Модель самоочищения лёгочных структур*

Ю.Г. Гераськина

Введение

В работе строится модель, имитирующая структуру и процесс самоочищения в лёгочных тканях живых организмов.

В реальной ситуации лёгкие образуют древовидную структуру, в сегментах бронхов которой имеются ворсинки, играющие роль эскалаторного механизма вывода накопившегося в лёгких вещества во вне. Сегменты имеют разные пропускные способности и разную эффективность ворсинок. Чем выше от альвеол, тем мощнее механизм передачи вещества изнутри во вне.

Возникает задача построения модели лёгочного механизма самоочищения и изучения её свойств.

В работе предлагается такая модель и для неё решается задача нахождения в самом сложном случае скорости её очищения при учёте значений таких параметров модели, как число ворсинок в сегменте, их эффективность, глубина древовидной структуры и др., то есть вычисляется соответствующая сложностная функция Шеннона.

1. Основные понятия и постановка задачи

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ при $n \in \mathbb{N}$.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02–01–00162a.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Элемент a_i из A при $i \in \mathbb{N}_n$ называется *вершиной*. Пусть $B \subseteq A \times A$, тогда пара (a_i, a_j) из B называется *ребром*, ориентированным от a_i к a_j, при $i, j \in \mathbb{N}_n$.

Пару $G = (A, B)$ называем *графом*. Его вершинами являются элементы из A, а рёбрами — пары из B. Про вершину a_i из (a_i, a_j) говорят, что она инцидентна этому ребру, а число всех таких рёбер является её ветвлением.

Каждый граф допускает геометрическую интерпретацию следующим образом.

Каждой вершине a_i из A взаимно однозначно сопоставляется точка a_i' в трёхмерном евклидовом пространстве, множество которых обозначаем через A'.

Каждому ребру (a_i, a_j) сопоставляется ориентированная дуга окружности $\langle a_i', a_j' \rangle$, при этом разные дуги не пересекаются, кроме, быть может, точек, соответствующих одной и той же вершине. Возникающая фигура G' называется *геометрической интерпретацией графа* G.

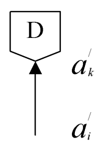
Известно [1], что такая реализация всегда возможна.

В наших рассмотрениях граф может быть интерпретирован его геометрической реализацией.

Нас будут интересовать специальные графы, называемые *деревьями*. Определим их индуктивно с использованием геометрической реализации.

Определение.

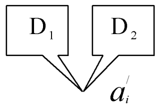
1. Точка a_i' является деревом. Она же является корнем дерева.
2. Дуга $\langle a_i', a_j' \rangle$ в виде отрезка является деревом, и a_i' — корень этого дерева.
3. Если D является деревом, точка a_k' является его корнем, и задано дерево $\langle a_i', a_k' \rangle$, то фигура вида



тоже является деревом с корнем a_i'.

4. Если заданы два дерева D_1 и D_2, корнями которых является одна

и та же точка a_i', а других общих точек у них нет, то следующая фигура также является деревом с корнем в точке a_i'.



5. Фигура D называется деревом, если она может быть получена с помощью конечного применения пунктов 1 – 4.

Отрезки, из которых состоит дерево, в дальнейшем будем называть рёбрами, а точки — вершинами, как и в случае графов.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию D^{-1}, которая получается из дерева D путём замены ориентации в D на противоположную, полагая корнем в D^{-1} корень в D.

D^{-1} назовём I-деревом.

Класс всех деревьев обозначим через $\mathbf{D}$, а класс всех I-деревьев — через $\mathbf{D}^{-1}$. Выделим в $\mathbf{D}^{-1}$ подкласс всех I-деревьев, каждая точка в которых инцидентна не более, чем трём рёбрам, то есть имеет ветвление не более двух. Эти I-деревья называем *дихотомическими*.

Далее будем рассматривать только такие деревья, хотя наши утверждения для них будут справедливыми и для подкласса I-деревьев с заданным ветвлением q, $q \in \mathbb{N}$.

Сделаем несколько дополнительных предположений относительно I-деревьев.

