в последующем будут упоминаться. Так, например, имеем: C_1 — класс всех булевых функций; C_2 — класс всех булевых функций f, сохраняющих 0, то есть всех f таких, что $f(0,\dots,0)=0$; C_3 — класс всех булевых функций f, сохраняющих 1, то есть всех f таких, что $f(1,\dots,1)=1$; $C_4=C_2\cap C_3$.

Пусть $(a_1,\dots,a_n)$ и $(b_1,\dots,b_n)$ — два двоичных вектора длины n. Пишем $(a_1,\dots,a_n)\leqslant(b_1,\dots,b_n)$, если $a_i\leqslant b_i$ для любых $i\in\overline{n}$. Если $(a_1,\dots,a_n)\leqslant(b_1,\dots,b_n)$ и существует $i_0\in\overline{n}$, такое, что $a_{i_0}<b_{i_0}$, то пишем $(a_1,\dots,a_n)<(b_1,\dots,b_n)$. Булевая n-местная функция f является монотонной, если из $(a_1,\dots,a_n)\leqslant(b_1,\dots,b_n)$ следует $f(a_1,\dots,a_n)\leqslant f(b_1,\dots,b_n)$ для любых двоичных наборов $(a_1,\dots,a_n)$ и $(b_1,\dots,b_n)$. Множество всех монотонных функций является классом Поста, который обозначается через A_1.

Пусть $\mu\geqslant 2$ — некоторое натуральное число и $i\in\{0,1\}$. Булевая n-местная функция f удовлетворяет условию a_i^μ, если для любого семейства из μ n-наборов множества $f^{-1}(i)$ существует $j\in\overline{n}$, такое, что любой набор из этого семейства имеет j-тую координату, равную i (в рассматриваемых семействах наборы, конечно, могут повторяться). Тогда: F_4^μ — класс всех булевых функций, обладающих свойством a_0^μ; $F_1^\mu=C_4\cap F_4^\mu$; $F_3^\mu=A_1\cap F_4^\mu$; $F_2^\mu=F_1^\mu\cap F_3^\mu$; F_8^μ — класс всех булевых функций, обладающих свойством a_1^μ; $F_5^\mu=C_4\cap F_8^\mu$; $F_7^\mu=A_1\cap C_3\cap F_8^\mu$; $F_6^\mu=F_5^\mu\cap F_7^\mu$.

Говорим, что булевая функция f имеет *ранг* k, $0\leqslant k\leqslant 2^n$, если $|f^{-1}(1)|=k$. Если $\mathcal{P}$ класс Поста, то через $\mathcal{P}(n|k)$ обозначим класс всех n-местных функций из $\mathcal{P}$, у которых ранг k. Множество $\mathcal{P}(n|k)$ называется (n,k)-*сечением* класса $\mathcal{P}$.

2. О числе элементов множества $A_1(m,n)$

Пусть f — монотонная n-местная булевая функция. Двоичный n-набор $(a_1,\dots,a_n)$ является *нижней единицей* для f, если $f(a_1,\dots,a_n)=1$ и $f(b_1,\dots,b_n)=0$ для любого $(b_1,\dots,b_n)<(a_1,\dots,a_n)$. Ясно, что любая монотонная булевая функция определена единственным способом множеством своих нижних единиц. Обозначим через $A_1(m,n)$ множество всех монотонных n-местных булевых функций, имеющих точно m нижних единиц. Нахождение чисел $\alpha_1(m,n) = |A_1(m,n)|$ является нашей главной целью.

Обозначим через $\tilde{A}_1(m,n)$ множество всех m-наборов $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$ попарно различных двоичных n-наборов, таких, что существует функция $f \in A_1(m,n)$, для которой n-наборы $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, являются нижними единицами. Пусть $\tilde{\alpha}_1(m,n) = |\tilde{A}_1(m,n)|$. Тогда ясно, что

$$\tilde{\alpha}_1(m,n) = m!\alpha_1(m,n). \tag{1}$$

Фиксируем некоторое n-множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Определим на S линейный порядок $\leqslant$ следующим способом: $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$. Все гиперграфы, которые исследуются в этом разделе, являются помеченными, и их множеством вершин является множество S (вместе с данным линейным порядком); следовательно, вместо обозначения $(S, \mathcal{E})$ для соответствующих гиперграфов мы будем пользоваться только обозначением $\mathcal{E}$.

Фиксируем также некоторое счетное множество $V_\infty = \{v_1, v_2, \ldots\}$ такое, что $V_\infty \cap S = \varnothing$. Пусть $V_m = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ для любого натурального m. Обозначим через $\mathcal{D}_m$ класс всех помеченных орграфов с множеством V_m в качестве множества вершин. В последующем все орграфы с m вершин, рассматриваемые здесь, являются элементами множества $\mathcal{D}_m$.

Пусть $D \in \mathcal{D}_m$. Через $\mathcal{F}(D)$ обозначим множество всех функций вида $f : V_m \to \mathfrak{B}(S)$, удовлетворяющих следующему условию: если $(v, v') \in ED$, то $f(v) \subseteq f(v')$. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}(D)$ множество всех инъективных функций из $\mathcal{F}(D)$. Любой функции $f \in \mathcal{F}(D)$ ставится в соответствие у-(m,n)-гиперграф $H_f = (f(v_1), \ldots, f(v_m))$. Пусть $\mathcal{H}(D) = \{H_f \mid f \in \mathcal{F}(D)\}$, $\hat{\mathcal{H}}(D) = \{H_f \mid f \in \hat{\mathcal{F}}(D)\}$, $\lambda(D) = |\mathcal{F}(D)| = |\mathcal{H}(D)|$ и $\hat{\lambda}(D) = |\hat{\mathcal{F}}(D)| = |\hat{\mathcal{H}}(D)|$.

Пусть S' — некоторое подмножество множества S. Через $\boldsymbol{a}(S')$ обозначим двоичный n-набор $(a_1, \ldots, a_n)$, такой, что для всех $i \in \overline{n}$ выполнено $a_i = 1$ тогда и только тогда, когда $s_i \in S'$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — двоичный n-набор. Через $S(\boldsymbol{a})$ обозначим подмножество множества S, такое, что $s_i \in S(\boldsymbol{a})$ тогда и только тогда, когда $a_i = 1$.

Теперь можем вывести первую формулу для числа $\alpha_1(m,n)$.

