# Приближение функций нескольких переменных нейронными сетями

Д.В. Алексеев

В работе доказывается, что в интегральной метрике с весом Чебышева–Эрмита возможно приближение функции $n$ переменных достаточно общего вида двухслойной нейронной сетью, причем функции активации первого слоя могут быть заданы заранее, а второго — линейны. Выбор веса Чебышева–Эрмита связан с тем, что он позволяет имитировать нормальное распределение рецепторов, которое встречается в природе, например распределение зрительных рецепторов в глазе человека и других млекопитающих.

## 1. Введение

В 1900 г. Д. Гильберт сформулировал список проблем, в котором под номером 13 был вопрос о представимости функции $n$ переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. А.Н. Колмогоров [4], [5], [15] и В.И. Арнольд [1], [2] показали, что это действительно так, более того, непрерывная функция $n$ переменных может быть представлена в виде суперпозиции одноместных функций и операции сложения.

Необходимость в такого рода представлениях возникла позднее в связи с развитием теории и практики нейронных сетей. Появление нейронных сетей связывают со статьей У. Мак–Каллока и У. Питса [16], [6], в которой описывается математическая модель нейрона и нейронной сети. Было доказано, что булевские функции и конечные автоматы могут быть представлены нейронными сетями.

Позднее Ф. Розенблатт [8],[17] предложил модель, названную им перцептроном и предложил алгоритм обучения для такой модели.

Было показано, что перцептроны могут решать некоторые задачи более эффективно, чем компьютеры традиционной архитектуры. Однако, позднее, серьезный математический анализ перцептронов проведенный М. Минским и С. Пейпертом [7], выявил серьезные ограничения на области применимости перцептронов. Они, в частности, показали, что некоторые задачи, которые в принципе могут быть решены перцептроном, могут потребовать нереально больших времен или нереально большого количества нейронов.

В дальнейшем ограничения были ослаблены путем замены функций активации нейронов с пороговых на сигмоидные. Так, в 1989 году, Г. Сибенко [9], К. Фунахаши [10] и К. Хорник [14], независимо доказали следующий факт: пусть $\psi$ — фиксированнвая сигмоидная функция, а $f$ — непрерывная на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функция $n$ переменных. Тогда $f$ можно аппроксимировать в смысле равномерного приближения четырехслойной сетью (два слоя скрытых), причем функции активации первого и последнего слоя линейны, а промежуточных — равны $\psi$.

Р. Хехт-Нильсен [13] доказал представимость непрерывной функции многих переменных с помощью двухслойной нейронной сети с $n$ компонентами входного сигнала, $2n+1$ компонентами первого (скрытого) слоя с сигмоидальным функциями активации и $M$ компонентами второго слоя с неизвестными функциями активации. Таким образом, в неконструктивной форме была доказана решаемость задачи представления функции достаточно произвольного вида на нейронной сети.

В данной работе доказывается, что в интегральной метрике с весом Чебышева–Эрмита возможно приближение произвольной функции $n$ переменных двухслойной нейронной сетью, причем функции активации первого слоя могут быть заданы заранее, а второго — линейны.

## 2. Основные результаты

Введем необходимые определения.

**Определение 1.** Пусть $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $A^n$ — это множество всех аффинных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, то есть функций вида $A(x) = \bar{w} \cdot \bar{x} + b$, где $\bar{x}$ и $\bar{w}$ — вектора из $\mathbb{R}^n$, а $b \in \mathbb{R}$.

**Определение 2.** Пусть $\rho(\bar{x}) = \exp\bigl(-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\bigr)$ — вес Чебышева–Эрмита, а $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^r)$ — множество измеримых по Лебегу функций $n$ переменных $f(x_1,\ldots,x_n)$, таких, что конечна следующая норма:

$$\|f(\cdot)\|_{p,\rho} = \begin{cases} \lambda_{p,n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|^p dx_1\ldots dx_n\right)^{1/p}, & \text{при } 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{esssup}\limits_{\bar{x}\in\mathbb{R}^n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|, & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda_{p,n} = \bigl(\frac{p}{2\pi}\bigr)^{n/2p}$ — нормировочный коэффициент.

