Распознавание цифры восемь коллективами автоматов

Б. Стаматович

Изучается проблема существования автомата (пешки), распознающего некоторый класс шахматных лабиринтов (π-лабиринтов). Этот класс в геометрическом смысле представляет цифру восемь. В [4] доказано, что для этого класса не существует распознающего автомата. В [5] показано, что для односвязных цифр существует распознающий автомат. В [6] показано, что для двусвязных цифр существует распознающий коллектив типа (1, 1). В предлагаемой работе приводится доказательство существования распознающего коллектива типа (1, 1) для цифры восемь.

1. Основные понятия и результаты

Основные обозначения и понятия, такие как конечный автомат, лабиринт, пешка и т.п. взяты из [1, 2, 3]. Обозначим через $e = (1,0)$, $n = (0,1)$, $w = (-1,0)$, $s = (0,-1)$ единичные векторы евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^2$ и через $\mathbf{0} = (0,0)$ – нулевой вектор.

Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ - произвольные элементы множества $\mathbb{Z}^2$. Говорим, что a и b *(слабо) соседние*, если ($\|a-b\| < 2$) $\|a-b\| = 1$, где $\|a-b\| = [(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]^{1/2}$. Последовательность $a = p_0, p_1, \ldots, p_m = b$ в $\mathbb{Z}^2$ называется *(слабой) цепью*, связывающей точку a и точку b, если точки p_{i-1} и p_i (слабо) соседние для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Множество V, $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ называется *(слабо) связным*, если для любых $a, b \in V$ существует (слабая) цепь в V, связывающая их. *Компонентой (слабой) связности* множества V называется любое максимальное (слабо) связное подмножество множества V.

π-лабиринтом называется любое отображение $c:\ \mathbb{Z}^2 \to E^2$, ($E^2 = \{0,1\}$) такое, что $P_c = c^{-1}(\{1\})$ является связным множеством. Если p_0 – произвольная точка в P_c, тогда пара (c, p_0) называется π-лабиринтом с началом p_0. π-лабиринт называется конечным (бесконечным), если множество P_c является конечным (бесконечным). В будущем под π-лабиринтом будем понимать конечный π-лабиринт. *Дырой* π-лабиринта c называется произвольная компонента слабой связности множества $\mathbb{Z}^2 \setminus P_c$.

Пусть c – произвольный π-лабиринт. Рассмотрим граф $G_c = (P_c, X_c)$, у которого P_c – множество вершин, X_c – множество дуг, и $\langle p_1, p_2 \rangle \in X_c$ тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 – соседние точки ($p_1, p_2 \in P_c$).

Для произвольного множества A через $P_0(A)$ обозначим множество всех его непустых подмножеств.

Обозначим $D = \{e, n, w, s\}$.

Пусть даны инициальный автомат $\mathbf{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i, q_{i0})$ и упорядоченный набор $\vec{V_i} = (p_1^i, \ldots, p_{n_i}^i)$ ненулевых векторов из $\mathbb{Z}^2$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что $\mathbf{A}_i$ – такой автомат, что $B_i \subseteq V_i' = \{\mathbf{0}, p_1^i, \ldots, p_{n_i}^i\}$, и A_i – множество всех таких

$$a^i = (a_1^i, \ldots, a_{n_i}^i) \in \left[\{0,1\} \bigcup P_0\left[\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\{j\} \times Q_j)\right]\right]^{n_i+1},$$

что если $a_{k_l}^i \notin \{0,1\}$, $l = 1,2,3$, то $pr_1(a_{k_1}^i) \cap pr_1(a_{k_2}^i) = \varnothing$ и $|a_{k_3}^i \cap \{j\} \times Q_j| \leqslant 1$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$; $0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant n_i$, $k_1 \neq k_2$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Допустим далее, что для произвольного $q \in Q_i$, если $a_0^i \neq 0$ и $\psi(q, a^i) = p_k^i$, $0 \leqslant k \leqslant n_i$, то $a_k^i \neq 0$; $p_i^0 = \mathbf{0}$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Система $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, которая обладает указанными выше свойствами, называется *системой взаимодействующих (коллективом) регулярных пешек*, а набор $\vec{V_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ – *полем зрения* пешки $\mathbf{A}_i$. Далее, если для пешки $\mathbf{A}_i$ набор $\vec{V_i} = (p_1^i, \ldots, p_{n_i}^i)$ является полем зрения и если $p_j^i = (\alpha_j^1, \alpha_j^2)$ ($p_0^i = \mathbf{0}$), $1 \leqslant j \leqslant n_i$, то под $a_{\alpha_j^1, \alpha_j^2}$ будем понимать a_j; $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n_i}) \in A_i$.

Для произвольной пешки $\mathbf{A}$ через $A_{\mathbf{A}}, B_{\mathbf{A}}, Q_{\mathbf{A}}$ будем обозначать, соответственно, ее множества входов, выходов и состояний, а через

$\varphi_{\mathbf{A}}$ и $\psi_{\mathbf{A}}$, соответственно, – ее функции выхода и перехода.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ – произвольная система взаимодействующих пешек, $\vec{V}_i = (p^i_1, \dots, p^i_{n_i})$ – поле зрения пешки $\mathbf{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и c – произвольный π-лабиринт. Предположим, что пешка $\mathbf{A}_i$ в состоянии q_i находится на поле z_i; $q_i \in Q_{\mathbf{A}_i}$; $z_i \in P_c$; $1 \leqslant i \leqslant n$. Определим вход $a_{\mathbf{A}_i}(z_i)$ пешки $\mathbf{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следующим образом:

$$[a_{\mathbf{A}_i}(z_i)]_{\alpha^i_1, \alpha^i_2} = \begin{cases} 0, \ z_i + (\alpha^i_1, \alpha^i_2) \notin P_c, \\ 1, \ z_i + (\alpha^i_1, \alpha^i_2) \in P_c \wedge \forall j \neq i, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \hfill z_j - z_i \neq (\alpha^i_1, \alpha^i_2), \\ \{(j, q_j) \mid z_j - z_i = (\alpha^i_1, \alpha^i_2), j \neq i, \ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ \hfill \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$(\alpha^i_1, \alpha^i_2) \in V'_i$. Ясно, что $a_{\mathbf{A}_i}(z_i)$ зависит от $\mathcal{A}$, $\vec{V}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и от размещения пешек этой системы, то есть от $\{z_i\}^n_{i=1}$. Поскольку всегда будет ясно из контекста, о каком коллективе идет речь и где находятся пешки этой системы, будем пользоваться этим обозначением без специальной оговорки.

