О стохастических моделях возможности*

Ю.П. Пытьев

Введение

Рассмотрим стохастический эксперимент Э, математической моделью которого является дискретное вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ – конечное или счетное множество элементарных исходов Э, $\mathcal{P}(\Omega)$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω, представляющих все мыслимые исходы Э, или, как принято говорить, – результаты испытаний, $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ – вероятность, заданная своими значениями на элементарных исходах $\mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) = \mathrm{pr}_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots;\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = 1$, определяющими вероятность любого результата испытаний $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ равенством

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i. \tag{1}$$

В рамках эксперимента Э невозможно дать содержательную интерпретацию значения вероятности $\mathrm{Pr}(A)$ и указать способ ее эмпирического определения. Для этого следует обратиться к эксперименту Э^n, который можно представить себе как n копий Э, выполненных взаимно независимо. Эксперимент Э^n принято называть последовательностью n независимых испытаний.

Математической моделью Э^n, то есть n раз независимо воспроизведенного Э, является вероятностное пространство $(\Omega^n,\, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}_n)$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 44/99P

– n-ая степень $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \Pr)$, где Ω^n – множество всех последовательностей $(\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n})$, $\omega_{i_k} \in \Omega$, $k = 1,\ \ldots,\ n$, описывающих элементарные исходы Э^n, $\mathcal{P}(\Omega^n)$ – σ-алгебра всех подмножеств Ω^n, представляющих исходы Э^n – результаты n независимых испытаний, $\Pr_n$ – вероятность, заданная на множестве всех элементарных исходов Э^n равенствами

$$\Pr_n(\{(\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n})\}) = \mathrm{pr}_{i_1}\ldots\mathrm{pr}_{i_n}, \qquad (\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n}) \in \Omega^n, \qquad (2)$$

определяющими факт независимости испытаний.

Пусть A – некоторый исход Э, $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$, $\omega \in \Omega$, – индикаторная функция A и $\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n}) = n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_A(\omega_{i_k})$, $(\omega_{i_1},\ldots,\ \omega_{i_n}) \in \Omega^n$,– случайная величина на $(\Omega^n,\ \mathcal{P}(\Omega^n),\ \Pr_n)$, равная частоте исхода A в последовательности n независимых испытаний.

Как известно[1], с увеличением n вероятность любого отклонения частоты $\nu_A^{(n)}$ от вероятности $\Pr(A)$ стремится к нулю, точнее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\Pr_n((\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n}) \in \Omega^n,\ |\nu_A^{(n)}(\omega_{i_1},\ \ldots,\ \omega_{i_n}) - \Pr(A)| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Этот факт лежит в основе так называемой частотной интерпретации вероятности, ее статистического толкования, согласно которому в достаточно длинной последовательности независимых повторений Э частота любого его исхода A оценивается вероятностью A, а если последняя неизвестна, то частота A является ее экспериментальной оценкой. Имея ввиду цели этой статьи, подчеркнем, что значение $\Pr(A)$ следует рассматривать как прогнозируемое значение *частоты* исхода A в достаточно длинной серии независимых испытаний, но не как элемент предвидения исхода A, не как меру возможности исхода A *при каждом испытании.*

Вместе с тем при любом определении возможности p_i исхода $\omega_i \in \Omega$ как меры, оценивающей обстоятельства, определяющие относительную предпочтительность реализации исхода ω_i в сравнении

[1] Закон больших чисел, [1].

со всеми другими элементарными исходами Э, естественно считать, что $p_i \geqslant p_j$, если $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Неформальная мотивация в данном случае такова: чем больше вероятность pr_i исхода ω_i, тем чаще ω_i встретится в длинной серии испытаний, тем более возможен исход ω_i в каждом очередном испытании. Но для такого заключения не обязательно знать значения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, достаточно лишь знать, как они упорядочены.

В связи с этими замечаниями рассмотрим стохастический эксперимент Э, математической моделью которого является *класс* $\mathcal{P}r$ дискретных вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в которых значения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$ элементарных исходов Э подчинены лишь условиям упорядоченности[2] и нормировки

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1, \tag{3}$$

а в остальном произвольны.

Определение 1. Класс всех вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot)$ (1), определяемых последовательностями $\mathrm{pr} \triangleq \{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots\}$ вероятностей элементарных исходов, удовлетворяющих условиям (3), обозначим $\mathbb{P}\mathrm{r}$, соответственно класс вероятностных пространств $\mathcal{P}r \triangleq \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}), \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\}$ является математической моделью Э; далее класс $\mathcal{P}r$ называется стохастической моделью Э.