Теорема 1. $\alpha_1(m,n) = \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{D \in \mathcal{D}_m} (-1)^{|ED|} \lambda(D).$

Доказательство. Говорим, что у-гиперграф $(e_1, \ldots, e_m)$ обладает свойством p_{ij} $(i, j \in \overline{m},\ i \neq j)$, если $e_i \subseteq e_j$. Заметим, что у-(m,n)-гиперграф $(S(\boldsymbol{a}_1), \ldots, S(\boldsymbol{a}_m))$ не обладает ни одним из свойств p_{ij} $(i, j \in \overline{m},\ i \neq j)$ для любого $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) \in \tilde{A}_1(m,n)$. Наоборот, если гиперграф $(e_1, \ldots, e_m)$ не обладает ни одним из свойств p_{ij} $(i, j \in \overline{m},$ $i \neq j)$, то $(\boldsymbol{a}(e_1), \ldots, \boldsymbol{a}(e_m)) \in \tilde{A}_1(m,n)$. Пусть $p_{i_1 j_1}, \ldots, p_{i_r j_r}$ — произвольных r таких свойств, и пусть D — орграф из $\mathcal{D}_m$, такой, что $ED = \{(v_{i_1}, v_{j_1}), \ldots, (v_{i_r}, v_{j_r})\}$. Ясно, что множество всех (m,n)-гиперграфов $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$, обладающих свойствами $p_{i_1 j_1}, \ldots, p_{i_r j_r}$, является множеством $\mathcal{H}(D)$. Тогда, пользуясь принципом включения-исключения, получаем, что

$$\tilde{\alpha}_1(m,n) = \sum_{D \in \mathcal{D}_m} (-1)^{|ED|} |\mathcal{H}(D)| = \sum_{D \in \mathcal{D}_m} (-1)^{|ED|} \lambda(D).$$

Теперь из соотношения (1) следует искомая формула.

Поскольку гиперграф $(S(\boldsymbol{a}_1), \ldots, S(\boldsymbol{a}_m))$ является гиперграфом без кратных ребер для любого $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) \in \tilde{A}_1(m,n)$, то повторяя рассуждения из доказательства Теоремы 1, но теперь только по отношению к у-(m,n)-гиперграфам без кратных ребер, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. $\alpha_1(m,n) = \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{D \in \mathcal{D}_m} (-1)^{|ED|} \hat{\lambda}(D).$

Покажем теперь, что данный результат можно улучшить, так что суммирование в вышеприведенной формуле будет идти только по части орграфов, а не по всем орграфам множества $\mathcal{D}_m$.

Обозначим через $\mathcal{J}_m$ множество всех орграфов из $\mathcal{D}_m$, не имеющих ориентированный маршрут длины $\geqslant 2$. Назовем орграфы из множества $\mathcal{J}_m$ *ежами*. Поскольку любой еж J позволяет разбиение множества своих вершин VJ на два подмножества V_1 и V_2 такие, что $EJ \cap (V_1 \times V_2) = EJ$, то с полным правом могли бы вместо термина «еж» использовать термин «двудольный направленный граф».

Теорема 3. $\alpha_1(m,n) = \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{D \in \mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} \hat{\lambda}(D)$.

Доказательство. Если через $\mathcal{A}_m$ обозначим множество всех безконтурных орграфов из $\mathcal{D}_m$, а через $\mathcal{A}'_m$ — множество всех орграфов из $\mathcal{A}_m$, имеющих хотя бы один путь длины $\geqslant 2$, то $\mathcal{J}_m = \mathcal{A}_m \backslash \mathcal{A}'_m$.

Сначала покажем, что для любого $D \in \mathcal{D}_m \backslash \mathcal{A}_m$ имеет место $\hat{\mathcal{F}}(D) = \varnothing$. Итак, пусть D — некоторый орграф из множества $\mathcal{D}_m \backslash \mathcal{A}_m$. Тогда у D есть контур $v_{i_1} e_1 v_{i_2} \dots v_{i_k}$, $v_{i_1} = v_{i_k}$. Теперь для любого $f \in \mathcal{F}(D)$ получаем, что $f(v_{i_1}) \subseteq f(v_{i_2}) \subseteq \dots \subseteq f(v_{i_k}) \subseteq f(v_{i_1})$ и, следовательно, $f(v_{i_1}) = f(v_{i_2}) = \dots = f(v_{i_k})$, и поэтому $f \notin \hat{\mathcal{F}}(D)$. Отсюда получаем, что $\hat{\mathcal{F}}(D) = \varnothing$, и тем самым показано, что

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_m \backslash \mathcal{A}_m} (-1)^{|ED|} \hat{\lambda}(D) = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{A}'_m$. Упорядочим некоторым способом все пары различных вершин из V_m^2 в последовательность $(u'_1, u''_1), \dots, (u'_{a_0}, u''_{a_0})$, $(a_0 = m(m-1))$. Разобьем множество $\mathcal{A}'_m$ на дизъюнктные классы $(\mathcal{A}'_m)_i$, $i \in \overline{a_0}$, так что орграф $D \in \mathcal{A}'_m$ принадлежит классу $(\mathcal{A}'_m)_i$ тогда и только тогда, когда D не принадлежит множеству $\cup_{l=1}^{i-1} (\mathcal{A}'_m)_l$ и в D существует простой путь длины $\geqslant 2$ с началом в u'_i и концом в вершине u''_i.

Ясно, что любой класс $(\mathcal{A}'_m)_i$, $i \in \overline{a_0}$, можно представить как дизъюнктное объединение 2-множеств, таких, что орграфы из этих подмножеств отличаются только тем, что один из них содержит дугу (u'_i, u''_i), а другой нет. Легко удостовериться, что если орграфы D' и D'' отличаются только тем, что один содержит дугу (u, v) $(u, v \in VD')$, а другой нет, и если при этом существует в них путь, связывающий вершину u с вершиной v, то $\hat{\lambda}(D') = \hat{\lambda}(D'')$, то есть $(-1)^{|ED'|} \hat{\lambda}(D') + (-1)^{|ED''|} \hat{\lambda}(D'') = 0$. Теперь ясно, что слагаемые той части суммы из Теоремы 2, которая соответствует орграфам из $\mathcal{A}'_m$, можно перегруппировать в сумму пар слагаемых, которые аннулируются, и следовательно имеет место равенство

$$\sum_{D \in \mathcal{A}'_m} (-1)^{|ED|} \hat{\lambda}(D) = \sum_{i=1}^{a_0} \sum_{D \in (\mathcal{A}'_m)_i} (-1)^{|ED|} \hat{\lambda}(D) = 0. \qquad (3)$$

Поскольку $\mathcal{D}_m$ является дизъюнктным объединением множеств $\mathcal{J}_m$, $\mathcal{A}'_m$ и $\mathcal{D}_m \backslash \mathcal{A}_m$, то утверждение данной теоремы является следствием Теоремы 2 и равенств (2) и (3).