**Определение 3.** Пусть $G$ — измеримая функция и $n \in \mathbb{N}$. Будем обозначать

$$\Sigma^n(G) = \Bigl\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\Bigg|\; f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j G(A_j(\bar{x}))\,, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \beta_j \in \mathbb{R}, A_j \in A^n, q \in \mathbb{N} \Bigr\}$$

— множество функций, порождаемых функцией $G$, с помощью аффинных преобразований аргумента и линейной комбинации.

**Определение 4.** Функция $\Psi(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ называется сигмоидной, если $\Psi(x)$ не убывает на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \Psi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi(x) = 1$.

**Определение 5.** Пусть $\mathfrak{M} \subset L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ — некоторое множество функций. Замыканием множества $\mathfrak{M}$ в метрике $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ называется множество функций

$$[\mathfrak{M}]_{p,\rho} = \Bigl\{ f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}, \ \text{такая что} \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{p,\rho} = 0 \Bigr\}.$$

**Определение 6.** Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое измеримое множество. Характеристической функцией множества называется

$$\chi_M(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x_1,\ldots,x_n) \in M; \\ 0, & \text{при } (x_1,\ldots,x_n) \notin M. \end{cases}$$

**Определение 7.** Будем обозначать $C_\rho(\mathbb{R}^n)$ множество всех непрерывных функций $n$ переменных, таких, что $\lim\limits_{\bar{x}\to\infty} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})| = 0$.

**Теорема 1.** *Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$[\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho} = L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n).$$

*Другими словами, $\Sigma^n(\psi)$ всюду плотно в $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$.*

**Теорема 2.** *Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $p = \infty$. Тогда*

$$C_\rho(\mathbb{R}^n) \subset [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}\,.$$

*Другими словами, $\Sigma^n(\psi)$ всюду плотно в $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n) \cap C_\rho(\mathbb{R}^n)$.*

**Замечание 1** (к теореме 2). Классы функций $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ и $C_\rho(\mathbb{R}^n)$ не совпадают. Действительно, функция $\psi \in [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ не обязательно непрерывна. Кроме того, изменив $f \in [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ на множестве Лебеговой меры нуль получим функцию, принадлежащую $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$, но не являющуюся непрерывной.

**Замечание 2** (к теореме 2). Классы функций $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ и $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$ не совпадают. Действительно, функция $f(x) = \rho^{-1}(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$, очевидно, принадлежит $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$. Если попытаться приблизить ее с помощью $f_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} c_k\psi(a_kx + b_k)$, получим

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - f_1(x))\rho(x) = 1 - \lim_{x\to\pm\infty} f_1(x)\rho(x) = 1,$$

поскольку $f_1(x)$ — ограниченная функция. Очевидно, $\|f(\cdot) - f_1(\cdot)\|_{\infty,\rho} \geqslant 1$, а значит $f(\cdot) \notin \left[\Sigma^1(\psi)\right]_{\infty,\rho}$. Таким образом, $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho} \neq L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства теоремы потребуются следующие вспомогательные леммы:

**Лемма 1.** *Пусть $\Psi$ — непрерывная сигмоидная функция и $\psi$ — произвольная сигмоидная функция. Тогда $\Psi \in \left[\Sigma^1(\psi)\right]_{p,\rho}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, без ограничения общности рассуждений можно считать $\varepsilon < 1$. Возьмем $Q \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{Q} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $M > 0$, такое, что $\psi(-M) < \frac{\varepsilon}{2Q}$ и $\psi(M) > 1 - \frac{\varepsilon}{2Q}$. Существование такого $M$ вытекает из определения сигмоидной функции.

Поскольку $\Psi(x)$ непрерывна и не убывает на $\mathbb{R}$, то существует обратная к ней $\Psi^{-1}(y) = \max\{x : \Psi(x) = y\}$, определенная на $(-1, 1)$ и непрерывная справа. Очевидно, $\Psi\big(\Psi^{-1}(y)\big) = y$, при всех $0 < y < 1$. Обозначим

$$r_j = \begin{cases} \Psi^{-1}\big(\frac{1}{2Q}\big), & \text{при } j = 0, \\ \Psi^{-1}\big(\frac{j}{Q}\big), & \text{при } j = 1, 2, \ldots, Q-1 \\ \Psi^{-1}\big(1 - \frac{1}{2Q}\big), & \text{при } j = Q. \end{cases}$$