Пусть (c, z_0) – произвольный π-лабиринт с началом в z_0, $z_0 \in P_c$, и $\mathcal{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ – некоторая система взаимодействующих регулярных пешек. *Поведением* коллектива $\mathcal{A}$ в π-лабиринте c называется последовательность $\pi(\mathcal{A}; c, z_0)$: $\left(\vec{z}_0, \vec{a}_0, \vec{b}_0, \vec{q}_0\right), \dots, \left(\vec{z}_t, \vec{a}_t, \vec{b}_t, \vec{q}_t\right)$, $\left(\vec{z}_{t+1}, \vec{a}_{t+1}, \vec{b}_{t+1}, \vec{q}_{t+1}\right), \dots,$ где $\vec{z}_t = (z^1_t, \dots, z^n_t)$, $\vec{a}_t = (\vec{a}^1_t, \dots, \vec{a}^n_t)$, $\vec{a}^i_t = (\vec{a}^i_{t0}, \dots, \vec{a}^i_{tn_i}) \in A_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\vec{b}_t = (b^1_t, \dots, b^n_t)$, $b^i_t \in B_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\vec{q}_t = (q^1_t, \dots, q^n_t)$, $q^i_t \in Q_{\mathbf{A}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что $\vec{z}_0 = (z_0, \dots, z_0)$, $\vec{z}_{t+1} = \vec{z}_t + \vec{b}_t$, $b^i_t = \psi_i(q^i_t, a^i_t)$, $q^i_{t+1} = \varphi_i(q^i_t, a^i_t)$, а $a^i_{tk} = [a_{\mathbf{A}_i}(z^i_t)]_{\alpha^i_k, \beta^i_k}$, где $p^i_k = (\alpha^i_k, \beta^i_k) \in \vec{V}_i$, $\vec{V}_i = (p^i_i, \dots, p^i_{n_i})$ – поле зрения пешки $\mathbf{A}_i$. Ясно, что $\vec{z}_t \in P^c_n$ для любого t, $t = 0, 1, \dots$.

Далее везде предполагается, что $\vec{V}_i = \vec{V}_0$ и $B_i = D \cup \{\mathbf{0}\}$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\vec{V}_0 = ((1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, -1), (0, 1), (-1, -1),$ $(-1, 0), (-1, 1))$.

Пусть $\mathrm{Int}(\mathcal{A}; c, z_0) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} z^j_i \right)$. Множество $\mathrm{Fr}(\mathcal{A}; c, z_0) = P_c \setminus \mathrm{Int}(\mathcal{A}; c, z_0)$ называется краем для коллектива $\mathcal{A}$ в π-лабиринте (c, z_0).

Если $\mathrm{Fr}(\mathcal{A}; c, z_0) = \varnothing$, то говорим, что коллектив $\mathcal{A}$ обходит π-лабиринт (c, z_0).

Пусть выделены пешки $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, в $\mathcal{A}$, $\mathbf{A}_{i_j} = (A_{i_j}, Q_{i_j}, B_{i_j}, \varphi_{i_j}, \psi_{i_j})$, $1 \leqslant j \leqslant m$, удовлетворяющие следующему условию. Предположим, что $Q_{i_j} = \{q_{i_j}\}$, и для любого $a = (a_0, a_1, \ldots, a_8) \in A_{i_j}$, либо $\psi_{i_j}(q_{i_j}, a) = 0$, либо, если $\psi_{i_j}(q_{i_j}, a) = b \neq 0$, то существуют s, $s \neq i_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и q, $q \in Q_s$ такие, что $(s, q) \in a_0$ и $\psi_s(q, a') = b$, где $a' = ((a_0 \setminus \{(s, q)\}) \bigcup \{(i_j, q_{i_j})\}, a_1, \ldots, a_8)$; $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда пешки $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$ называются *камнями* в коллективе $\mathcal{A}$.

Коллектив $\mathcal{A}$ с m отмеченными автоматами $\mathbf{A}_{i_1}, \mathbf{A}_{i_2}, \ldots, \mathbf{A}_{i_m}$, которые являются камнями, называется *коллективом из $n - m$ автоматов с m камнями* (*коллектив типа* $(n - m,\ m)$).

Кроме инициального состояния q_0 автомата $\mathbf{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ можно ввести *множество заключительных состояний* $Q_F \subseteq Q$. Пусть $Q_F = \{q_{F_0}, q_{F_1}\}$. Будем говорить, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ (коллектив $\mathbf{S} = (\mathbf{A}_{q_0}, \mathbf{K})$ типа $(1,\ 1)$) *распознает* лабиринт L_ν, если при его запуске в лабиринт L_ν происходит переход автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в заключительное состояние q_{F_1}, а при его запуске в лабиринт $L'_{\nu'} \neq L_\nu$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0}. Пусть $\mathbf{C}$ – класс инициальных лабиринтов. Говорим, что автомат $\mathbf{A}_{q_0}$ (коллектив $\mathbf{S} = (\mathbf{A}_{q_0}, \mathbf{K})$ типа $(1,\ 1)$) *распознает класс* $\mathbf{C}$, если при его запуске в любой лабиринт L_ν происходит переход автомата $\mathbf{A}_{q_0}$ в заключительное состояние q_{F_1} только тогда, когда $L_\nu \in \mathbf{C}$, и для любого лабиринта $L_\nu \notin \mathbf{C}$ происходит переход в заключительное состояние q_{F_0}.

Если множество $K \in P$, тогда границей ∂K множества K будем называть множество $\{z \in K|$ существует точка z'' в $\mathbb{Z}^2 \setminus K$ такая, что z и z'' слабо соседние$\}$. Вокруг каждой точки $z = (z_1, z_2) \in \partial K$ рассмотрим квадрат kv_z с длиной стороны 1. Его стороны обозначим через $\alpha, \beta, \chi, \delta$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | z_1 - 1/2 \leqslant x_1 \leqslant z_1 + 1/2, x_2 = z_2 + 1/2\},\\
\beta &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | z_1 - 1/2 \leqslant x_1 \leqslant z_1 + 1/2, x_2 = z_2 - 1/2\},\\
\chi &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = z_1 - 1/2, z_2 - 1/2 \leqslant x_2 \leqslant z_2 + 1/2\},\\
\delta &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = z_1 + 1/2, z_2 - 1/2 \leqslant x_2 \leqslant z_2 + 1/2\}.
\end{aligned}$$

Стороны $\alpha, \beta, \chi, \delta$ квадрата $kv_z,\ z \in \partial K$, имеют свойство «сторона находится между точками множества K и множества $\mathbb{Z}^2 \backslash K$», если точки $(z_1, z_2+1),\ (z_1, z_2-1),\ (z_1-1, z_2),\ (z_1+1, z_2)$ не принадлежат множеству K, соответственно.