Проблема нахождения чисел $\hat{\lambda}(D)$ сама по себе является сложной задачей, поэтому выгода от значительного уменьшения количества членов в сумме из Теоремы 2 сводится на нет, и формула, приведенная в Теореме 3, имеет малое практическое значение. С другой стороны, поскольку вычислить числа $\lambda(D)$, как мы увидим в следующем разделе, в принципе нетрудно, попытаемся теперь получить формулу, подобную только что полученной, но в которой вместо $\hat{\lambda}(D)$ фигурируют числа $\lambda(D)$.

Обозначим через $\mathcal{H}^{(i)}(D)$, $i \in \overline{m}$, множество всех у-(m,n)-гиперграфов из $\mathcal{H}(D)$, имеющих точно i различных ребер. Поскольку $\mathcal{H}^{(m)}(D) = \hat{\mathcal{H}}(D)$, то $\hat{\lambda}(D) = |\mathcal{H}^{(m)}(D)|$. Также, очевидно, что

$$\lambda(D) = \sum_{i=1}^{m} |\mathcal{H}^{(i)}(D)|.$$

Введем обозначение

$$\sigma(i) = \sum_{D \in \mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} |\mathcal{H}^{(i)}(D)|.$$

Тогда результат Теоремы 3 можно записать в виде равенства

$$\sigma(m) = \tilde{\alpha}_1(m,n).$$

Вычислим $\sigma(i)$ и для случая, когда $i \in \overline{m-1}$. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. $\displaystyle\sum_{D \in \mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} = (-1)^{m-1}$.

Доказательство. Пусть

$$a_m(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor m^2/4 \rfloor} a_{m,i}\, x^i,$$

где $a_{m,i}$ — число ежей с m вершин и i дуг. Нетрудно увидеть, что

$$a_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k b_{m-k}(x),$$

где

$$b_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (1+x)^{l(k-l)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Поскольку $b_k(-1) = 1$, когда $k = 0$, и $b_k(-1) = 2$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{D \in \mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} = a_m(-1) = (-1)^m + 2 \cdot (-1)^m \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^{m-1}.$$

Через $V_1(J)$ $(V_2(J))$ обозначим множество всех вершин ежа $J \in \mathcal{J}_m$, у которых полустепень захода (исхода) равна нулю. Ясно, что $V_0(J) = V_1(J) \cap V_2(J)$ является множеством всех изолированных вершин. Множество $V_1(J) \backslash V_0(J)$ $(V_2(J) \backslash V_0(J))$ назовем *верхней* (*нижней*) долей ежа J. Также, через $s(n,k)$ и $S(n,k)$ обозначим числа Стирлинга первого и второго рода, соответственно [8].

Лемма 2. *Для любого $i \in \overline{m}$ имеет место равенство*

$$\sigma(i) = (-1)^{m-i}\, S(m,i)\, \tilde{\alpha}_1(i,n).$$

Доказательство. В соответствии с Теоремой 3, данное равенство имеет место для $i = m$. Не опираясь на доказательство этого частного случая, докажем, что данное равенство имеет место для всех $i \in \overline{m}$. Введем множества

$$\mathfrak{P}_j = \{\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{B}(S) \,|\, |\mathcal{X}| = j\} \quad (j \in \overline{m}), \qquad \mathfrak{P}'_1 = \varnothing,$$
$$\mathfrak{P}'_j = \{\mathcal{X} \in \mathfrak{P}_j \,|\, (\exists\, X', X'' \in \mathcal{X})\ X' \subseteq X'' \wedge X' \neq X''\} \quad (j \in \overline{2,m}),$$
$$\mathfrak{P}''_j = \mathfrak{P}_j \backslash \mathfrak{P}'_j \quad (j \in \overline{m}).$$

Заметим, что $|\mathfrak{P}''_i| = |A_1(i,n)| = \alpha_1(i,n)$ для любого $i \in \overline{m}$.

Фиксируем некоторое $i \in \overline{m}$, и пусть $\mathcal{X} \in \mathfrak{P}_i$. Обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \{f : V_m \to \mathfrak{B}(S) \,|\, f(V_m) = \mathcal{X}\}$. Пусть $\mathcal{F}(D;\mathcal{X}) = \mathcal{F}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{F}(D)$ для любого $D \in \mathcal{D}_m$. Через $\mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ обозначим множество всех нагруженных орграфов (D,f) таких, что $D \in \mathcal{J}_m$ и $f \in \mathcal{F}(D;\mathcal{X})$. Пусть

$V_m(X;D,f) = \{v \in V_m \,|\, f(v) = X\}$ для любого $(D,f) \in \mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ и $X \in \mathcal{X}$. Очевидно следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\sigma(i) &= \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|}|\mathcal{H}^{(i)}(D)| = \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} \sum_{\mathcal{X}\in\mathfrak{P}_i} |\mathcal{F}(D;\mathcal{X})| = \\
&= \sum_{\mathcal{X}\in\mathfrak{P}_i} \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|}|\mathcal{F}(D;\mathcal{X})| = \sum_{\mathcal{X}\in\mathfrak{P}_i} \sum_{(D,f)\in\mathcal{J}_m(\mathcal{X})} (-1)^{|ED|} = \\
&= \sum_{\mathcal{X}\in\mathfrak{P}'_i} \sum_{(D,f)\in\mathcal{J}_m(\mathcal{X})} (-1)^{|ED|} + \sum_{\mathcal{X}\in\mathfrak{P}''_i} \sum_{(D,f)\in\mathcal{J}_m(\mathcal{X})} (-1)^{|ED|}.
\end{aligned}$$

Обозначим в выше данном выражении первую сумму после последнего знака равенства через $\sigma_1(i)$, а вторую — через $\sigma_2(i)$. Заметим, что если $i = 1$, то $\sigma_1(i) = 0$, и следовательно $\sigma(i) = 0 + \sigma_2(i) = \sigma_2(i)$. Покажем, что равенство $\sigma(i) = \sigma_2(i)$ имеет место для всех $i \in \overline{m}$.