Пусть $1 \leqslant r < s \leqslant Q$ и $A_{r,s}(x) = -M + 2M\frac{x-s}{r-s}$ — аффинная функция, отображающая отрезок $[r, s]$ в $[-M, M]$. Рассмотрим $H_\varepsilon(x) = \sum\limits_{j=0}^{Q-1} \frac{1}{Q}\psi(A_{r_j,r_{j+1}}(x))$. Пусть $x \in (r_{j_0}, r_{j_0+1}]$. Тогда для $\psi(A_{r_j,r_{j+1}})$ выполнены неравенства:

1) $1 - \frac{\varepsilon}{2Q} < \psi(A_{r_j,r_{j+1}}(x)) < 1$, при $j < j_0$;
2) $0 < \psi(A_{r_j,r_{j+1}}(x)) < 1$, при $j = j_0$;
3) $0 < \psi(A_{r_j,r_{j+1}}(x)) < \frac{\varepsilon}{2Q}$, при $j > j_0$.

Умножая неравенства на $\frac{1}{Q}$ и суммируя по $j$, получим

$$\frac{j_0}{Q}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2Q}\right) < H_\varepsilon(x) < \frac{j_0 + 1}{Q} + (Q - j_0)\frac{\varepsilon}{2Q^2}. \tag{1}$$

Из выбора $r_j$ вытекают неравенства $\frac{j_0}{Q} < \Psi(x) \leqslant \frac{j_0+1}{Q}$. Сравнивая с (1), получим $|\Psi(x) - H_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in (r_{j_0}, r_{j_0+1}]$. Аналогично проверяются неравенства для $x \in (-\infty, r_0]$ и $x \in (r_Q, +\infty)$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$, существует функция $H_\varepsilon(x) \in \Sigma^1(\psi)$, такая, что $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\Psi(x) - H_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, а следовательно и $\|\Psi(x) - H_\varepsilon(x)\|_{p,\rho} < \varepsilon$.

**Лемма 2.** *Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция. Тогда*

$$\cos(x) \in \left[\Sigma^1(\psi)\right]_{p,\rho}.$$

*Другими словами, для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\cos_\varepsilon(x) \in \Sigma^1(\psi)$, *такая, что* $\|\cos(\cdot) - \cos_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon$.

**Доказательство.** Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $r \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|\chi_{[2\pi r,\infty)}(\cdot)\|_{p,\rho} = \|\chi_{(-\infty,2\pi r]}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-2\pi r, 2\pi r]; \\ 1, & x \notin [-2\pi r, 2\pi r] \end{cases}.$$

Очевидно, из (2)

$$\|\cos(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Функция $f(x)$ непрерывна и конечной вариации на $\mathbb{R}$, поскольку $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}} f = \overset{2\pi r}{\underset{-2\pi r}{\mathrm{V}}} f = 8\pi r$. Таким образом, она представима в виде $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где $f^+$ и $f^-$ — непрерывные неубывающие функции. Для определенности зададим их в концах отрезка: пусть $f^+(-2\pi r) = 1$, тогда $f^-(-2\pi r) = 0$; $\quad f^+(2\pi r) = 1 + 8\pi r$; $\quad f^-(2\pi r) = 8\pi r$.

Докажем, что $f^+ \in \left[\Sigma^1(\psi)\right]_{p,\rho}$. Пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{32\pi r}$. Рассмотрим

$$A(t) = \frac{t - f^+(-2\pi r)}{f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r)}$$

— аффинное преобразование, отображающее отрезок $[f^+(-2\pi r), f^+(2\pi r)]$ в $[0,1]$. Тогда $A(f^+(x))$ — сигмоидная функция, а значит, по лемме 1 существует $\psi^+ \in \Sigma^1(\psi)$, такая, что

$$\|A(f^+(\cdot)) - \psi^+(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon_1.$$

Рассмотрим функцию

$$f^+_\varepsilon(x) = A^{-1}\big(\psi^+(x)\big) = f^+(-2\pi r) + \big(f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r)\big)\psi^+(x).$$

Очевидно, $f^+_\varepsilon(x) \in \Sigma^1(\psi)$. Поскольку

$$f^+(x) = A^{-1}\big(A(f^+(x)\big) = f^+(-2\pi r) + \big(f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r)\big)A\big(f^+(x)\big),$$

то

$$\|f^+(\cdot) - f^+_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} \leqslant \\ \leqslant (f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r))\|A(f^+(\cdot) - \psi^+(\cdot)\|_{p,\rho} < \\ < 8\pi r \frac{\varepsilon}{32\pi r} = \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Аналогично доказывается существование $f^-_\varepsilon \in \Sigma^1(\psi)$, такой, что

$$\|f^+(\cdot) - f^+_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Из неравенств 3, 4 и 5 вытекает утверждение леммы 2.