Пусть st_z множество сторон квадрата kv_z, которые имеют свойство «сторона находится между точками множества K и множества $\mathbb{Z}^2 \setminus K$». Фигура $F_K = \bigcup\limits_{z \in \partial K} st_z$ представляет собой прямоугольный полигон.

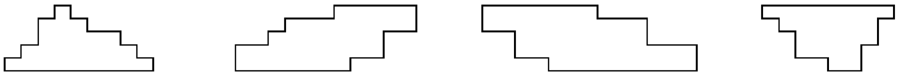
Пусть $K \subset \mathbb{Z}^2$ конечное связное множество. *Самая нижняя и самая правая точка* (НП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K,\ z_2 < a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 > a_1$. *Самая нижняя и самая левая точка* (НЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K,\ z_2 < a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 < a_1$. *Самая высокая и самая правая точка* (ВП) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K,\ z_2 > a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 > a_1$. *Самая высокая и самая левая точка* (ВЛ) множества K есть точка $z = (z_1, z_2) \in K$ такая, что для каждого $a = (a_1, a_2) \in K,\ z_2 > a_2$ или, если $z_2 = a_2$, тогда $z_1 < a_1$.

Пусть $(S)^*$ - множество всех слов $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(k),\ k \geqslant 4$, над алфавитом $S = \{-1, 1\}$. Определим отображение $f : \mathbf{P} \to (S)^*$ следующим образом. Пусть $P \in \mathbf{P}$. Обходя полигон F_P в положительном направлении, начиная от самой нижней и самой правой точки, пронумеруем вершины полигона F_P так, что сопоставим -1 или 1, если угол в вершине $\pi/2$ или $-\pi/2$, соответственно.

Определим следующие семейства множеств (рис. 1):

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(\text{-}1,1)^n\text{-}1\text{-}1(1,\text{-}1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}\\
\Phi_2 &= \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(1,\text{-}1)^n\text{-}1\text{-}1(1,\text{-}1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}\\
\Phi_3 &= \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(\text{-}1,1)^n\text{-}1\text{-}1(\text{-}1,1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}\\
\Phi_4 &= \{P \in \mathbf{P} \mid \|P\| \geqslant 2,\ f(P) = (\text{-}1(1,\text{-}1)^n\text{-}1\text{-}1(\text{-}1,1)^k\text{-}1),\ k, n \geqslant 0\}
\end{aligned}$$

где $(a, b)^n = \underbrace{(ab)(ab)\dots(ab)}_{n}, n \in N$.

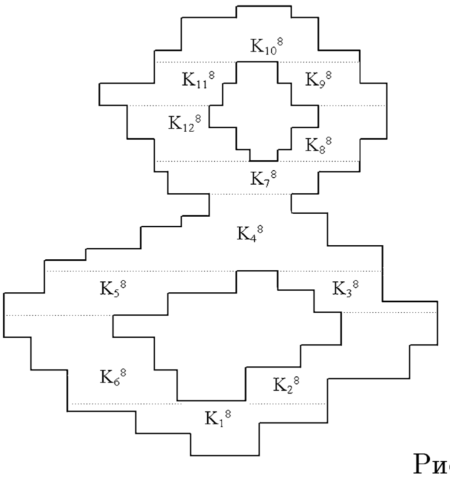


$(-1(-1,1)^4\text{-}1\text{-}1(1,-1)^3\text{-}1)$ $(-1(1,-1)^2\text{-}1\text{-}1(1,-1)^3\text{-}1)$ $(-1(-1,1)^2\text{-}1\text{-}1(-1,1)^2\text{-}1)$ $(-1(1,-1)^2\text{-}1\text{-}1(-1,1)^3\text{-}1)$

Рис. 1.

Если $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1,2,3,4$ такие, что $y_2 = y_3$, $y_1 = y_4$ и $y_1 \leqslant y_2$, тогда обозначим $A_{\Phi_i}^{z_1,z_2,z_3,z_4} = \{K \in \Phi_i \mid z_1, z_2, z_3, z_4$ – НП, ВП, ВЛ, НЛ точка множества K соответственно$\}$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Пусть $z_i = (x_i, y_i) \in Z^2$, $i = 1, 2, \ldots, 30$ имеют свойства:



$$(8)\begin{cases} y_{17} = y_{24} = y_{19} = y_2, \\ x_{17} \leqslant x_{24} < x_{19} - 1,\ x_{19} \leqslant x_2, \\ y_4 > y_3 > y_2,\ y_{15} > y_{16} > y_{17}, \\ y_{15} = y_{22} = y_{21} = y_4, \\ x_{15} \leqslant x_{22} < x_{21} - 1,\ x_{21} \leqslant x_4, \\ y_{13} = y_{30} = y_{25} = y_6, \\ x_{13} \leqslant x_{30} < x_{25} - 1,\ x_{25} \leqslant x_6, \\ y_8 > y_7 > y_6,\ y_{11} > y_{12} > y_{13}, \\ y_{11} = y_{28} = y_{27} = y_8, \\ x_{11} \leqslant x_{28} < x_{27} - 1,\ x_{27} \leqslant x_8 \end{cases}$$

Рис. 2.

Тогда,
$K_8^{\{z_i\}_{i=\overline{1,30}}} = \{K \in \mathbf{P} | K = \bigcup\limits_{i=1}^{12} K_i^8,\ K_1^8 \in A_{\Phi_4}^{z_1,z_2,z_{17},z_{18}},\ K_2^8 \in A_{\Phi_2}^{z_2,z_3,z_{20},z_{19}},\ K_3^8 \in A_{\Phi_3}^{z_3,z_4,z_{21},z_{22}},\ K_4^8 \in A_{\Phi_1}^{z_4,z_5,z_{14},z_{15}},\ K_5^8 \in A_{\Phi_2}^{z_{23},z_{22},z_{15},z_{16}},\ K_6^8 \in A_{\Phi_3}^{z_{24},z_{23},z_{16},z_{17}},\ K_7^8 \in A_{\Phi_4}^{z_5,z_6,z_{13},z_{14}},\ K_8^8 \in A_{\Phi_2}^{z_6,z_7,z_{26},z_{27}},\ K_9^8 \in A_{\Phi_3}^{z_7,z_8,z_{27},z_{26}},\ K_{10}^8 \in A_{\Phi_1}^{z_8,z_9,z_{10},z_{11}},\ K_{11}^8 \in A_{\Phi_2}^{z_{29},z_{28},z_{11},z_{12}},\ K_{12}^8 \in A_{\Phi_3}^{z_{30},z_{29},z_{12},z_{13}}$,
$(x_1 = x_{18}) \Rightarrow (z_1 + (1,1) \in K_1^8 \wedge z_1 + (-1,1) \in K_1^8)$,
$(z_3 + (0,1) \notin K_3^8 \wedge z_3 + (0,-1) \notin K_2^8) \Rightarrow (z_3 + (-1,1) \in K_3^8 \vee z_3 + (-1,-1) \in K_2^8)$,
$(x_5 = x_{14}) \Rightarrow (z_5 + (1,-1) \in K_4^8 \wedge z_5 + (-1,-1) \in K_4^8)$,
$(z_{16} + (0,1) \notin K_5^8 \wedge z_{16} + (0,-1) \notin K_6^8) \Rightarrow (z_{16} + (1,1) \in K_5^8 \vee z_{16} + (1,-1) \in K_6^8)$