Припишем каждому ребру I-дерева D^{-1} число из $\mathbb{N}$, которое назовём *весом ребра*. Это приписывание подчиним правилу: если двум рёбрам, «входящим» в одну и ту же вершину, приписаны, соответственно, веса a и b, то «исходящему» из них ребру приписываем вес $c \geqslant a + b$.

Далее будем считать, что каждое ребро разделено на n частей, где $n \in \mathbb{N}$, которые называем *ворсинками*, занумерованными числами i из $\mathbb{N}_n$, возрастающими в направлении обратном ориентации ребра.

Ворсинкам могут приписываться числа из $\mathbb{N}_0$, не превосходящие веса этого ребра, называемые *нагрузкой на ворсинку*.

Припишем также ребру число r из $\mathbb{N}$, такое что r не превосходит веса ребра, и назовём его *мерой переброса*.

I-дерево D^{-1}, у которого каждому ребру приписаны вес b, такой что $c_1 \leqslant b \leqslant c_2$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{N}$, мера переброса r и число ворсинок n, обозначим через $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$. Свяжем с ним некоторый процесс, который назовём *процессом очищения.* Он состоит в следующем.

Считаем, что в $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ заданы распределения значений нагрузок по всем ворсинкам.

Каждая ворсинка осуществляет переброс своей нагрузки на следующую с меньшим номером внутри ребра по такому правилу:
а) если следующая ворсинка имеет не нулевую нагрузку, то переброс не осуществляется;
б) если нагрузка ворсинки не превосходит r, и выполнено условие а), то перебрасывается на следующую вся нагрузка ворсинки, и считается, что её нагрузка становится равной нулю;
в) если на ворсинке нагрузка d более, чем r, то она перебрасывает на следующую ворсинку нагрузку, равную r, и оставляет у себя нагрузку $d - r$;
если ворсинка в ребре является последней, то переброс нагрузки осуществляется по правилам а), б), в);
г) если ребро оканчивается корнем, то переброс с наименьшей по номеру ворсинки осуществляется в «среду» по правилам б) и в), в предположении, что «среда» играет роль ворсинки с нулевой нагрузкой;
д) если ребро заканчивается не корнем, то есть его вершина инцидентна следующему ребру, то нагрузка с наименьшей по номеру ворсинки этого ребра передаётся наибольшей по номеру ворсинке другого ребра по правилам а), б), в).

Считаем, что процесс очищения развивается в дискретные моменты времени t, где $t = 0, 1, 2, \ldots$.

В нулевой момент I-дерево $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ имеет заданное распределение нагрузок по его ворсинкам.

К первому моменту осуществляется переброс нагрузок с ворсинки на ворсинку во всём I-дереве в соответствии с правилами а), б), в), г), д).

Если за q тактов на ворсинках I-дерева возникло новое распределение нагрузок, и хотя бы одна из нагрузок не равна нулю, то процесс продолжается в соответствии с правилами а), б), в), г), д).

Если в момент p впервые нагрузка всех ворсинок стала равной нулю, то процесс останавливается.

Ясно, что значение p зависит от $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ и начального распределения нагрузок на его ворсинках.

Нашей гдавной задачей будет выявление этой зависимости.

Последовательность рёбер в I-дереве вида $(a_{i_1}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_3}) \ldots (a_{i_k}, a_{i_{k+1}})(a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}) \ldots (a_{i_{s-1}}, a_{i_s})$ назовём *цепью* в нём от a_{i_1} до a_{i_s} и будем считать s её длиной. Наибольшую длину цепи в I-дереве называем его *глубиной*. Понятие глубины распространим на вершины I-дерева.

Пусть a_i — некоторая вершина в $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$. Говорим, что она имеет некоторую глубину h, если кратчайшая цепь от неё до корня в $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ имеет длину h. Тем самым, глубина корня равна нулю. Если глубина $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ равна l, то все его вершины расслаиваются на классы $K_0, K_1, \ldots, K_l$, где K_j состоит из всех тех вершин из $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$, которые имеют глубину j.

При заданном b из $\mathbb{N}$ считаем $D^{-1}(c_1, c_2; r, n)$ *b-правильным*, если каждому ребру, исходящему из любой вершины класса K_j, приписан вес $2^{l-j}b$. Таким образом, рёбрам, исходящим из вершин класса K_l, будет приписан вес b, а ребру, входящему в корень — $2^{l-1}b$. Такое I-дерево будем обозначать через $D_l^{-1}(b, r, n)$.