**Лемма 3.** *Пусть* $1 \leqslant p < \infty; n \in \mathbb{N}; a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$\chi_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]}(\cdot) \in [\Sigma^n(\cos(\cdot))]_{p,\rho}.$$

**Доказательство.** Выберем произвольное $0 < \varepsilon < 1$. Не ограничивая общности рассуждений можно считать $a_i = -1$, $b_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поскольку произвольный гиперкуб аффинными преобразованиями можно отобразить в единичный. Выберем $r \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi r, \pi r]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{6} \quad (6)$$

и рассмотрим функцию (см. рис. 1)

$$\chi^\delta_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1; \\ 1, & |x| \leqslant 1 - \delta; \\ \frac{1-|x|}{\delta}, & 1 - \delta < |x| < 1. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\|\chi_{[-1,1]} - \chi^\delta_{[-1,1]}\|_{p,\rho} < 2\delta\lambda_{p,1}. \quad (7)$$

Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{3n\lambda_{p,1}}$, и обозначим

$$f_\delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \chi^\delta_{[-1,1]}(x_i).$$

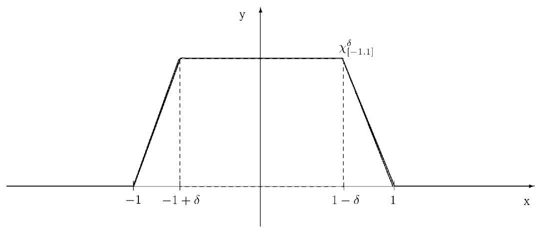


Рис. 1. График функции $\chi^{\delta}_{[-1,1]}(x)$.

Тогда из 7 вытекает

$$\|\chi_{[-1,1]^n} - f_\delta\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Поскольку $f_\delta$ непрерывна, по теореме Вейерштрасса для функций $n$ переменных ([3]) существует такое $N$ и такой тригонометрический полином

$$P_N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{k_2=1}^{N} \cdots \sum_{k_n=1}^{N} c_{k_1 \ldots k_n} \cos\frac{k_1 x_1}{r} \cos\frac{k_2 x_2}{r} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{k_n x_n}{r},$$

что

$$\sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |f_\delta(\bar{x} - P_N(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

В сумме отсутствуют члены, содержащие $\sin\frac{k_i x_i}{r}$, поскольку функция $f_\delta$ является четной по всем аргументам. Это не ограничивает общности рассуждений. Несложно заметить, что $P_N(\cdot) \in \Sigma^n(\cos(\cdot))$, поскольку произведение $\cos\frac{k_1 x_1}{r} \cos\frac{k_2 x_2}{r} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{k_n x_n}{r}$ легко преобразовать в сумму, применив $n$ раз формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta))$. Из $2\pi r-$периодичности $P_N(x_1, \ldots, x_n)$ по всем аргументам следует, что

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})| = \sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})|.$$

Таким образом, учитывая 9, получим

$$\sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})| < 1 + \frac{\varepsilon}{3} < 2. \tag{10}$$

Из неравенств 6, 9 и 10 получим:

$$\|f_\delta(\cdot) - P_N(\cdot)\|_{p,\rho} \leqslant \sup_{\bar{x}\in[-\pi r,\pi r]^n} |f_\delta(\bar{x}) - P_N(\bar{x})| \cdot \|\chi_{[-\pi r,\pi r]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} +$$
$$+ \sup_{\bar{x}\notin[-\pi r,\pi r]^n} |P_N(\bar{x})| \cdot \|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus[-\pi r,\pi r]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Учитывая 8, имеем

$$\|\chi_{[-1,1]^n}(\cdot) - P_N(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 4.** *Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $B \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество. Тогда*

$$\chi_B(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}\,.$$

**Доказательство.** Выберем $M > 0$ такое, что

$$\|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus[-M,M]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Поскольку $B_M = B \cap [-M, M]^n$ измеримо по Лебегу, то существует $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N} [a_i^1, b_i^1] \times [a_i^2, b_i^2] \times \cdots \times [a_i^n, b_i^n]$, такое, что

$$\mu\big(B_M \triangle B_\varepsilon\big) < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{12}$$