$(z_7+(0,1) \notin K_9^8 \wedge z_7+(0,-1) \notin K_8^8) \Rightarrow (z_7+(-1,1) \in K_9^8 \vee z_7+(-1,-1) \in K_8^8)$,
$(x_9 = x_{10}) \Rightarrow (z_9 + (1,-1) \in K_{10}^8 \wedge z_9 + (-1,-1) \in K_{10}^8)$,
$(z_{12} + (0,1) \notin K_{11}^8 \wedge z_{12} + (0,-1) \notin K_{12}^8) \Rightarrow (z_{12} + (1,1) \in K_{11}^8 \vee z_6 + (1,-1) \in K_{12}^8)\}$

Определим класс π-лабиринтов $\mathbf{C}_8$:
$\mathbf{C}_8 = \{c : \mathbb{Z}^2 \to E^2 | c^{-1}(\{1\}) = K \in K_8^{\{z_i\}_{i=\overline{1,30}}}, z_i \in \mathbb{Z}^2, i = 1,...,30$, и выполнено условие (8)$\}$

Теорема 1. *Существует коллектив* $(\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$ *типа* $(1,1)$*, который распознает класс* $(\mathbf{C}_8, \text{НП}) = \{(c, p_{\text{НП}}) \mid c \in \mathbf{C}_8$, $p_{\text{НП}}$ *– самая нижняя и самая правая точка множества* $c^{-1}(\{1\})\}$*, где пешка* $\mathbf{A}_8$ *имеет 91 состояние, и любой лабиринт из класса* $(\mathbf{C}_8, \text{НП})$ *с* n *вершинами она обходит за время не меньшее* $\begin{cases} 3/2(n-11)+29, & n = 2k+11, \quad k \leqslant 1 \\ 3/2(n-12)+31, & n = 2k+12, \quad k \geqslant 1 \end{cases}$ *и не большее* $\begin{cases} 9/2(n-12)+15, & n = 2k+12, \quad k \leqslant 4 \\ 9/2(n-13)+19, & n = 2k+13, \quad k \geqslant 5 \end{cases}$.

2. Доказательство Теоремы 1

Так как мы будем рассматривать только регулярные пешки, можно пользоваться более короткой записью: входной алфавит есть множество $A = \{0, 1, \ldots, 255\}$, полученное кодированием $\sum\limits_{i=1}^{8} a_i 2^{i-1}$ элементов $(1, a_1, \ldots, a_8) \in (E^2)^9$.

Рассмотрим функционирование коллектива $(\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$, который будет построен на следующем этапе.

Из определения класса $\mathbf{C}_8$ следует, что если $c \in \mathbf{C}_8$, то множество $c^{-1}(\{1\})$ может быть разделено горизонтальными отрезками на подмножества C_j, $j \in (1, \ldots, 12)$ так, что для каждого $j \in \{1, \ldots, 12\}$ существует $l \in \{1, \ldots, 4\}$ такое, что $C_j \in \Phi_l$. В [5, 6] показано, что существует пешка $\mathbf{A}_{\Phi_i} = (A, Q_i, B, \varphi_i, \psi_i, q_0, Q_F)$, которая распознает класс инициальных π-лабиринтов $(\Phi_i, \text{НП}) = \{(c, p_{\text{НП}}) \mid c^{-1}(\{1\}) \in \Phi_i, p_{\text{НП}}$ – НП точка множества $c^{-1}(\{1\})\}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Заметим, что окрестность точки, в которой автомат находится

– это единственная информация, которую автомат имеет в каждый момент времени. Автомат не имеет информации о том, находится ли он в «окрестности» бесконечной внешней области или в окрестности конечной дыры (следствием этого факта является теорема 1.1 [4]). Автомат нуждается в дополнительной информации, которая поможет ему при обхождении конечной дыры в одном направлении (в нашей конструкции это отрицательное направление) понять, что он не «зациклился».

Пусть $c \in \mathbf{C}_8$ и $c^{-1}(\{1\}) = K$. Коллектив $(\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$ начинает движение в точке z_1 (НП точка). Обходится множество K тем же самым способом, как в Лемме 1, при этом в некоторый момент автомат (и камень, который все время рядом с ним) будет в окрестности конечной дыры. Автомат камень $\mathbf{K}_8$ тогда «отстает» в одной точке лабиринта и помнит, что автомат $\mathbf{A}_8$ был в этой точке. В конструкции автомата это случается в одном из состояний q_7, q_8, q_9 автомата $\mathbf{A}_8$. Автомат $\mathbf{A}_8$ продолжает двигаться так же, как и автомат $\mathbf{A}_0$ из [6, теорема 1]. Состояния q_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19, \ldots, 25\}$ автомата $\mathbf{A}_8$ совпадают с состояниями автомата $\mathbf{A}_0$, и здесь мы не будем их описывать.

Далее, при обходе конечной дыры в том же самом направлении автомат $\mathbf{A}_8$ в некоторый момент снова окажется в точке, где находится камень $\mathbf{K}_8$, то есть автомат $\mathbf{A}_8$ обойдет конечную дыру. В конструкции автомата это происходит в одном из состояний q_{22}, q_{24}.

Далее, автомат-камень $\mathbf{K}_8$ вместе с автоматом $\mathbf{A}_8$ обходит лабиринт. В дальнейшем движении коллектив снова окажется в окрестности конечной дыры (второй), где автоматы снова разделятся (автомат-камень $\mathbf{K}_8$ тогда «отстает» и ждет, а автомат $\mathbf{A}_8$ обходит конечную дыру). В конструкции автомата это происходит в одном из состояний $q_{48}, q_{56}, q_{57}, q_{58}$.

