Об одном простом критерии планарности графов*

А.В. Галатенко

В работе приводится простое доказательство критерия планарности графов, предложенного Маклейном [1].

Введение

Известно решение проблемы планарности конечных графов, принадлежащее Куратовскому и Понтрягину [2], изложение которого до сих пор представляется громоздким. Среди многих попыток упростить этот критерий выделяются условия, найденные Маклейном [1]. В предлагаемой работе дается упрощенное доказательство последнего критерия.

1. Основные понятия и результаты

Графом G называется пара (V, E), где V — конечное непустое множество, а E — конечное множество неупорядоченных пар элементов V. Элементы V называются вершинами графа, элементы E — ребрами.

Подграфом G' графа G называется пара (V', E'), где $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, и G' является графом. Пусть $E' \subseteq E$ — подмножество ребер графа G. Говорим, что G' — подграф, порожденный E', если G' — минимальный подграф G с множеством ребер E'. Если A и B — подграфы G, то $A \cap B$ — подграф, порожденный пересечением, $A+B$ — объединением, $G \setminus A$ — разностью соответствующих множеств ребер.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 02–01–00162а.

Пусть $v_1, v_2 \in V$, $e = (v_1, v_2) \in E$. Тогда говорим, что ребро e и вершины v_1 и v_2 инцидентны. Число ребер, инцидентных некоторой вершине, называется степенью этой вершины.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — различные вершины G, причем $(v_i, v_{i+1}) \in E, i = 1, \ldots, n-1$. Тогда подграф, порожденный $\{(v_i, v_{i+1}) | i = 1, \ldots, n-1\}$, называется цепью. Если все вершины цепи, кроме, может быть, v_1 и v_n, имеют степень 2 в G, говорим, что цепь является подвешенной. Если $(v_1, v_n) \in E$, подграф

$$(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_1, v_n)\})$$

называется циклом.

Если существует отображение графа G в евклидову плоскость, при котором вершины графа отображаются в точки, ребра — в спрямляемые кривые, соединяющие соответствующие точки, причем кривые могут пересекаться только в концевых точках, G называется планарным графом, а образ G — плоским графом. Области, определяемые плоским графом, назовем его гранями, при этом неограниченная область называется внешней гранью, а остальные — внутренними.

Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — циклы из G. Суммой $C_1, \ldots, C_n$ по модулю 2 назовем подграф, порожденный всеми ребрами, входящими в нечетное число $C_1, \ldots, C_n$. Система циклов $C_1, \ldots, C_n$ называется полной, если любой цикл в G является суммой по модулю 2 некоторых циклов из $C_1, \ldots, C_n$.

Теорема 1. *Граф G является планарным точно тогда, когда в нем существует полная система циклов, каждое ребро которых не принадлежит более чем двум циклам.*

2. Вспомогательные утверждения

Граф G называется сепарабельным, если он обладает двумя подграфами F_1 и F_2, такими, что $F_1 + F_2 = G$, а F_1 и F_2 не имеют общих ребер и могут иметь не более одной общей вершины, причем и у F_1, и у F_2 множество ребер непусто.

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Цикломатическим числом G назовем $N(G) = |E| - |V| + 1$.

Лемма 1. *Если G — несепарабельный граф, $N(G) > 1$, R — цикл из G, то в R существует цепь A, подвешенная в G, $G \setminus A$ — несепарабельный граф, и $N(G \setminus A) = N(G) - 1$.*

Доказательство. Построим последовательность несепарабельных подграфов $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset G$. Так как $N(G) > 1$, существует ребро e_1, не принадлежащее R. Положим H_1 равным некоторому циклу, содержащему e_1 и некоторое ребро из R (в силу несепарабельности G такой цикл имеется). Если $H_{m-1} \neq G$, H_m строим так: берем ребро e_m из $G \setminus H_{m-1}$, не содержащееся в R (если такое имеется). Так как G несепарабелен, существует цикл D, содержащий e_m и некоторое ребро из H_{m-1}. Пусть A_m — максимальная цепь, лежащая на D, содержащая e_m и не содержащая ребер из H_{m-1}. Положим $H_m = H_{m-1} + A_m$.

Каждый из H_m — несепарабельный граф. Это легко показать индукцией по m. Покажем теперь, что из $R \subset H_m$ следует, что $H_m = G$. По построению, $R \not\subset H_1$. Возьмем наименьшее m, для которого $R \subset H_m$. В этом случае $R \not\subset H_{m-1}$, и в R существует ребро d, не принадлежащее H_{m-1}. Пусть F — максимальная цепь, лежащая на R, содержащая d и не содержащая ребер из H_{m-1}. По построению A_m и в силу максимальности A_m и F, $A_m = F$. Итак, $A_m \subset R$, и тогда, по построению A_m, $G \setminus H_{m-1}$ содержится в R. Следовательно, $H_m = G$.

По построению, $N(H_m) = m$. Таким образом, процесс заканчивается на H_n при $n = N(G)$. Последняя из добавленных цепей A подвешена в $H_n = G$ и содержится в R, следовательно, $N(G \setminus A) = n - 1$. Лемма 1 доказана.

Из приведенной в доказательстве леммы 1 конструкции вытекает

Следствие 1. Из любой полной системы циклов графа G можно выделить полную подсистему из $N(G)$ циклов.

Пусть G — несепарабельный граф, $C_1, \ldots, C_n$ — полная система циклов, в которую любое ребро входит не более двух раз. Без ограничения общности, $n = N(G)$. Обозначим через R сумму всех циклов системы по модулю 2:

$$R = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \pmod 2.$$

Очевидным образом сумма не равна нулю. Назовем ее ободом.