Знания одной лишь упорядоченности (3), конечно, недостаточно, чтобы охарактеризовать Э в терминах стандартного формализма теории вероятностей. Условия (3) подсказывают, что модель Э следует формулировать в терминах возможностей исходов Э, причем в ранговой шкале, в которой содержательно могут быть истолкованы не конкретные значения возможностей, а лишь отношения упорядоченности между ними, как это сделано, например, в теории возможностей, элементы которой представлены в [2].

Сопоставим Э, стохастическая модель которого определена как класс $\mathcal{P}r$ вероятностных пространств, класс $\mathcal{P}$ возможностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, в которых значения возможностей $p_i \triangleq$

---

[2] Любое распределение вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ может быть линейно упорядочено по убыванию путем перенумерации элементарных исходов (см. раздел 3)

$P(\{\omega_i\})$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, элементарных исходов, определяющие возможность $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ формулой

$$P(A) \triangleq \sup_{i:\, \omega_i \in A} p_i, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{4}$$

упорядочены так же, как вероятности в (3):

$$1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant 0. \tag{5}$$

Определим класс $\mathbb{P}$ возможностей, *согласованный с классом вероятностей* $\mathbb{P}\mathrm{r}$, добавив к условию (5), согласующему упорядоченность возможностей элементарных исходов Э с упорядоченностью их вероятностей, аналогичные условия для произвольных исходов Э, точнее –для всех тех исходов $A,\, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ эксперимента, для которых неравенство $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$ выполняется *для любой вероятности* $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$.
Определение 2. Максимальный по включению класс $\mathbb{P}$ возможностей $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ назовем согласованным с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей $\Pr(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ если выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : \quad & \text{если } \forall \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r} \quad \Pr(A) \leqslant \Pr(B), \\ & \text{то } \forall P \in \mathbb{P} \quad P(A) \leqslant P(B), \end{aligned} \tag{6}$$

где вероятность $\Pr$ и возможность P определены соответственно формулами (1) и (4). Класс $\mathbb{P}$, согласованный с $\mathbb{P}\mathrm{r}$, определяет теоретико-возможностную модель

$$\mathcal{P} = \{(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P), \quad P \in \mathbb{P}\}$$

эксперимента Э, согласованную с его стохастической моделью $\mathcal{P}r$ условиями (3) и (6).

Заметим, что если класс $\mathbb{P}$ согласован с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и $\forall \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r} :$ $\Pr(A) = \Pr(B)$, то $\forall P \in \mathbb{P} : \; P(A) = P(B)$. Действительно, если $\forall \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r} : \; \Pr(A) \leqslant \Pr(B)$ и $\Pr(A) \geqslant \Pr(B)$, то согласно (6) $\forall P \in \mathbb{P} :$ $P(A) \leqslant P(B)$ и $P(A) \geqslant P(B)$.

Заметим также, что поскольку по определению, $P(\Omega) = 1$, [2], то условие (6) содержит как частный случай условие (5), ибо в качестве A и B в (6) можно выбирать одноточечные множества $\{\omega_i\}$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, упорядоченные согласно (3).

Заметим, наконец, что в силу монотонности $\Pr(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ (1) и $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ (4), означающей, что

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \Pr(A) \leqslant \Pr(B), \\ P(A) \leqslant P(B), \end{cases}$$

согласно (1) и (4) для любых A, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\forall \Pr : \begin{cases} \Pr(A \cup B) \geqslant \max(\Pr(A), \Pr(B)), \\ \Pr(A \cap B) \leqslant \min(\Pr(A), \Pr(B)), \end{cases}$$
$$\forall P : \begin{cases} P(A \cup B) = \max(P(A), P(B)), \\ P(A \cap B) \leqslant \min(P(A), P(B)). \end{cases}$$

Далее в разделе 1 будет показано, что на самом деле требования (6) являются следствием условий (3) и (5) и тем самым последние определяют класс $\mathbb{P}$, согласованный с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$, и теоретико-возможностную модель Э, согласованную с его стохастической моделью $\mathcal{P}r$.