Затем автомат $\mathbf{A}_8$ опять обязательно попадает в камень. В конструкции автомата это происходит в одном из состояний q_{71}, q_{73}. После встречи с камнем автомат $\mathbf{A}_8$ продолжает движение, и при этом $q_i = q'_{i-49}$, $i \in \{51, 52, \ldots, 66, 68, 69, 70, 74, 75, \ldots, 89\}$, где через q'_j обозначены состояния которые идентичны состояниям q_j, $j \in \{2, 3, \ldots, 17, 19, 20, 21, 25, 26, \ldots, 40\}$ из конструкции автомата $\mathbf{A}_0$ [6].

Построим коллектив $\mathbf{S}_8 = (\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$.

В описании автомата $\mathbf{A}_8$ предполагается существование «приоритета» между входными буквами в некотором состоянии, который определяем через понятие «описан раньше». Воспользуемся кодировкой, которую мы ввели выше. Для элемента входного алфавита автомата $\mathbf{A}_8$ можно пользоваться более короткой записью (s, a), где $s = \lambda$ (пустой символ) или $s = q_{k_8}$; $Q_{\mathbf{K}_8} = \{q_{k_8}\}$, $a \in \{0, 1, \ldots, 255\}$. Также в описании автомата $\mathbf{A}_8$ опустим код состояния автомата-камня $\mathbf{K}_8$; будем писать его только в части функционирования автомата $\mathbf{A}_8$, где оно зависит от автомата-камня $\mathbf{K}_8$.

Коллектив $\mathbf{S}_8 = (\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$ построим следующим образом:
$Q_8 = \{q_i \mid i \in \{1, \ldots, 89\}\} \cup Q_F$,

$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{11}$; $\psi_8(q_{11}, a) = w$ для $a \in \{214, 66, 194, 210, 248, 104, 232, 203, 215, 211, 67, 195, 216, 200, 72, 255, 223, 251, 219, 107, 75, 235, 249, 233, 105, 217, 201, 73\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{11}$; $\psi_8(q_{11}, a) = n$ для $a \in \{18, 19, 24, 25, 28, 29, 27, 146, 147, 152, 153, 155\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{12}$; $\psi_8(q_{11}, a) = e$ для $a \in \{22, 23, 31, 150, 151, 159\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{13}$; $\psi_8(q_{11}, a) = w$ для $a \in \{253, 125, 221, 93, 95, 127, 88, 92, 220, 252, 124, 120, 121, 89\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{15}$; $\psi_8(q_{11}, a) = e$ для $a \in \{10, 14, 30\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{17}$; $\psi_8(q_{11}, a) = e$ для $a \in \{26, 154, 158\}$,
$\varphi_8(q_{11}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{11}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{15}, a) = q_{15}$; $\psi_8(q_{15}, a) = e$ для $a \in \{246, 63, 30, 10, 14, 110, 111, 214, 66, 70, 86, 254, 126, 127, 106, 107, 43, 47, 62, 46, 42, 255, 31, 15, 11, 118, 98, 102\}$,
$\varphi_8(q_{15}, a) = q_{15}$; $\psi_8(q_{15}, a) = n$ для $a \in \{56, 60, 124, 120, 24, 28, 112, 116, 80, 84\}$,
$\varphi_8(q_{15}, a) = q_{16}$; $\psi_8(q_{15}, a) = w$ для $a \in \{208, 212, 240, 244, 248, 252\}$,
$\varphi_8(q_{15}, a) = q_{17}$; $\psi_8(q_{15}, a) = e$ для $a \in \{154, 158, 26, 186, 190, 58, 59, 155, 159, 187, 191, 215, 211, 210, 250, 251, 242, 243, 247, 99, 103, 114, 115, 119, 122, 123, 67, 71, 82, 83, 87, 250\}$,
$\varphi_8(q_{15}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{15}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{17}, a) = q_{17}$; $\psi_8(q_{17}, a) = e$ для $a \in \{66, 67, 70, 71, 86, 87, 98, 99, 102, 103, 106, 107, 110, 111, 118, 119, 126, 127, 214, 215, 246, 247, 254, 255, 234,$

$235, 238, 239, 194, 195, 198, 199, 226, 227, 230, 231, 242, 243, 251\}$,
$\varphi_8(q_{17}, a) = q_{18}$; $\psi_8(q_{17}, a) = s$ для $a \in \{93, 95, 75, 79, 203, 207, 220, 216, 88, 89, 92, 219, 223, 221, 217, 72, 73, 91, 200, 201\}$,
$\varphi_8(q_{17}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{17}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{25}, a) = q_{25}$; $\psi_8(q_{25}, a) = n$ для $a \in \{b \in A \mid 24 \leqslant b \leqslant 31$ или $56 \leqslant b \leqslant 63$ или $80 \leqslant b \leqslant 95$ или $112 \leqslant b \leqslant 127\}$,
$\varphi_8(q_{25}, a) = q_{26}$; $\psi_8(q_{25}, a) = n$ для $a \in \{b \in A \mid 144 \leqslant b \leqslant 159$ или $184 \leqslant b \leqslant 191\}$,
$\varphi_8(q_{25}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{25}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{26}$; $\psi_8(q_{26}, a) = w$ для $a \in \{b \in A \mid 64 \leqslant b \leqslant 103$ или $112 \leqslant b \leqslant 119$ или $192 \leqslant b \leqslant 231$ или $240 \leqslant b \leqslant 247\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{26}$; $\psi_8(q_{26}, a) = n$ для $a \in \{b \in A \mid 16 \leqslant b \leqslant 25$ или $b = 27$ или $b = 28$ или $b = 29$ или $b = 31$ или $144 \leqslant b \leqslant 159\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{46}$; $\psi_8(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{26, 58, 186, 190, 154, 158\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{27}$; $\psi_8(q_{26}, a) = w$ для $a \in \{106, 110, 122, 126, 234, 250, 254, 238\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{30}$; $\psi_8(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{10, 42\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{28}$; $\psi_8(q_{26}, a) = e$ для $a \in \{14, 30, 46, 62\}$,
$\varphi_8(q_{26}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{26}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{27}, a) = q_{27}$; $\psi_8(q_{27}, a) = w$ для $a \in \{107, 111, 127, 123, 235, 239, 251, 255\}$,
$\varphi_8(q_{27}, a) = q_{28}$; $\psi_8(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{15, 31, 63, 47\}$,
$\varphi_8(q_{27}, a) = q_{46}$; $\psi_8(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{27, 187, 59, 155, 159, 191\}$,
$\varphi_8(q_{27}, a) = q_{30}$; $\psi_8(q_{27}, a) = e$ для $a \in \{11, 43\}$,
$\varphi_8(q_{27}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{27}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{28}$; $\psi_8(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{254, 255, 246, 247, 214, 215, 126, 127, 118, 119, 86, 87\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{29}$; $\psi_8(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{122, 123, 114, 115, 82, 83, 250, 251, 242, 243, 210, 211\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{31}$; $\psi_8(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{95, 223\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{32}$; $\psi_8(q_{28}, a) = e$ для $a \in \{91, 219\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{28}, a) = n$ для $a \in \{216, 217\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{53}$; $\psi_8(q_{28}, a) = n$ для $a \in \{220, 221\}$,
$\varphi_8(q_{28}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{28}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{29}, a) = q_{29}$; $\psi_8(q_{29}, a) = e$ для $a \in \{234, 235, 226, 227, 194, 195, 106,$