где $\mu(\cdot)$ — мера Лебега, $\triangle$ — симметрическая разность множеств. Из лемм 2 и 3 вытекает $\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}$. Тогда существует $f_\varepsilon(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}$, такая, что

$$\|\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

Следовательно, из 11, 12 и 13 имеем:

$$\|\chi_B(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} \leqslant \|\chi_B(\cdot) - \chi_{B_M}(\cdot)\|_{p,\rho} + \|\chi_{B_M}(\cdot) - \chi_{B_\varepsilon}(\cdot)\|_{p,\rho} +$$
$$+ \|\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.
**Доказательство** (Теоремы 1).
Выберем $M > 0$, такое, что

$$\|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{14}$$

где $f_M(\bar(x)) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{при } \bar{x} \in [-M, M]^n \\ 0, & \text{при } \bar{x} \notin [-M, M]^n \end{cases}$. Очевидно, $f_M(\cdot)$ измерима по Лебегу и

$$\int\limits_{[-M,M]^n} |f(\bar{x})|^p dx_1 \dots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{npM^2}{2}\right) \int\limits_{[-M,M]^n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|^p dx_1 \dots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{npM^2}{2}\right) \|f(\cdot)\|_{p,\rho} < \infty.$$

Таким образом, $f(\cdot) \in L_p\big([-M, M]^n\big)$. Следовательно, существует $g(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{B_k}(\cdot)$, где $B_k \subset [-M, M]^n$ — измеримые по Лебегу множества, такие, что

$$\|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_{p,\rho} \leqslant \lambda_{p,n} \|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Согласно лемме 4, существует $g_\varepsilon(\cdot) \in \Sigma^n(\psi)$, такая, что

$$\|g(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Из неравенств 14, 15 и 16, имеем

$$\|f(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} \leqslant \|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{p,\rho} + \|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_{p,\rho} + \|g(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство** (Теоремы 2).
Выберем $M > 0$ такое, что

$$\|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{17}$$

где $f_M(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{при } \bar{x} \in [-M, M]^n; \\ 0, & \text{при } \bar{x} \notin [-M, M]^n. \end{cases}$

По теореме Вейерштрасса для функций $n$ переменных существует тригонометрический полином

$$P_N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{k_2=1}^{N} \ldots \sum_{k_n=1}^{N} c_{k_1 \ldots k_n} \cos\Big(\frac{\pi k_1 x_1}{M} + b^1_{k_1 \ldots k_n}\Big) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \cos\Big(\frac{\pi k_n x_n}{M} + b^n_{k_1 \ldots k_n}\Big),$$

такой, что

$$\sup_{\bar{x} \in [-M,M]^n} |f_M(\bar{x} - P_N(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

Из леммы 2 и доказательства леммы 3 вытекает существование $\psi_\varepsilon \in \Sigma^n(\psi)$, такой, что

$$\|P_N(\cdot) - \psi_\varepsilon(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{19}$$

Из неравенств 17, 18 и 19 имеем

$$\|f(\cdot) - \psi_\varepsilon(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

## 3. Обобщение теоремы Хехта–Нильсена

**Теорема 3.** *Пусть $\psi(x)$ — не равная константе, ограниченная, непрерывная и монотонно возрастающая функция. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $f(\cdot) \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$, если $p < \infty$, и $f \in C_\rho(\mathbb{R}^n)$, если $p = \infty$. Тогда функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно аппроксимировать в метрике пространства $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ нейронной сетью с 2 слоями. Функции активации для первого слоя — $\psi(x)$, а для второго — линейны.*

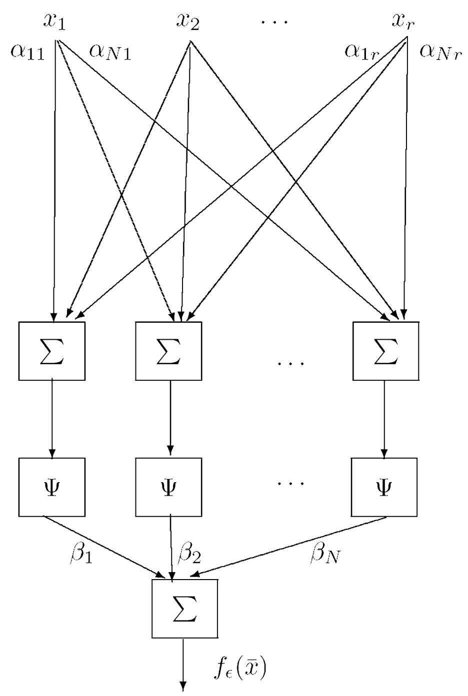


Рис. 2. Схема нейронной сети.