Обозначим через $D_l(b, r, n)$ класс всех I-деревьев $D_l^{-1}(b, r, n)$, а через $L(D_l(b, r, n))$ — наибольшее из времён, за которое заканчивается процесс очищения $D_l^{-1}(b, r, n)$ при произвольном начальном распределении нагрузок его ворсинок.

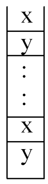
Обозначим через $L(b, r, n, l)$ наибольшее из значений функции $L(D_l(b, r, n))$ по всем $D_l^{-1}(b, r, n)$ из $D_l(b, r, n)$. Таким образом, нашей главной задачей будет установление вида этой функции, обычно называемой сложностной функцией Шеннона.

2. Основные результаты

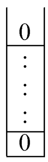
Замечание. Пусть $b, k, r, s \in \mathbb{N}_0$, $b = kr + s$, где $0 \leqslant s < r$, тогда в процессе очистки ворсинок ребра на любой фиксированной ворсинке, очевидно, наступит момент, когда на ней останется точно s пылинок, а тем самым, в случае, когда соседняя ворсинка станет свободной, наша ворсинка совершит акт передачи ей нагрузки s. Таким образом, число тактов, необходимых для освобождения ворсинки, равно $k+1$, если $s>0$, и равно k, если $s=0$. Значит, можно считать, что всегда b кратно r.

Отметим следующее очевидное, но технически важное утверждение.

Лемма 1. *Если ребро* (a_1, a_2) *имеет вес* b*, меру переброса* r*, число ворсинок* n *и начальное распределение нагрузок по ним имеет вид*



где $b, r, n, k \in \mathbb{N}$, $b = kr$, $x \neq y$ *и* $x, y \in \{0, r\}$, *то за время* n *при* $y = r$ *и за время* $n-1$ *при* $y = 0$*, соответственно, эти распределения перейдут в распределение следующего вида, и этого не произойдёт за меньшее время.*



Лемма 2. *Если ребро* (a_1, a_2) *имеет вес* b*, меру переброса* r*, число ворсинок* n*, и их начальное распределение нагрузок имеет вид*

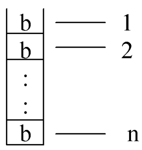


Рис. 1.

где $b, n, k \in \mathbb{N}$ и $b = kr$, то за время k оно перейдёт в распределение следующего вида, и этого не произойдёт за меньшее время.

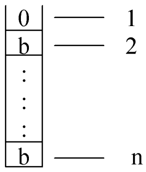
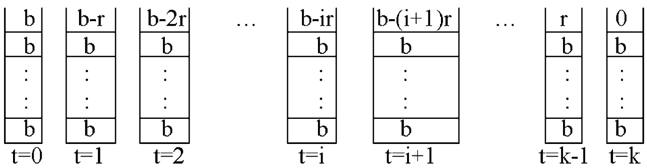


Рис. 2.

Доказательство. Ясно, что распределение на рис. 1 в моменты t с нулевого по k-й последовательно будет меняться так:



Откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Если ребро (a_1, a_2) имеет вес b, меру переброса r, число ворсинок n, и их начальное распределение нагрузок имеет вид*

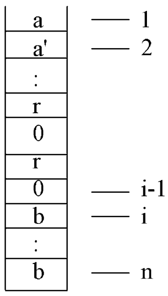


Рис. 3.

где $b, r, n, k \in \mathbb{N}$ и $b = kr$, $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{1\}$, $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, то за время $2k-1$ оно перейдёт в распределение, вид которого показан *на рис. 4, где* $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$*, и этого не произойдёт за меньшее время.*

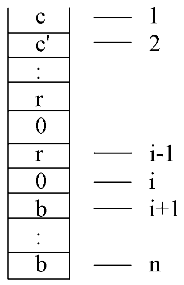
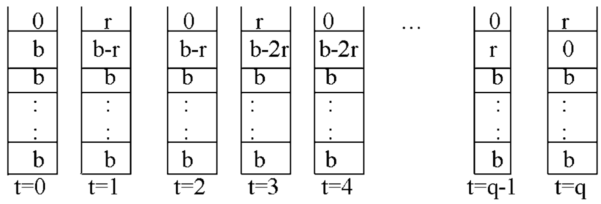


Рис. 4.