107, 98, 99, 66, 67},
$\varphi_8(q_{29}, a) = q_{32}$; $\psi_8(q_{29}, a) = e$ для $a \in \{203, 75\}$,
$\varphi_8(q_{29}, a) = q_{46}$; $\psi_8(q_{29}, a) = e$ для $a \in \{239, 207, 231, 238, 199, 230, 198, 111, 110, 102, 70, 71, 103, 79\}$,
$\varphi_8(q_{29}, a) = q_{35}$; $\psi_8(q_{29}, a) = w$ для $a \in \{200, 201, 72, 73\}$,
$\varphi_8(q_{29}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{29}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{30}, a) = q_{30}$; $\psi_8(q_{30}, a) = e$ для $a \in \{66, 67, 98, 99, 106, 107\}$,
$\varphi_8(q_{30}, a) = q_{28}$; $\psi_8(q_{30}, a) = e$ для $a \in \{110, 111, 102, 103, 70, 71\}$,
$\varphi_8(q_{30}, a) = q_{31}$; $\psi_8(q_{30}, a) = e$ для $a = 79$,
$\varphi_8(q_{30}, a) = q_{33}$; $\psi_8(q_{30}, a) = e$ для $a = 75$,
$\varphi_8(q_{30}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{30}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{31}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{31}, a) = n$ для $a \in \{248, 249\}$,
$\varphi_8(q_{31}, a) = q_{53}$; $\psi_8(q_{31}, a) = n$ для $a \in \{252, 253\}$,
$\varphi_8(q_{31}, a) = q_{31}$; $\psi_8(q_{31}, a) = e$ для $a \in \{127, 255\}$,
$\varphi_8(q_{31}, a) = q_{32}$; $\psi_8(q_{31}, a) = e$ для $a \in \{123, 251\}$,
$\varphi_8(q_{31}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{31}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{32}, a) = q_{35}$; $\psi_8(q_{32}, a) = w$ для $a \in \{72, 73, 104, 105, 232, 233\}$,
$\varphi_8(q_{32}, a) = q_{32}$; $\psi_8(q_{32}, a) = e$ для $a \in \{107, 235\}$,
$\varphi_8(q_{32}, a) = q_{47}$; $\psi_8(q_{32}, a) = e$ для $a = 111$,
$\varphi_8(q_{32}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{32}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{33}, a) = q_{33}$; $\psi_8(q_{33}, a) = e$ для $a = 107$,
$\varphi_8(q_{33}, a) = q_{34}$; $\psi_8(q_{33}, a) = e$ для $a = 111$,
$\varphi_8(q_{33}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{33}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{34}, a) = q_{34}$; $\psi_8(q_{34}, a) = e$ для $a \in \{127, 255\}$,
$\varphi_8(q_{34}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{34}, a) = n$ для $a \in \{248, 249\}$,
$\varphi_8(q_{34}, a) = q_{32}$; $\psi_8(q_{34}, a) = e$ для $a \in \{123, 251\}$,
$\varphi_8(q_{34}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{34}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{35}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{35}, a) = n$ для $a \in \{210, 114, 115, 122, 123, 82, 242, 243, 250, 251, 219, 83, 211, 91\}$,
$\varphi_8(q_{35}, a) = q_{35}$; $\psi_8(q_{35}, a) = w$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{35}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{35}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{36}, a) = n$ для $a = 123$,
$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{36}$; $\psi_8(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{104, 105, 107, 232, 233, 235\}$,