Возьмем некоторое $\mathcal{X} \in \mathfrak{P}'_i$, $i \in \overline{2,m}$. Тогда существуют $\hat{X}', \hat{X}'' \in \mathcal{X}$, такие, что $\hat{X}' \subseteq \hat{X}''$. Пусть X' и X'' соответственно минимальный и максимальный элементы некоторой цепи в $\mathcal{X}$, содержащей множества $\hat{X}'$ и $\hat{X}''$. Тогда ясно, что для любого $(D,f) \in \mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ множества $V_m^{(1)}(X';D,f) = V_1(D) \cap V_m(X';D,f)$ и $V_m^{(2)}(X'';D,f) = V_2(D) \cap V_m(X'';D,f)$ непустые. Разобьем класс $\mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ на подклассы $[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_k$, $k \in \overline{c_0}$, так, что два нагруженных орграфа (D',f') и (D'',f'') принадлежат одному и тому же подклассу $[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_k$ тогда и только тогда, когда $f' = f'' = f$, $V_m^{(1)}(X';D',f') = V_m^{(1)}(X';D'',f'')$, $V_m^{(2)}(X'';D',f') = V_m^{(2)}(X'';D'',f'')$ и $\hat{D}_k = (V_m, ED'\backslash E_0) = (V_m, ED''\backslash E_0)$, где $E_0 = V_m^{(1)}(X';D',f) \times V_m^{(2)}(X'';D',f)$. Теперь мы получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\mathcal{X}) = \sum_{(D,f)\in\mathcal{J}_m(\mathcal{X})} (-1)^{|ED|} &= \sum_{k=1}^{c_0} \sum_{(D,f)\in[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_k} (-1)^{|ED|} = \\
&= \sum_{k=1}^{c_0} (-1)^{|E\hat{D}_k|} \sum_{E'\subseteq E_0} (-1)^{|E'|} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma_1(\mathcal{X}) = 0$ для всех $\mathcal{X} \in \mathfrak{P}'_i$, то опять имеем, что $\sigma_1(i) = 0$, и, следовательно, $\sigma(i) = \sigma_2(i)$.

Теперь пусть $\mathcal{X} \in \mathfrak{P}''_i$, $i \in \overline{m}$. Заметим, что $X' \not\subseteq X''$ для любых двух различных $X', X'' \in \mathcal{X}$. Разобьем класс $\mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ на подклассы

$[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, так что нагруженный орграф $(D', f') \in \mathcal{J}_m(\mathcal{X})$ принадлежит подклассу $[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f$ тогда и только тогда, когда $f' = f$. Получаем, что

$$\sigma(i) = \sigma_2(i) = \sum_{\mathcal{X} \in \mathfrak{P}''_i} \sum_{f \in \mathcal{F}(\mathcal{X})} \sum_{(D,f) \in [\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f} (-1)^{|ED|}.$$

Фиксируем некоторые $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_i\} \in \mathfrak{P}''_i$ и $f \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, и пусть дано некоторое $(D, f) \in [\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f$. Также пусть $W_k = V_m(X_k; D, f)$, $D'_k = (W_k, ED \cap W_k^2)$ и $m_k = |W_k|$ для любого $k \in \bar{i}$. Заметим, что $ED \cap (W_k \times W_l) = \varnothing$ для любых $k, l \in \bar{i}$, $k \neq l$. Через D_k, $k \in \bar{i}$, обозначим орграф из $\mathcal{J}_{m_k}$, который изоморфен D'_k. Ясно, что когда (D, f) проходит множество $[\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f$, то орграф D_k проходит полностью множество $\mathcal{J}_{m_k}$. Тогда, пользуясь Леммой 1, получаем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(D,f) \in [\mathcal{J}_m(\mathcal{X})]_f} (-1)^{|ED|} = \sum_{D_1 \in \mathcal{J}_{m_1}} \cdots \sum_{D_i \in \mathcal{J}_{m_i}} (-1)^{|ED_1|} \ldots (-1)^{|ED_i|} = \\
&\quad = \sum_{D_1 \in \mathcal{J}_{m_1}} \cdots \sum_{D_{i-1} \in \mathcal{J}_{m_{i-1}}} (-1)^{|ED_1|} \ldots (-1)^{|ED_{i-1}|} \sum_{D_i \in \mathcal{J}_{m_i}} (-1)^{|ED_i|} = \\
&\quad = (-1)^{m_i - 1} \sum_{D_1 \in \mathcal{J}_{m_1}} \cdots \sum_{D_{i-1} \in \mathcal{J}_{m_{i-1}}} (-1)^{|ED_1|} \ldots (-1)^{|ED_{i-1}|} = \cdots = \\
&\quad = (-1)^{m_1 - 1} \ldots (-1)^{m_i - 1} = (-1)^{m-i}.
\end{aligned}$$

Поскольку $|\mathfrak{P}''_i| = \alpha_1(i, n)$ и $|\mathcal{F}(\mathcal{X})| = i! S(m, i)$, то, окончательно, получаем, что

$$\begin{aligned}
\sigma(i) &= \sum_{D \in \mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} |\mathcal{H}^{(i)}(D)| = (-1)^{m-i} \sum_{\mathcal{X} \in \mathfrak{B}''_i} \sum_{f \in \mathcal{F}(\mathcal{X})} 1 = \\
&= (-1)^{m-i} \alpha_1(i, n)\, i!\, S(m, i) = (-1)^{m-i} S(m, i)\, \tilde{\alpha}_1(i, n).
\end{aligned}$$

Докажем сейчас справедливость формулы, которая является основной в работе.

Теорема 4. $\alpha_1(m, n) = \dfrac{1}{m!} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |s(m, i)| \sum_{D \in \mathcal{J}_i} (-1)^{|ED|} \lambda(D).$

Доказательство. Пусть

$$\beta_1(m,n) = \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|}\lambda(D) = \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} \sum_{i=1}^{m} |\mathcal{H}^{(i)}(D)|.$$

Меняя порядок суммирования в последней сумме и применяя Лемму 2, получаем, что

$$\beta_1(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{D\in\mathcal{J}_m} (-1)^{|ED|} |\mathcal{H}^{(i)}(D)| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i}\, S(m,i)\, \tilde{\alpha}_1(i,n).$$

Окончательно, применяя инверсию Стирлинга [8], получаем, что

$$\tilde{\alpha}_1(m,n) = \sum_{i=1}^{m} |s(m,i)|\, \beta_1(i,n) = \sum_{i=1}^{m} |s(m,i)| \sum_{D\in\mathcal{J}_i} (-1)^{|ED|}\lambda(D).$$

Теперь из равенства (1) следует искомое равенство.

Легко удостовериться, что следующее утверждение имеет место.

Лемма 3. *Если $C_1, C_2, \dots, C_k$ — все компоненты слабой связности орграфа D, то*

$$\lambda(D) = \lambda(C_1)\cdot\lambda(C_1)\cdot\dots\cdot\lambda(C_k).$$

Пусть $B_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$ — число всех разбиений n-множества на $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ подмножеств, среди которых существует точно k_i i-множеств ($i \in \overline{n}$). Как известно, многочлены

$$Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} B_n(k_1, k_2, \dots, k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ ($k_i \geqslant 0$), называются многочленами Белла [15]. Обозначим через $\mathcal{J}_m^c$ множество всех слабо связных ежей из множества $\mathcal{D}_m$. Тогда из Теоремы 4 и Леммы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Имеет место формула*

$$\alpha_1(m,n) = \frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m} |s(m,i)|\, Y_i(\hat{\beta}(1,n), \hat{\beta}(2,n), \ldots, \hat{\beta}(i,n)),$$

где

$$\hat{\beta}(j,n) = \sum_{D\in\mathcal{J}_j^c} (-1)^{|ED|}\lambda(D), \quad j \in \overline{1,m}.$$

3. О числах $\lambda(D)$

В предыдущем разделе даны формулы, которые проблему перечисления классов $A_1(m,n)$, в принципе, сводят к проблеме нахождения чисел $\lambda(D)$ $(D \in \mathcal{D}_m)$, если, конечно, при этом не учитывать «скорость возрастания» их количества. В этом разделе предлагается один способ для нахождения этих чисел и, следовательно, приводятся более удобные варианты формул из Теорем 4 и 5.