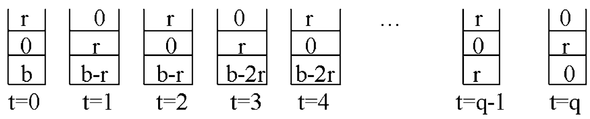
Доказательство. Воспользуемся индукцией по i.

При $i = 2$ имеем такую последовательность распределений нагрузок, которые получаются в моменты $t = 0, 1, \ldots, q$,



Откуда следует, что в этой последовательности $q = 2k - 1$. Значит, наше утверждение установлено при $i = 2$ для любого $n \geqslant 2$.

При $n = i = 3$ получаем такую последовательность:



Откуда следует, что в этой последовательности $q = 2k - 1$.

Таким образом, наше утверждение доказано для $n = 3$.

Пусть $i > 2, n > 3$ и наше утверждение доказано для всех i, таких что $2 \leqslant i \leqslant l < n$.

Установим его для $i = l + 1$.

Таким образом, имеем следующее распределение, показанное на рис. 5.

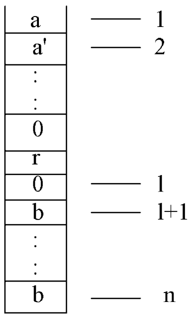


Рис. 5.

В процессе очищения этого столбца до появления в первый раз нуля на $l + 1$ ворсинке развиваются два подпроцесса.

Первый подпроцесс состоит в том, что в каждый момент времени на ворсинках с 1-й по $(l - 1)$-ую в силу чередования значений 0 и r на них происходит перемещение r с одной ворсинки на соседнюю.

Второй подпроцесс состоит в передаче $(l+1)$-ой ворсинкой на l-ую ворсинку в нечётные моменты времени значения r.

Таким образом, в каждый момент, начиная с первого, первая ворсинка передаёт в «среду» поочерёдно r или 0. Так будет продолжаться до тех пор, пока $(l + 1)$-ая ворсинка не станет пустой, то есть потребуется $2k - 1$ тактов. При этом получается столбец вида, как на рис. 5, на котором самый нижний ноль стоит на $(l + 1)$-ой ворсинке, а ниже расположены значения b. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если ребро (a_1, a_2) имеет вес b, меру переброса r и число ворсинок n, где $b, n, r, k \in \mathbb{N}$ и $b = kr$, то начальное распределение нагрузок его ворсинок, приведённое на рис. 1, за время $\frac{b}{r}(2n - 1) - n + 1$ перейдёт в распределение, показанное на рис. 6, и этого не произойдёт за меньшее время.*

Доказательство. В процессе очищения ребра (a_1, a_2) при заданном распределении нагрузок выделим два этапа.

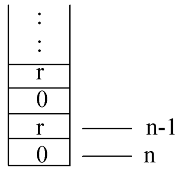


Рис. 6.

Первый этап состоит в очищении верхней ворсинки и завершается появлением на ней нуля. По лемме 2 это произойдёт ровно за k тактов и исходное распределение примет вид, как на рис. 2.

Второй этап состоит в переводе этого распределения в распределение, как на рис. 6. Этот перевод достигается за счёт применения $n-1$ раз леммы 3, что позволяет указать время упомянутого перевода. Оно равно $(n-1)(2k-1)$.

Таким образом, общее время перехода распределения, как на рис. 1, в распределение, как на рис. 6, в силу указанных лемм 2 и 3 и сказанного выше, точно равно $k+(n-1)(2k-1) = k(2n-1)-n+1 = \frac{b}{r}(2n-1)-n+1$. Что и требовалось доказать.

I-дерево из $D_l(b,r,n)$ глубины l, в котором каждая вершина инцидентна не более, чем двум рёбрам, называется гирляндой и обозначается через $\Gamma_l(b,r,n)$.