$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{37};\ \psi_8(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{248, 249, 251\}$,
$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{48};\ \psi_8(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{120, 121, 124, 125\}$,
$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{42};\ \psi_8(q_{36}, a) = w$ для $a \in \{252, 253\}$,
$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{40};\ \psi_8(q_{36}, a) = s$ для $a = 189$,
$\varphi_8(q_{36}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{36}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{37}, a) = q_{37};\ \psi_8(q_{37}, a) = w$ для $a = 255$,
$\varphi_8(q_{37}, a) = q_{39};\ \psi_8(q_{37}, a) = e$ для $a \in \{31, 63\}$,
$\varphi_8(q_{37}, a) = q_{50};\ \psi_8(q_{37}, a) = e$ для $a \in \{159, 191\}$,
$\varphi_8(q_{37}, a) = q_{38};\ \psi_8(q_{37}, a) = w$ для $a = 127$,
$\varphi_8(q_{37}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{37}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{38}, a) = q_{38};\ \psi_8(q_{38}, a) = w$ для $a \in \{107, 111\}$,
$\varphi_8(q_{38}, a) = q_{39};\ \psi_8(q_{38}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 43, 47\}$,
$\varphi_8(q_{38}, a) = q_{44};\ \psi_8(q_{38}, a) = w$ для $a \in \{239, 235\}$,
$\varphi_8(q_{38}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{38}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{39}, a) = q_{36};\ \psi_8(q_{38}, a) = n$ для $a \in \{248, 249, 251\}$,
$\varphi_8(q_{39}, a) = q_{39};\ \psi_8(q_{39}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{39}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{39}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{40}, a) = q_{40};\ \psi_8(q_{40}, a) = w$ для $a \in \{82, 83, 91, 114, 115, 122, 123, 70,\ 71,\ 79, 102, 103, 110, 111, 66, 67, 75, 98, 99, 106, 107\}$,
$\varphi_8(q_{40}, a) = q_{41};\ \psi_8(q_{40}, a) = e$ для $a \in \{10, 11, 14, 15, 42, 43, 46, 47\}$,
$\varphi_8(q_{40}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{40}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{41}, a) = q_{53};\ \psi_8(q_{41}, a) = n$ для $a = 189$,
$\varphi_8(q_{41}, a) = q_{41};\ \psi_8(q_{41}, a) = n$ для $a \in \{122, 123, 114, 115, 82, 83, 91\}$,
$\varphi_8(q_{41}, a) = q_{41};\ \psi_8(q_{41}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{41}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{41}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{42}, a) = q_{42};\ \psi_8(q_{42}, a) = w$ для $a = 255$,
$\varphi_8(q_{42}, a) = q_{43};\ \psi_8(q_{42}, a) = e$ для $a \in \{31, 191, 63, 159\}$,
$\varphi_8(q_{42}, a) = q_{48};\ \psi_8(q_{42}, a) = w$ для $a = 127$,
$\varphi_8(q_{42}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{42}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{43}, a) = q_{43};\ \psi_8(q_{43}, a) = e$ для $a = 255$,
$\varphi_8(q_{43}, a) = q_{53};\ \psi_8(q_{43}, a) = n$ для $a \in \{252, 253\}$,
$\varphi_8(q_{43}, a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{43}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{44}, a) = q_{44}$; $\psi_8(q_{44}, a) = w$ для $a \in \{251, 255\}$,
$\varphi_8(q_{44}, a) = q_{45}$; $\psi_8(q_{44}, a) = e$ для $a \in \{31, 191, 27, 63, 159, 187, 59, 155\}$,
$\varphi_8(q_{44}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{44}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{45}, a) = q_{48}$; $\psi_8(q_{45}, a) = w$ для $a \in \{248, 249\}$,
$\varphi_8(q_{45}, a) = q_{45}$; $\psi_8(q_{45}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{45}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{45}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{46}, a) = q_{48}$; $\psi_8(q_{46}, a) = w$ для $a \in \{216, 217, 220, 221, 88, 89, 92, 93\}$,
$\varphi_8(q_{46}, a) = q_{47}$; $\psi_8(q_{46}, a) = e$ для $a \in \{223, 79, 95, 75, 219, 203, 207\}$,
$\varphi_8(q_{46}, a) = q_{46}$; $\psi_8(q_{46}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{46}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{46}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{47}, a) = q_{47}$; $\psi_8(q_{47}, a) = e$ для $a \in \{111, 127, 107, 251, 235, 255, 239\}$,
$\varphi_8(q_{47}, a) = q_{48}$; $\psi_8(q_{47}, a) = w$ для $a \in \{248, 249, 252, 253, 120, 121, 124, 125\}$,
$\varphi_8(q_{47}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{47}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{48}, a) = q_{48}$; $\psi_8(q_{48}, a) = w$ для $a \in \{255, 127, 223, 95, 111, 79, 247, 119, 215, 87, 103, 71, 67, 99, 75, 107, 126, 254, 110, 246, 214, 118, 86, 70, 102, 106, 98, 66\}$,
$\varphi_8(q_{48}, a) = q_{50}$; $\psi_8(q_{48}, a) = e$ для $a \in \{158, 159, 190, 191\}$,
$\varphi_8(q_{48}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{48}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{49}, a) = q_{49}$; $\psi_8(q_{49}, a) = w$ для $a \in \{251, 211, 243, 250, 210, 242, 255, 214, 246, 254, 219, 215, 247, 223\}$,
$\varphi_8(q_{49}, a) = q_{50}$; $\psi_8(q_{49}, a) = e$ для $a \in \{30, 31, 62, 63, 158, 159, 190, 191\}$,
$\varphi_8(q_{49}, a) = q_{60}$; $\psi_8(q_{49}, a) = n$ для $a \in \{187, 155, 59, 27, 186, 154, 58, 26\}$,
$\varphi_8(q_{49}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{49}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{50}, a) = q_{60}$; $\psi_8(q_{50}, a) = n$ для $a \in \{251, 211, 243, 250, 210, 242, 219\}$,
$\varphi_8(q_{50}, a) = q_{53}$; $\psi_8(q_{50}, a) = n$ для $a \in \{216, 217, 220, 221, 248, 249, 252, 253\}$,
$\varphi_8(q_{50}, a) = q_{50}$; $\psi_8(q_{50}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{50}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{50}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{67}$; $\psi_8(q_{67}, a) = e$ для $a \in \{107, 66, 67, 75, 31, 22, 23, 235, 203, 194, 195, 27, 18, 19, 255, 251, 223, 219, 214, 210, 215, 211, 159, 151, 150, 155, 146, 147\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{67}$; $\psi_8(q_{67}, a) = s$ для $a \in \{24, 25, 72, 73, 152, 153, 216, 217, 200, 201, 184, 56\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{68}$; $\psi_8(q_{67}, a) = w$ для $a \in \{104, 105, 232, 233, 248, 249\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{69}$; $\psi_8(q_{67}, a) = e$ для $a \in \{154, 158, 30, 62, 63, 59, 58, 26, 254, 250, 186, 187, 190, 191\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{71}$; $\psi_8(q_{67}, a) = w$ для $a \in \{80, 112, 120\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{73}$; $\psi_8(q_{67}, a) = w$ для $a \in \{88, 89, 121\}$,
$\varphi_8(q_{67}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{67}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{71}, a) = q_{71}$; $\psi_8(q_{71}, a) = w$ для $a \in \{246, 66, 98, 120, 80, 112, 106, 107, 255, 127, 254, 126, 214, 86, 118, 248, 240, 208, 70, 102, 110, 124, 116, 84, 252, 244, 212, 111\}$,
$\varphi_8(q_{71}, a) = q_{71}$; $\psi_8(q_{71}, a) = s$ для $a \in \{14, 46, 28, 60, 62, 30, 24, 56, 10, 42\}$,
$\varphi_8(q_{71}, a) = q_{72}$; $\psi_8(q_{71}, a) = e$ для $a \in \{11, 15, 31, 43, 47, 63\}$,
$\varphi_8(q_{71}, a) = q_{73}$; $\psi_8(q_{71}, a) = w$ для $a \in \{222, 78, 95, 223, 94, 74, 79, 75, 253, 221, 249, 217, 125, 92, 93, 121, 88, 89, 216, 220\}$,
$\varphi_8(q_{71}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{71}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{72}, a) = q_{71}$; $\psi_8(q_{72}, a) = s$ для $a \in \{126, 120, 106, 124, 252, 248, 110, 254\}$,
$\varphi_8(q_{72}, a) = q_{72}$; $\psi_8(q_{72}, a) = e$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_1 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{72}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{72}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