**Доказательство.** По теоремам 1 и 2 любую функцию указанного вида можно приблизить функциями вида $f_\varepsilon(\bar{x}) = \sum\limits_{n=1}^{N} \beta_n \psi(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nr}x_r)$, так, чтобы $\|f - f_\varepsilon\|_{p,\rho} < \varepsilon$. Очевидно, нейронная сеть, изображенная на рис. 2 реализует указанную функцию $f_\varepsilon(\bar{x})$.

**Замечание.** В отличие от теоремы Хехта–Нильсена [13], теорема 3 является конструктивной. Действительно, пусть задана аппроксимируемая функция $f(\bar{x})$ и функция активации $\psi(x)$ позволяет выразить тригонометрические функции в явном виде, например

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1+\sin x}{2}, & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \end{cases} \text{— функция Галланта–Вайта [18].}$$

Тогда, используя данную работу и работы Дж. Джексона и С.Н. Бернштейна [3], [11], [12], можно построить в явном виде нейронную сеть, аппроксимирующую $f(\bar{x})$ в метрике пространства $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ с заданной точностью $\varepsilon$. Кроме того, функции активации сети имеют довольно простой вид и, следовательно, могут быть реализованы в виде некоторых электронных устройств.

Автор выражает благодарность профессору В.Б. Кудрявцеву и доценту А.С. Строгалову за привлечение внимания к задаче обоснования корректности применения нейронных сетей в моделировании свойств непрерывных отображений и за обсуждения в ходе ее решения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 02–01–00162А: «Интеллектуальные системы. Теория и приложения».

## Список литературы

[1] Арнольд В.И. О представлении любой непрерывной функции трех переменных в виде суммы функций не более двух переменных // Докл. АН СССР. Том 114. № 4. 1957.

[2] Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Мат. просвещение. 1958. Вып. 3. С. 41–61.

[3] Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. 1912. Собр. соч. Изд. АН СССР, 1952 . Т. 2. С. 11–104.

[4] Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. Т. 108. С. 2. 1956.

[5] Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. Том 114. С. 953–956. 1957.

[6] Мак-Каллок У., Питс У. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 362–384.

[7] Минский М., Пейперт С. Перцептроны. М.: Мир, 1971.

[8] Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептрон и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965.

[9] Cybenko G. Approximations by superpositions of sigmoidal functions // Math. Control, Signals, Systems. V. 2. P. 303–314. 1989.

[10] Funahashi K. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks // Neural Networks. V. 2. N 3. P. 183–192. 1989.

[11] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger durch ganze rationable Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Preisschrift und Inaugural–Dissertation. Göttingen, 1911.

[12] Jackson D. The theory of approximation // Amer. Math. Soc. Colloquium Publication. 11. 1930.

[13] Hecht-Nielsen R., Kolmogorov's Mapping Neural Network Existence Theorem // IEEE First Annual Int. Conf. on Neural Networks. San Diego, 1987. V. 3. P. 11–13.

[14] Hornick K., Stinchcombe M., White H., Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural Networks. V. 2. N 5. P. 359–366. 1989.

[15] Kolmogorov A.N. On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of Continuous Functions of One Variable and Addition // American Math. Soc. Transl. 28 (1963). P. 55–63.

[16] McCulloch W.S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent nervous activity // Bull. of math. biophysics. N 5. P. 115–133. 1943.

[17] Rosenblat F. Principles of Neurodynamics: Perceptrons and the Theory of Brain mechanisms. Washington D.C.: Spartan, 1962.

[18] White H., Gallant A.R., Hornik K., Stinchcombe M. and Wooldridge J. Artificial Neural Networks: Approximation and Learning Theory. Blackwell, Cambridge, MA, 1992.