Лемма 5. *Время очищения гирлянды $\Gamma_l(b,r,n)$ при $l,b,r,n,k \in \mathbb{N}$ и $b = kr$ равно $l(2n-1)\frac{b}{r}+l-1$, и этого не произойдёт за меньшее время.*

Доказательство. Ясно, что указанная гирлянда имеет вид, как на рис. 7. Рассмотрим сначала ребро (a_0,a_1), a_1 имеет глубину 1. Оно имеет n ворсинок, мера переброса в нём равна $2^{l-1}r$, и его вес равен $2^{l-1}b$. По лемме 4 точно за $(2n-1)\frac{2^{l-1}b}{2^{l-1}r}-n+1$ тактов распределение ребра (a_0,a_1) примет вид, как на рис. 7a, а остальные рёбра будут иметь прежнее распределение.

С этого момента начинается очищение ребра (a_1,a_2) и продолжается очищение ребра (a_0,a_1). Возникшее в нём распределение таково, что каждая ворсинка в нём имеет нагрузку не более её меры переброса и при этом её соседние ворсинки обладают нулевой нагрузкой.

То есть, в таком ребре реализуется процесс очищения, состоящий в потактовом параллельном переносе его распределения на одну ворсинку вверх. Тем самым, с учётом того, что мера переброса в ребре (a_1, a_2) меньше, чем в ребре (a_0, a_1), можно считать, что по отношению к ребру (a_1, a_2) ребро (a_0, a_1) будет играть роль «среды».

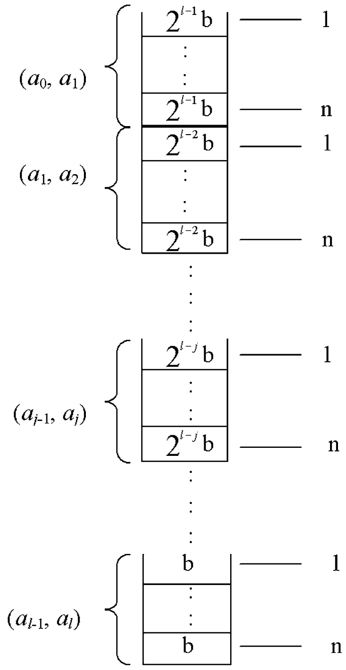


Рис. 7.

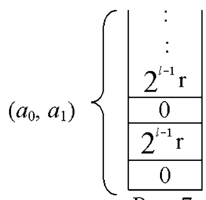


Рис. 7а.

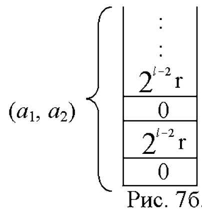


Рис. 7б.

Применяем вновь лемму 4 уже к ребру (a_1, a_2), где a_2 имеет глубину 2. Получаем, что исходное распределение ребра (a_1, a_2) перейдёт в распределение вида, как на рис. 7б, за время равное $(2n-1)\frac{2^{l-2}b}{2^{l-2}r}-n+1$. Далее будет продолжаться очищение рёбер (a_0, a_1) и (a_1, a_2). Теперь они будут играть роль «среды» для ребра (a_2, a_3).

Этот процесс распространим на остальные рёбра. В результате за время, равное сумме времён переходов каждого ребра от его исходной нагрузки до нагрузки вида чередования нулей и мер переброса его ворсинок (см. рис. 6), в гирлянде возникнет распределение, в котором ребро (a_{l-1}, a_l), где a_l имеет глубину l, будет иметь указанное чередование как распределение, а остальные рёбра играют для него роль «среды». Это время равно

$$\left(\frac{2^{l-1}b}{2^{l-1}r}(2n-1)-n+1\right)+\left(\frac{2^{l-2}b}{2^{l-2}r}(2n-1)-n+1\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{2^{l-(l-1)}b}{2^{l-(l-1)}r}(2n-1)-n+1\right)+\left(\frac{b}{r}(2n-1)-n+1\right)=$$
$$=l((2n-1)\frac{b}{r}-n+1).$$

Завершение процесса очищения будет достигнуто за счёт того, что возникшее в ребре (a_{l-1},a_l) распределение начнёт потактовое параллельное перемещение в сторону ребра (a_0,a_1). По лемме 1, применённой к каждому ребру, получаем, что для завершения процесса потребуется время, равное $(n-1)+n(l-1)$.