Лемма 4. *Имеет место* $\lambda(D) = \eta^n_{\Rightarrow}(D)$ *для любого* $D \in \mathcal{D}_m$.

Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ — некоторый у-(m,n)-гиперграф из $\mathcal{H}(D)$. Заметим, что $\boldsymbol{a}(e_k) \leqslant \boldsymbol{a}(e_l)$ $(k,l \in \overline{m},\ k \neq l)$ тогда и только тогда, когда $e_k \subseteq e_l$. Отсюда следует, что для любого $j \in \overline{n}$ функция $\nu_j : V_m \to \{0,1\}$, где $\nu_j(v_k) = \mathbf{pr}_j(\boldsymbol{a}(e_k))$ для любого $k \in \overline{m}$, определяет некоторую $\Rightarrow$-раскраску орграфа D. Таким образом, любому $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathcal{H}(D)$ можем ставить в соответствие некоторый n-набор $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ $\Rightarrow$-раскрасок орграфа D. Теперь пусть $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — некоторый n-набор $\Rightarrow$-раскрасок орграфа D. Ставим этому набору в соответствие гиперграф $(e_1, \ldots, e_m)$, где $e_i = S[(\nu_1(v_i), \ldots, \nu_n(v_i))]$ для любого $i \in \overline{m}$. Легко заметить, что $(e_1, \ldots, e_m) \in \mathcal{H}(D)$. Поскольку оба выше данных соответствия являются очевидно инъективными, то искомое равенство имеет место.

Теперь пользуясь Леммой 4 из Теоремы 4, получаем, что следующее утверждение имеет место.

Теорема 6. $\alpha_1(m,n) = \dfrac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m} |s(m,i)| \sum_{D\in\mathcal{J}_i} (-1)^{|ED|}\eta^n_{\Rightarrow}(D).$

Пусть G — некоторый (орграф) граф, и $V_1 \subseteq V$ — некоторое множество его вершин. Через $G - V$ обозначим порожденный подграф $<VG\backslash V>$ (орграфа) графа G.

Пусть u — некоторая вершина графа G. Через $\mathrm{Adj}\,(u)$ обозначим множество всех вершин, смежных вершине u. Пусть v — некоторая вершина орграфа D. Через $\mathrm{Adj}(v)$ обозначим множество всех вершин смежных к вершине v или смежных из вершины v, через $\mathrm{Out}(v)$ — множество всех вершин достижимых из v, а через $\mathrm{In}(v)$ — множество всех вершин, из которых достижима вершина v. Если возьмем, что $\eta_{\Rightarrow}(\varnothing) = 1$ и $\eta_{\uparrow}(\varnothing) = 1$, где $\varnothing$ — нулевой граф или нулевой орграф, то легко удостовериться, что имеют место следующие два утверждения (см. также [5]).

Предложение 1. ($\Rightarrow$-декомпозиционная лемма). Пусть D — некоторый орграф. Тогда

$$\eta_{\Rightarrow}(G) = \eta_{\Rightarrow}(G - (\{v\} \cup \mathrm{Out}(v))) + \eta_{\Rightarrow}(G - (\{v\} \cup \mathrm{In}(v)))$$

для любого $v \in VG$.

Предложение 2. ($\uparrow$-декомпозиционная лемма). Пусть G — некоторый граф или орграф. Тогда

$$\eta_{\uparrow}(G) = \eta_{\uparrow}(G - \{v\}) + \eta_{\uparrow}(G - (\{v\} \cup \mathrm{Adj}(v)))$$

для любого $v \in VG$.

Пользуясь выше данными формулами можем теперь легко вычислить ($\eta_{\uparrow}(G)$) $\eta_{\Rightarrow}(G)$ для случая некоторых специальных типов (графов или орграфов) орграфов G.

Пример 1. Пусть K_n и $K_{m,n}$ — соответственно полный n-вершинный граф и полный двудольный граф с долями из m и n вершин. Тогда $\eta_{\uparrow}(K_n) = n + 1$ и $\eta_{\uparrow}(K_{m,n}) = 2^m + 2^n - 1$. Если P_n простая цепь с n вершинами, то мы получаем последовательность Фибоначчи $\eta_{\uparrow}(P_n) = \eta_{\uparrow}(P_{n-1}) + \eta_{\uparrow}(P_{n-2})$, $n = 2, 3, \dots$, $\eta_{\uparrow}(P_0) = 1$, $\eta_{\uparrow}(P_1) = 2$.

Теперь пусть D — орграф. Если D — путь длины n, то $\eta_{\Rightarrow}(D) = n + 2$, но $\eta_{\uparrow}(D) = \eta_{\uparrow}(P_{n+1})$. Если D — контур с n, $n \geqslant 3$, вершинами, то $\eta_{\Rightarrow}(D) = 2$, но $\eta_{\uparrow}(D) = \eta_{\uparrow}(P_{n-1}) + \eta_{\uparrow}(P_{n-3})$.

Также легко удостовериться, что если $C_1, C_2, \dots, C_k$ — все компоненты (слабой связности) связности (орграфа) графа G, то

$$\eta(G) = \eta(C_1) \cdot \eta(C_1) \cdot \dots \cdot \eta(C_k),$$

где η есть (либо $\eta_{\Rightarrow}$, либо $\eta_{\uparrow}$) $\eta_{\uparrow}$.

Легко убедиться, что на множестве ежей обе декомпозиционные формулы одинаковы. Следовательно, имеем следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любого ежа $D \in \mathcal{J}_m$ имеет место равенство $\eta_{\Rightarrow}(D) = \eta_{\uparrow}(D)$.*

Теперь, используя Лемму 5, можем переписать формулу из Теоремы 6 следующим способом.

Теорема 6′. $\alpha_1(m,n) = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |s(m,i)| \sum_{D\in\mathcal{J}_i} (-1)^{|ED|}\eta_{\uparrow}^{n}(D).$

Переход к новому типу раскраски в Теореме 6′ является формальным, но относительно Теоремы 5 он становится существенным, поскольку позволяет перейти с ежей на двудольные графы в формуле из Теоремы 5, и тем самым дает возможность уменьшить количество членов в соответствующей сумме более, чем в два раза.