В данном случае важен тот факт, что, хотя модель $\mathcal{P}$ не определяет значение возможности $P(C)$ (4) любого[3] исхода $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ эксперимента, тем не менее она *упорядочивает все исходы* Э *по значениям их возможностей*, а именно, для любых исходов A и B модель $\mathcal{P}$ позволяет определить, какое из неравенств $P(A) \leqslant P(B)$ или $P(B) \leqslant P(A)$ имеет место, ибо согласно условиям (5) и формуле (4), например, $P(A) \leqslant P(B)$, если и только если $i(A) \triangleq \min\limits_{\omega_k \in A} k \geqslant \min\limits_{\omega_k \in B} k \triangleq i(B)$. Этот факт позволяет полностью охарактеризовать Э в терминах формализма теории возможностей [2] на основе его модели $\mathcal{P}$.

Дело в том, что в теории возможностей [2] шкала $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ значений возможности, определенная как отрезок $[0,1]$ числовой прямой с естественной упорядоченностью, определенной неравенством «$\leqslant$», и двумя правилами композиции: «max» как сложение «$\boldsymbol{+}$» и «min» как умножение «$\bullet$», имеет обширную группу Г

[3] за исключением $C = \varnothing$, $P(C) = 0$, и C, содержащих ω_1, для которых $P(C) = 1$

изотонных автоморфизмов $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, определяющую то, что в [2] названо *принципом относительности возможности*. Согласно этому принципу все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, объявляются эквивалентными, эквивалентными считаются любые теоретико-возможностные утверждения, если в некоторых шкалах их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкалы.

Формально дело обстоит следующим образом. Пусть функция $\gamma(\cdot)$ определена и принимает значения в $[0,1]$ и $\mathcal{L}$– шкала $([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet) \triangleq ([0,1], \leqslant, \max, \min)$.

Определение 3. Функция $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ определяет отображение $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, называемое эндоморфизмом $\mathcal{L}$, если выполнены следующие условия:

$$\forall a, b \in [0,1] : \text{если } \ a \leqslant b, \text{ то } \ \gamma(a) \leqslant \gamma(b),$$
$$\gamma(a \boldsymbol{+} b) = \gamma(a) \boldsymbol{+} \gamma(b), \ \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b),$$
$$\gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = 1.$$

Эндоморфизм γ называется автоморфизмом, если функция $\gamma(\cdot)$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$; автоморфизм γ^{-1}, определяемый функцией $\gamma^{-1}(\cdot)$, называется обратным к γ. Композиция $\gamma' \circ \gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ функций $\gamma'(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ определяется согласно равенству[4] $\gamma' \circ \gamma(x) \triangleq \gamma'(\gamma(x))$, $x \in [0,1]$, $\gamma' \circ \gamma$–соответствующая композиция эндоморфизмов γ и γ'. Символ Γ далее обозначает как множество функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, так и множество соответствующих эндоморфизмов $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (как правило, – автоморфизмов).

Обозначим символом $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ то, что далее называется переходом от шкалы $\mathcal{L}$ к преобразованной шкале $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, последнюю назовем гомоморфной (изоморфной, эквивалентной) $\mathcal{L}$, если γ–эндоморфизм (автоморфизм). Если $\mathcal{L}(\Omega)$–класс функций $f(\cdot) : \Omega \to \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega))$–класс интегралов $p(\cdot) : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}$, то при переходе $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ [2]:

– $a \to \gamma(a), \quad a \in [0,1]$;
– $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$, где $\gamma \circ f(\omega) \triangleq \gamma(f(\omega)), \quad \omega \in \Omega$,
– $p(\cdot) \to \gamma * p(\cdot)$, где $\gamma * p(f(\cdot)) \triangleq \gamma(p(\gamma^{-1} \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(\Omega)$.

[4] $\gamma^{-1} \circ \gamma(x) = \gamma \circ \gamma^{-1}(x) = x, \ x \in [0,1], \qquad (\gamma' \circ \gamma)^{-1}(\cdot) = \gamma^{-1} \circ {\gamma'}^{-1}(\cdot)$

При этом $P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, поэтому $\gamma * P(A) \triangleq \gamma * p(\chi_A(\cdot)) = \gamma(p(\gamma^{-1} \circ \chi_A(\cdot))) = \gamma(p(\chi_A(\cdot))) = \gamma(P(A))$, ибо $\gamma^{-1} \circ \chi_A(\cdot) = \gamma_A(\cdot), \gamma(\cdot) \in \Gamma, A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Пусть $P(A)$ и $P(B)$–возможности A и соответственно B в шкале $\mathcal{L}$, тогда в шкале $\gamma\mathcal{L}$ возможности A и B суть соответственно $\gamma(P(A))$ и $\gamma(P(B))$, причем неравенства $P(A) < P(B)$ и $\gamma(P(A)) < \gamma(P(B))$ эквивалентны, если γ–автоморфизм, а в противном случае не исключено, что неравенство $P(A) < P(B)$ повлечет равенство $\gamma(P(A)) = \gamma(P(B))$.