Далее в этом разделе под полной системой циклов мы будем понимать полную систему из $N(G)$ циклов, в которую каждое ребро входит не более двух раз, а под несепарабельным графом — несепарабельный граф с полной системой циклов.

Лемма 2. *Если G — несепарабельный граф, то его обод является циклом.*

Доказательство. Предположим противное. Так как всякая вершина R имеет четную степень, R в собственном смысле содержит некоторый цикл D. Без ограничения общности

$$D = C_1 + \ldots + C_m \pmod 2.$$

Так как $D \neq R$, $n > m$, поэтому граф $F = C_{m+1} + \ldots + C_n (\mathrm{mod}\ 2)$ непуст. Покажем, что G можно разделить на D и F. Если ребро e принадлежит $D \cup F$, то e содержится ровно в одном из первых m циклов и ровно в одном из $n - m$ последних циклов. Следовательно, e содержится в D, но не содержится в R. Полученное противоречие доказывает, что $D \cup F$ пусто. Так как G — несепарабельный, существует цикл H, содержащий как ребра из D, так и ребра из F. Разложим этот цикл по полной системе. Рассмотрим H' — часть разложения, соответствующую первым m циклам. Она непуста и не равна H, так как в H есть ребра и из D, и из F. Так как D и F не пересекаются, в H' содержит некоторый цикл. Но цикл H не может содержать собственных подциклов. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Если G — несепарабельный граф, $N(G) > 1$, то в G существует подвешенная цепь A, для которой*

(i) *$G \setminus A$ несепарабелен, $N(G \setminus A) = N(G) - 1$;*
(ii) *A содержится в R и ровно в одном C_j, например, в C_n;*
(iii) *$C_1, \ldots, C_{n-1}$ образуют полную систему для $G \setminus A$;*
(iv) *концы p и q цепи A принадлежат R', такому что*

$$R' = C_1 + \ldots + C_{n-1} \pmod 2;$$

(v) *R' состоит из двух цепей $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$, соединяющих p и q.*

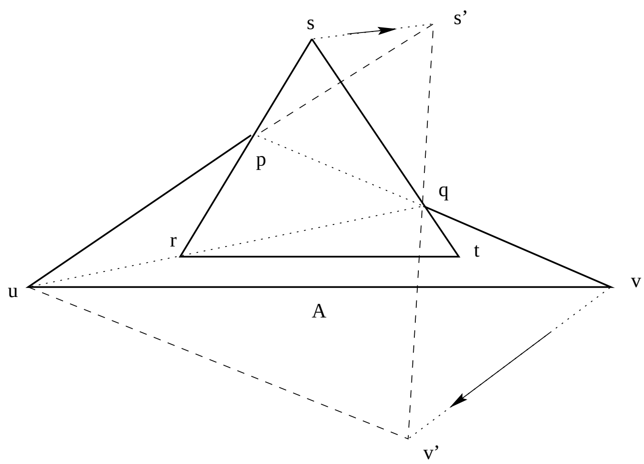
Доказательство. (i), (ii) и (iii) следуют из лемм 1 и 2.

Покажем, что $A = C_n \cap R$. Предположим, что существует ребро e из $C_n \cap R$, не лежащее в A. Тогда e содержится в $G \setminus A$ и, следовательно, входит в некоторый цикл D из $G \setminus A$. В силу (iii), D можно представить в виде суммы некоторых циклов из $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Но e содержится в C_n и R, поэтому представление D в таком виде невозможно. Следовательно, $A = C_n \cap R$. Так как $R' = R + C_n (\mathrm{mod}\, 2)$, R' состоит из ребер, принадлежащих либо R, либо C_n, но не принадлежащих $C_n \cap R = A$. Значит, R' состоит из ребер $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$. Так как R — цикл, $R \setminus A$ и $C_n \setminus A$ — цепи, соединяющие p и q. Для доказательства (iv) и (v) остается заметить, что $R \setminus A$ лежит в R', следовательно, концы этой цепи также лежат в R'. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Несепарабельный граф с полной системой циклов $C_1, \ldots$, C_n может вкладываться в плоскость так, что каждый из циклов системы ограничивает конечную область, а обод — бесконечную область.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по $N(G)$. Ребра будем отображать в ломаные, обод — в равносторонний треугольник. При $N(G) = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $N(G) = n$. Тогда по лемме 3 в G есть подвешенная цепь A, что $G \setminus A$ — несепарабелен, содержит полную систему циклов, и



$N(G \setminus A) < N(G)$. По предположению индукции, $G \setminus A$ можно отобразить на плоскость, при этом обод будет равносторонним треугольником. По лемме 3, подвешенную цепь A можно отобразить в ломаную, лежащую вне треугольной области и пересекающуюся с треугольником по вершинам p и q. Рассмотрим случай, когда p и q лежат на разных сторонах треугольника. Процесс преобразования полученного графа в равносторонний треугольник изображен на рис. 1. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

3. Доказательство теоремы

Необходимость. Рассмотрим плоский граф. В качестве системы циклов возьмем границы внутренних граней. Очевидным образом, система удовлетворяет условиям теоремы.

Достаточность следует из независимости циклов для различных несепарабельных компонент и леммы 4.

В заключение автор благодарит академика В.Б. Кудрявцева за внимание к работе.

Список литературы

[1] Маклейн С. Комбинаторное условие для плоских графов // Кибернетический сборник. Вып. 7. М.: Мир, 1970. С. 133–144.

[2] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.