Действительно, пусть $\mathcal{B}^c_{\{s,t\}}$ — множество всех связных двудольных графов с долями «фиксированного состава», содержащими соответственно s и t вершин (порядок долей не фиксируется); $s,t \in \mathbb{N}$, $s+t=m$. Пусть

$$b(s,t) = \sum_{B\in\mathcal{B}^c_{\{s,t\}}} (-1)^{|EB|}\eta_{\uparrow}^{n}(B), \quad s,t\in\mathbb{N}, s+t=m.$$

Заметим, что $b(s,t) = b(t,s)$ для всех $s,t \in \mathbb{N}$, $s+t=m$, а также, что

$$b(1,t) = \sum_{B\in\mathcal{B}^c_{\{1,t\}}} (-1)^{|EB|}\eta_{\uparrow}^{n}(B) = (-1)^{|EK_{1,t}|}\eta_{\uparrow}^{n}(K_{1,t}) = (-1)^{t}(2^t+1)^n$$

для любого $t \in \mathbb{N}$. Теперь из Теоремы 5 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Имеет место формула*

$$\alpha_1(m,n) = \frac{1}{m!}\sum_{i=1}^{m} |s(m,i)| Y_i(\beta(1,n), \beta(2,n), \dots, \beta(i,n)),$$

где

$$\beta(1,n) = 2^n \quad \text{и} \quad \beta(j,n) = \sum_{k=1}^{j-1} \binom{j}{k} b(k, j-k), \quad j \in \overline{2,i}.$$

4. T_0- и T_1-гиперграфы

Аналогично тому, как в общей топологии введены понятия T_0-, T_1- и T_2-пространств, определим следующие классы гиперграфов. Говорим, что (у-гиперграф) гиперграф H является (упорядоченным):

a) *T_0-гиперграфом* тогда и только тогда, когда для любых вершин $u, v \in V$, $u \neq v$, существует дуга $e \in \mathcal{E}H$, такая, что $(u \in e \wedge v \notin e\ ) \vee (u \notin e \wedge v \in e)$,

b) *T_1-гиперграфом* тогда и только тогда, когда для любой пары вершин $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$, существует дуга $e \in \mathcal{E}H$, такая, что $(u \in e \wedge v \notin e)$,

c) *T_2-гиперграфом* тогда и только тогда, когда для любой пары вершин $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$, существуют дуги $e_1, e_2 \in \mathcal{E}H$, такие, что $(u \in e_1 \wedge v \in e_2 \wedge e_1 \cap e_2 = \varnothing)$.

Легко найти формулу для числа всех у-(m,n)-T_0-гиперграфов, а также для числа всех у-(m,n)-T_0-гиперграфов без кратных дуг. Соответствующие формулы для (m,n)-T_0-гиперграфов, а также для числа всех (m,n)-T_0-гиперграфов без кратных дуг можно найти в [13]. В [5] исследуется более узкий класс таких гиперграфов, который связан естественным образом с одним из классов Поста. Приведем здесь один из результатов из [5], касающийся настоящей работы.

В [5] рассматривается проблема перечисления классов $F_8^{\mu}(n|m)$ $(\mu \in \mathbb{N})$. Показано, что эта проблема сводится к проблеме подсчета μ-полных у-(n,m)-T_0-гиперграфов, которая в свою очередь сводится к нахождению числа всех гиперграфов с фиксированным числом вершин и ребер, а также с фиксированным числом независимых множеств вершин. В [5] независимое множество гиперграфа интерпретируется через его соответствующую (обобщенную) $\uparrow$-раскраску. Приведем результат, полученный в [5] для случая $\mu = 2$. Пусть

$\alpha_0(m,n) = |F_8^2(n|m)|$ и $\hat{\alpha}_0(m,n)$ — число всех 2-полных у-(n,m)-T_0-гиперграфов (в [5] эти числа обозначены соответственно через $\alpha_2(m,n)$ and $\beta_2(m,n)$). Легко видеть, что $\alpha_0(m,n) = (1/m!)\,\hat{\alpha}_0(m,n)$. Пусть $\mathcal{G}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — класс всех графов G, у которых $VG = V_k$. Показано, что

$$\alpha_0(m,n) = \frac{1}{m!}\left[(-1)^m(m-1)! + \sum_{i=1}^{m} s(m,i) \sum_{G\in\mathcal{G}_i} (-1)^{|EG|}\,\eta_\uparrow^n(G)\right]. \tag{4}$$

Заметим, что любую функцию из $F_8^2(n|m)$ можно интерпретировать в терминах теории множеств как m-семейство различных подмножеств некоторого n-множества, такое, что любые два подмножества этого семейства имеют непустое пересечение; назовем такие семейства семействами с непустым пересечением.

Обозначим через $\gamma(m,n)$ число 2-полных (n,m)-гиперграфов (или число семейств из m подмножеств n-множества с непустым пересечением; отметим, что подмножества в этих семействах могут повторяться). Поскольку число упорядоченных k-разбиений числа m равно $\binom{m-1}{k-1}$ [8], то получаем

$$\begin{aligned}\gamma(m,n) &= \sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\alpha_0(k,n) = \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{k!}\binom{m-1}{k-1}\hat{\alpha}_0(k,n) = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m} L'(m,k)\hat{\alpha}_0(k,n),\end{aligned}$$

где $L'(m,k)$ числа Ла (без знака), или, как они тоже называются, числа Стирлинга третьего рода [8]. Далее, если

$$\beta_0(i,n) = \sum_{G\in\mathcal{G}_i}(-1)^{|EG|}\eta_\uparrow^n(G),$$

то из формулы (4) получаем, что

$$\gamma(m,n) = \frac{1}{m!}\left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(k-1)!L'(m,k) + \sum_{k=1}^{m}L'(m,k)\sum_{k=1}^{m}s(k,i)\beta_0(i,n)\right].$$

Поскольку первая сумма равна $-(m-1)!$, а вторая сумма, после изменения порядка суммирования и применения соотношений [8]

$$[x]^m = \sum_{k=1}^{m} L'(m,k)[x]_k, \quad [x]_m = \sum_{k=1}^{m} s(m,k)x^k \ \text{ и } \ [x]^m = \sum_{k=1}^{m} |s(m,k)|x^k,$$

равна

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=i}^{m} L'(m,k)s(k,i) \right) \beta_0(i,n) = \sum_{i=1}^{m} |s(m,i)|\beta_0(i,n),$$

то

$$\gamma(m,n) = \frac{1}{m!} \left[-(m-1)! + \sum_{i=1}^{m} |s(m,i)| \sum_{G \in \mathcal{G}_i} (-1)^{|EG|} \eta_{\uparrow}^{n}(G) \right]; \qquad (5)$$

здесь $[x]_m$ и $[x]^m$ — соответственно убывающий и возрастающий факториалы [8].