Таким образом, общее время очищения гирлянды равно

$$l((2n-1)\frac{b}{r}-n+1)+(n-1)+n(l-1)=$$
$$=l(2n-1)\frac{b}{r}-ln+l+n-1+ln-n=l(2n-1)\frac{b}{r}+l-1.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим I-дерево $D_l^{-1}(b,r,n)$ из $D_l(b,r,n)$. Будем считать, что в его i-м слое имеется 2^{i-1} рёбер, для всех $i\in\mathbb{N}_l$. Такое i-дерево называем l-полным, и обозначим его $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$. Пусть $\Gamma_l(b,r,n)$ — любая самая длинная цепь в этом дереве, которую называем гирляндой для него.

Лемма 6. *Время очищения I-дерева $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$ с начальным распределением в нём, совпадающим на каждом ребре с его весом, равно времени очищения любой его гирлянды $\Gamma_l(b,r,n)$.*

Доказательство. Используем индукцию по глубине дерева.
1) $l=1$. Тогда I-дерево является ребром, а потому гирляндой, и утверждение верно.

2) Пусть наше утверждение верно для всех $i \leqslant l$, $l \geqslant 1$.

Покажем, что оно верно и для $l+1$.

I-дерево D глубины $l+1$ имеет вид, как на рис. 8, где глубины D_1 и D_2 равны l.

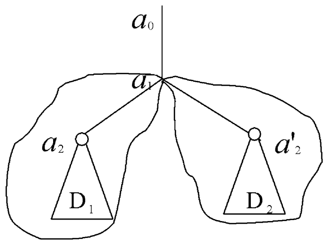


Рис. 8.

Процесс очищения I-дерева D начинается с очищения ребра (a_0, a_1), у которого n ворсинок, вес $2^{l-1}b$, мера переброса $2^{l-1}r$ и начальное распределение нагрузок на ворсинках совпадает с весом ребра. По лемме 4 это распределение перейдёт в распределение чередования нуля и меры переброса ворсинки в нём. После чего, это ребро начинает играть роль «среды» для I-деревьев D_1 и D_2. С этого момента начинается процесс очищения этих деревьев, и продолжается процесс очищения ребра (a_0, a_1), то есть процесс очищения всего дерева D. Так как ребро (a_0, a_1) имеет вес, равный сумме весов рёбер (a_1, a_2) и (a_1, a'_2), то любая ворсинка в нём, нагруженная нулём, может принять одновременно любые перебросы из рёбер (a_1, a_2) и (a_1, a'_2). Значит, одновременный процесс очищения D_1 и D_2 эквивалентен по времени процессу очищения D_1. По предположению индукции процесс очищения D_1 по времени эквивалентен процессу очищения в нём гирлянды. Замечая, что гирлянда в D образуется гирляндой в D_1 путём присоединения к ней ребра (a_0, a_1), получаем, что очищение этой гирлянды эквивалентно очищению всего дерева D. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если $k, b, r, n, l \in \mathbb{N}$ и $b = kr$, то имеет место следующее равенство*

$$L(b,r,n,l) = l(2n-1)\frac{b}{r} + l - 1.$$

Доказательство. Пусть D — произвольное I-дерево из $D_l(b,r,n)$. Очевидно, если заданы два начальных распределения его нагрузок такие, что на одинаковых рёбрах у второго распределения нагрузки не меньше, чем у первого, то очищение во втором случае будет осуществляться не скорее, чем в первом случае.

Рассмотрим l-полное I-дерево $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$ из $D_l(b,r,n)$. Ясно, что D является частью $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$. Из указанных выше фактов вытекает, что время его очищения будет не превосходить времени очищения l-полного I-дерева $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$, в котором начальное распределение нагрузок в каждом ребре равно его весу. Значит, значение функции $L(b,r,n,l)$ достигается на полном I-дереве. По лемме 6 время очищения l-полного I-дерева $\bar{D}_l^{-1}(b,r,n)$ равно времени очищения его гирлянды. По лемме 5 эта гирлянда очищается за время $l(2n-1)\frac{b}{r}+l-1$. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит академиков В.Б. Кудрявцева и А.Г. Чучалина за научное руководство.

Список литературы

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2002.