$\varphi_8(q_{73}, a) = q_{73}$; $\psi_8(q_{73}, a) = w$ для $a \in \{b \in A \mid b = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + a_7 2^7, a_6 = 1\}$,
$\varphi_8(q_{73}, a) = q_{F_0}$; $\psi_8(q_{73}, a) = \mathbf{0}$ иначе,

Пусть $M = \{194, 195, 198, 199, 202, 203, 206, 207, 226, 230, 234, 235, 238, 239\} \subseteq A$. Тогда, $\psi_{k8}(q_{k8}, (\{q_i\}, a)) = \psi_8(q_i, (\{q_{k8}\}, a))$ для $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a \in A$,
$\psi_{k8}(q_{k8}, (\{q_7\}, a)) = \mathbf{0}$, $a \in M_1 = \{202, 206, 234, 238, 194, 198, 226, 230\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8}, (\{q_7\}, a)) = \psi_8(q_7, (\{q_{k8}\}, a))$ для $a \notin M_1$,

$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_8\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M_1 = \{195,194,203,239,207,235\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_8\},a)) = \psi_8(q_8,(\{q_{k8}\},a))$ для $a \notin M_1$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_9\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M_1 = \{195,194,203,239,207,235,198,199\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_9\},a)) = \psi_8(q_9,(\{q_{k8}\},a))$ для $a \notin M_1$,
$\varphi_8(q_{22},(\{q_{k8}\},a)) = q_{25};\ \psi_8(q_{22},(\{q_{k8}\},a)) = e$ для $a \in M \setminus \{195,199\}$
$\varphi_8(q_{22},(\{\lambda\},a)) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{22},(\{\lambda\},a)) = \mathbf{0}$ для $a \in M \setminus \{195,199\}$, то есть если автоматы $\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8$ не встретятся,
$\varphi_8(q_{24},(\{q_{k8}\},a)) = q_{25};\ \psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{24}\},a)) = \psi_8(q_{24},(\{q_{k8}\},a)) = e$ для $a \in \{194,195,198,199\} \subset M$,
$\varphi_8(q_{24},(\{\lambda\},a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{24},(\{\lambda\},a) = \mathbf{0}$ для $a \in \{194,195,198,199\}$, то есть если автоматы $\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8$ не встретятся,

Пусть $M = \{194,195,198,199,202,203,206,207,226,227,230,231, 234, 235, 238,239\} \subseteq A$. Тогда, $\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_i\},a)) = \psi_8(q_i,(\{q_{k8}\},a))$ для $i \in \{25,26,\ldots,47\},\ a \in A$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{48}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M \setminus \{202,206\}$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{48}\},a)) = \psi_8(q_{48},(\{q_{k8}\},a))$ для $a \notin M \setminus \{202,206\}$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_i\},a)) = \psi_8(q_i,(\{q_{k8}\},a))$ для $i \in \{50,51,\ldots,55\},\ a \in A$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{56}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M_1 = \{202,206,234,238,194,198,226,230\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{56}\},a)) =;\ \psi_8(q_{56},(\{q_{k8}\},a)) = \psi_8(q_{56},a)$ для $a \notin M_1$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{57}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M_1 = \{195,194,203,239,207,235,198,199\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{57}\},a)) =;\ \psi_8(q_{57},(\{q_{k8}\},a))$ для $a \notin M_1$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{58}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in M_1 = \{195,194,203,239,207,235,198,199\} \subset M$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{58}\},a)) = \psi_8(q_{58},(\{q_{k8}\},a)) = \psi_8(q_{58},a)$ для $a \notin M_1$,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{71}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in A$
$\varphi_8(q_{71},(\{q_{k8}\},a)) = q_{74};\ \psi_8(q_{71},(\{q_{k8}\},a)) = e$ для $a \in M \setminus \{195,199,227,231\}$
$\varphi_8(q_{71},(\{\lambda\},a)) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{71},(\{\lambda\},a) = \mathbf{0}$ для $a \in M \setminus \{195,199,227,231\}$, то есть если автоматы $\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8$ не встретятся,
$\psi_{k8}(q_{k8},(\{q_{73}\},a)) = \mathbf{0},\ a \in A$.
$\varphi_8(q_{73},(\{q_{k8}\},a)) = q_{74};\ \psi_8(q_{73},(\{q_{k8}\},a)) = e$ для $a \in M$,
$\varphi_8(q_{73},(\{\lambda\},a) = q_{F_0};\ \psi_8(q_{73},(\{\lambda\},a) = \mathbf{0}$ для $a \in M$, то есть если автоматы $\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8$ не встретятся.

Коллектив $\mathbf{S}_8 = (\mathbf{A}_8, \mathbf{K}_8)$ при распознавании лабиринта $c \in \mathbf{C}_8$ обходит этот лабиринт и производит различные проверки. При этом некоторые вершины автомат посещает несколько раз (после встречи с камнем $\mathbf{K}_8$ автомат $\mathbf{A}_8$ должен вернуться в некоторую вершину и продолжить обход и проверку лабиринта c). Значит, для каждого лабиринта $c \in \mathbf{C}_8$ верно, что хотя бы одну из вершин лабиринта c автомат $\mathbf{A}_8$ посещает не меньше, чем два раза. Также, для $n \geqslant 22$, $n \in \mathbb{N}$, можно построить лабиринт $c' \in \mathbf{C}_8$ такой, что некоторую из вершин лабиринта c' автомат $\mathbf{A}_8$ будет посещать пять раз. Таким свойством обладают лабиринты $c'' \in \mathbf{C}_8$, для которых $\|K_4^8 \cap K_7^8\|$, где $c''^{-1}(\{1\}) = \bigcup\limits_{i=1}^{12} K_i^8$ (см. определение класса $\mathbf{C}_8$).

Из предыдущего вытекает, что для каждого $n \geqslant 13$ всегда можно построить лабиринты $L, L' \in \mathbf{C}_8$ такие, что $\|V(L)\| = \|V(L')\| = n$, и время обхода для лабиринта L будет минимальным, а для лабиринта L' – максимальным.

Список литературы

[1] Килибарда Г. Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2. С. 71 – 81.

[2] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[4] Стаматович Б. О распознавании лабиринтов автоматами // Дискретная математика. (в печати).

[5] Стаматович Б. Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3 – 4. С. 291 – 305.

[6] Стаматович Б. Распознавание двусвязных цифр коллективами автоматов // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4. Вып. 1 – 2. С. 321 – 337.