Интересно заметить формальную схожесть формулы из Теоремы $6'$ с формулами (4) и (5). Мы считаем, что существует более глубокий комбинаторный смысл, отвечающий за эту схожесть, хотя нам пока не удалось установить, что лежит в основе этого факта.

(У-гиперграф) гиперграф H без кратных ребер является (*у-антицепью*) *антицепью*, если $e_1 \nsubseteq e_2$ для любых двух различных ребер $e_1, e_2 \in \mathcal{E}H$, то есть множество $\mathcal{E}H$ является семейством Шпернера на множестве VH. Пусть H — произвольная (m,n)-антицепь ((m,n)-гиперграф, являющийся антицепью). Ясно, что множество n-наборов $\{\boldsymbol{a}(e) \,|\, e \in \mathcal{E}H\}$, является множеством минимальных единиц некоторой функции из $A_1(m,n)$; обозначим эту функцию через f_H. Соответствие, которое гиперграфу H приписывает функцию f_H, определяет одну биекцию с множества всех (m,n)-антицепей на множество $A_1(m,n)$.

Пусть $H = (V, \mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, — некоторый гиперграф. Обозначим $\Lambda_v = \{\lambda \in \Lambda \,|\, v \in e_\lambda\}$ для любого $v \in V$. *Дуальным гиперграфом* гиперграфа H называем гиперграф $H^* = (V^*, \mathcal{E}^*)$, где $V^* = \Lambda$ и $\mathcal{E}^* = \{\Lambda_v, v \in V\}$. Если H — помеченный у-гиперграф, то H^* также является помеченным у-гиперграфом; линейный порядок на V^* индуцирован линейным порядком на $\mathcal{E}$, и упорядоченность ребер множества $\mathcal{E}^*$ индуцирована линейным порядком, данным на V и помечающим H. Легко заметить, что если H — у-(m,n)-антицепь, то соответствующий дуальный гиперграф H^* является у-(n,m)-T_1-гиперграфом. Поэтому число всех помеченных упорядоченных T_1-гиперграфов, у которых m вершин и n ребер, равно числу $\tilde{\alpha}_1(m,n)$, и, как мы уже видели, оно равно $m!\,\alpha_1(m,n)$.

Таким образом, из приведенных выше рассуждений видно, что следующие четыре проблемы, а именно: проблема определения числа $\alpha_1(m,n)$, проблема перечисления множества всех у-(n,m)-T_1-гиперграфов, проблема Дедекинда и проблема определения числа всех семейств Шпернера на каком-то множестве, являются, в принципе, эквивалентными.

5. Иллюстрация метода и некоторые явные формулы

Проиллюстрируем возможности формулы, данной в Теореме 7.

Пример 2. Вычислим значения $\alpha_1(m,n)$, $1 \leqslant m \leqslant 5$. Поскольку $b(1,t) = (-1)^t(2^t+1)^n$ и $b(s,t) = b(t,s)$ для любых $s,t \in \mathbb{N}$, то чтобы вычислить $\alpha_1(m,n)$, $1 \leqslant m \leqslant 5$, нужно еще рассмотреть только классы $\mathcal{B}^c_{\{2,2\}}$ и $\mathcal{B}^c_{\{2,3\}}$. На рис. 1 даны все непомеченные двудольные графы, представляющие классы, на которые изоморфизм графов разбивает множества $\mathcal{B}^c_{\{2,2\}}$ и $\mathcal{B}^c_{\{2,3\}}$. Первое число возле любого из приведенных графов является мощностью соответствующего класса, второе дает соответствующее значение $\eta_\uparrow$ (у всех изоморфных графов эти значения тождественны).

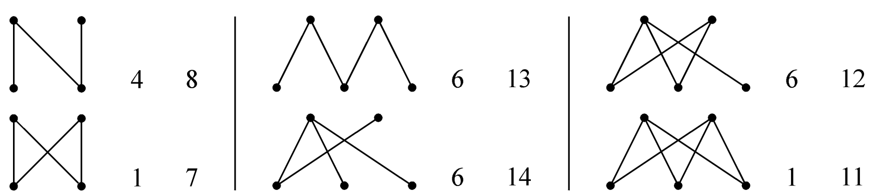

Рис. 1.

Отсюда, используя Теорему 7, получаем

$$b(1,1) = -3^n, \qquad b(1,2) = 5^n, \qquad b(1,3) = -9^n, \qquad b(1,4) = 17^n,$$
$$b(2,2) = -4 \cdot 8^n + 7^n, \qquad b(2,3) = 6 \cdot 14^n + 6 \cdot 13^n - 6 \cdot 12^n + 11^n$$

и

$$\beta(1,n) = 2^n, \qquad \beta(2,n) = -2 \cdot 3^n, \qquad \beta(3,n) = 6 \cdot 5^n,$$
$$\beta(4,n) = -8 \cdot 9^n - 24 \cdot 8^n + 6 \cdot 7^n,$$
$$\beta(5,n) = 10 \cdot 17^n + 120 \cdot 14^n + 120 \cdot 13^n - 120 \cdot 12^n + 20 \cdot 11^n.$$

Заменяя x_i, $i \in \overline{5}$, значением $\beta(i,n)$ в многочленах Белла [15]

$$Y_1(x_1) = x_1, \quad Y_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2, \quad Y_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3,$$
$$Y_4(x_1,\ldots,x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_4,$$
$$Y_5(x_1,\ldots,x_5) = x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 10x_1^2x_3 + 15x_1x_2^2 + 5x_1x_4 + 10x_2x_3 + x_5$$

получаем, соответственно, выражения:

$$\begin{aligned}
&2^n,\\
&4^n - 2 \cdot 3^n,\\
&8^n - 6 \cdot 6^n + 6 \cdot 5^n,\\
&16^n - 12 \cdot 12^n + 24 \cdot 10^n + 4 \cdot 9^n - 24 \cdot 8^n + 6 \cdot 7^n,\\
&32^n - 20 \cdot 24^n + 60 \cdot 20^n + 20 \cdot 18^n + 10 \cdot 17^n - 120 \cdot 16^n - 120 \cdot 15^n +\\
&\qquad + 150 \cdot 14^n + 120 \cdot 13^n - 120 \cdot 12^n + 20 \cdot 11^n,
\end{aligned}$$

и отсюда, используя первую формулу из Теоремы 7, мы окончательно находим, что

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1,n) &= 2^n,\\
\alpha_1(2,n) &= \frac{1}{2!}\,(4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n),\\
\alpha_1(3,n) &= \frac{1}{3!}\,(8^n - 6 \cdot 6^n + 6 \cdot 5^n + 3 \cdot 4^n - 6 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n),\\
\alpha_1(4,n) &= \frac{1}{4!}\,(16^n - 12 \cdot 12^n + 24 \cdot 10^n + 4 \cdot 9^n - 18 \cdot 8^n + 6 \cdot 7^n - 36 \cdot 6^n +\\
&\quad 36 \cdot 5^n + 11 \cdot 4^n - 22 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n),\\
\alpha_1(5,n) &= \frac{1}{5!}\,(32^n - 20 \cdot 24^n + 60 \cdot 20^n + 20 \cdot 18^n + 10 \cdot 17^n - 110 \cdot 16^n -\\
&\quad 120 \cdot 15^n + 150 \cdot 14^n + 120 \cdot 13^n - 240 \cdot 12^n + 20 \cdot 11^n + 240 \cdot 10^n +\\
&\quad 40 \cdot 9^n - 205 \cdot 8^n + 60 \cdot 7^n - 210 \cdot 6^n + 210 \cdot 5^n + 50 \cdot 4^n -\\
&\quad 100 \cdot 3^n + 24 \cdot 2^n).
\end{aligned}$$

Также, «безкомпьютерному» вычислению поддается и нахождение следующих двух формул:

$$\alpha_1(6,n) = \frac{1}{6!}(64^n - 30\cdot 48^n + 120\cdot 40^n + 60\cdot 36^n + 60\cdot 34^n - 12\cdot 33^n - 345\cdot 32^n - 720\cdot 30^n + 810\cdot 28^n + 120\cdot 27^n + 480\cdot 26^n + 360\cdot 25^n - 480\cdot 24^n - 720\cdot 23^n - 240\cdot 22^n - 540\cdot 21^n + 1380\cdot 20^n + 750\cdot 19^n + 60\cdot 18^n - 210\cdot 17^n - 1535\cdot 16^n - 1820\cdot 15^n + 2250\cdot 14^n + 1800\cdot 13^n - 2820\cdot 12^n + 300\cdot 11^n + 2040\cdot 10^n + 340\cdot 9^n - 1815\cdot 8^n + 510\cdot 7^n - 1350\cdot 6^n + 1350\cdot 5^n + 274\cdot 4^n - 548\cdot 3^n + 120\cdot 2^n),$$

$$\alpha_1(7,n) = \frac{1}{7!}(128^n - 42\cdot 96^n + 210\cdot 80^n + 140\cdot 72^n + 210\cdot 68^n - 84\cdot 66^n + 14\cdot 65^n - 819\cdot 64^n - 2520\cdot 60^n + 2730\cdot 56^n + 840\cdot 54^n + 840\cdot 52^n - 420\cdot 51^n + 2940\cdot 50^n + 630\cdot 48^n - 5040\cdot 46^n + 840\cdot 45^n - 1260\cdot 44^n + 1680\cdot 43^n - 9660\cdot 42^n + 1260\cdot 41^n + 3360\cdot 40^n - 7560\cdot 39^n + 11130\cdot 38^n + 5880\cdot 37^n + 9240\cdot 36^n + 2982\cdot 35^n - 6300\cdot 34^n - 8652\cdot 33^n - 9905\cdot 32^n - 8400\cdot 31^n - 8540\cdot 30^n + 13860\cdot 29^n + 14490\cdot 28^n - 5040\cdot 27^n + 10500\cdot 26^n + 10080\cdot 25^n - 8120\cdot 24^n - 15050\cdot 23^n - 5040\cdot 22^n - 11340\cdot 21^n + 20580\cdot 20^n + 15750\cdot 19^n - 1540\cdot 18^n - 5810\cdot 17^n - 16485\cdot 16^n - 21420\cdot 15^n + 26250\cdot 14^n + 21000\cdot 13^n - 29820\cdot 12^n + 3500\cdot 11^n + 17640\cdot 10^n + 2940\cdot 9^n - 16016\cdot 8^n + 4410\cdot 7^n - 9744\cdot 6^n + 9744\cdot 5^n + 1764\cdot 4^n - 3528\cdot 3^n + 720\cdot 2^n).$$

Таким образом получаем, что в случае $1 \leqslant m \leqslant 7$, соответствующие выражения можно вычислить, так сказать, «вручную», не прибегая к помощи компьютера (сравните это с тем, как в [10] получена соответствующая формула для $m = 4$). Выражения для $8 \leqslant m \leqslant 10$ найдены с помощью компьютера.[3]

Все выше данные выражения, а также соответствующие выражения для $m = \overline{8,10}$, вместе с своими значениями для малых n представлены в [13].[4]

Список литературы

[1] Post E. Two-valued iterative systems // Annals of Mathematics Studies. No. **5**. N.J.: Princeton University Press, 1941.

---

[3]Авторы выражают свою благодарность Зорану Максимовичу с Технолого-металлургического факультета Белградского университета, который написал согласно изложенному здесь методу соответствующую программу для порождения этих выражений.

[4]Часть выше данных результатов вместе с комментариями Кевина Брауна представлена на вебсайте http://www.mathpages.com/home/kmath515.htm.

[2] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[3] Balbes R. On counting Sperner families // J. Combinatorial Theory, Series. A 27. P. 1–9. 1979.

[4] Горчаков Ю.М. О числе монотонных функций. Алгебро-логические конструкции. Калинин.

[5] Йовович В., Килибарда Г. О числе функций алгебры логики в классах Поста F_8^{μ} // Дискретная математика. Т. 11. Вып. 4. С. 127–138. 1999. (Translated in Discrete Mathematics and Applications. V. 9. No. 6. 1999).

[6] Dedekind R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler // Festschrift Hoch. Braunschweig u. ges. Werke. Vol. II. P. 103–148. 1897.

[7] Birkhoff G. Lattice Theory. Providence, Rhode Island, 1967.

[8] Aigner M. Combinatorial Theory. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.

[9] Riviere N.M. Recursive formulas on free distributive lattices // J. Combinatorial Theory. 5. P. 229–234. 1968.

[10] Cvetković D. The number of antichains of finite power sets // Publ. de L'institut Mathématique. Nouvelle série. Tome 13 (27). 5–9. 1972.

[11] Arocha J.L. Anticadenas en conjuntos ordenados // An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autonoma Mexico. 27. 1–21. 1987.

[12] Arocha J.L. El numero de anticadenas en longitud 5 y 6 (en ruso). VINITI 06.04.82. Reg. #1631-82 Dep. 1982.

[13] Sloane N.J.A. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. http://www.research.att.com/∼njas/sequences/index.html.

[14] Харари Ф. Теория графов / Пер. с англ. М.: Мир, 1973.

[15] Riordan J. Combinatorial Identities. New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, 1968.