Далее, если не оговорено противное, Γ обозначает множество всех функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, непрерывных, строго монотонно возрастающих и принимающих значения $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Поскольку каждая функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot) \in \Gamma$, и для любых двух функций $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\gamma'(\cdot) \in \Gamma$ их композиция $\gamma \circ \gamma'(\cdot) \in \Gamma$, то множество Γ является группой относительно операции умножения «$\circ$». Далее функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и определяемые ими автоморфизмы $\gamma \in \Gamma$ будем называть изотонными, Γ–группой (всех) изотонных автоморфизмов $\mathcal{L}$, $\Gamma\circ \triangleq \{\gamma\circ, \gamma \in \Gamma\}$ и $\Gamma* \triangleq \{\gamma*, \gamma \in \Gamma\}$–группами всех изотонных автоморфизмов класса $\mathcal{L}(\Omega)$ функций $f(\cdot) : \Omega \to \mathcal{L}$ и соответственно класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega))$ интегралов $p(\cdot) : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}$. Если не оговорено противное $\widetilde{\Gamma}$ далее обозначает как множество всех монотонно неубывающих функций $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1] = 0$, $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, так и множество определяемых ими эндоморфизмов $\widetilde{\gamma} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$; $\widetilde{\Gamma}\circ \triangleq \{\widetilde{\gamma}\circ, \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}\}$ и $\widetilde{\Gamma}* \triangleq \{\widetilde{\gamma}*, \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}\}$ обозначает множества эндоморфизмов $\widetilde{\gamma}\circ : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{\gamma}* : \mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega)) \to \mathcal{L}$ соответственно; $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$.

Возвращаясь к принципу относительности, заметим, что в теории возможностей [2] любые возможности $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, равно как и соответствующие возможностные пространства $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ и $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \widetilde{P})$ (и определяемые ими модели Э!) считаются *эквивалентными* (обозначение: $P \sim \widetilde{P}$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P) \sim (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \widetilde{P})$), если существует функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, такая, что $\widetilde{P}(A) = \gamma(P(A))$ для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. А поскольку единственным полным инвариантом распределения возможностей (5) относительно группы Γ изотонных преобразований $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ является определенная в (5) упорядоченность, или класс $\mathbb{P}$, если речь идет о соответствующих (5) возможностях, то в теории возможностей [2] содержательно, независимо от выбора шкалы, могут быть истолкованы не значения возможности, а лишь отношения «$<$», «$>$» или «$=$» между ними. Иначе говоря, в теории возможностей шкала $\mathcal{L}$ играет роль «индивидуальной системы отсчета» исследователя, и содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели Э, которые не изменяются при преобразовании шкалы, не зависят от выбора $\mathcal{L}$. В частности, не зависит от выбора шкалы отмеченная выше упорядоченность *всех* исходов Э по значениям их возможностей. В этом смысле класс $\mathcal{P}$ является «полноценной» моделью Э.

Кроме понятия согласованности класса $\mathbb{P}$ с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ (см. определение 2) используются понятия согласованности возможности P с вероятностью $\Pr$, класса $\mathbb{P}(\Pr)$ возможностей, согласованных с вероятностью $\Pr$ и т.д. По аналогии с определением 2 *назовем возможность P согласованной с вероятностью* $\Pr$, *если выполнены следующие условия согласованности:* $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *если* $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$, *то* $P(A) \leqslant P(B)$(*и, как следствие, если* $\Pr(A) = \Pr(B)$, *то* $P(A) = P(B)$). *Кроме того, естественно считать, что если* $\Pr(A) = 0, \Pr(B) = 1$, *то* $P(A) = 0, P(B) = 1$. Это соглашение определяет согласованность шкалы значений возможности со шкалой значений вероятностей.

В дальнейшем будем исходить из определения «более сильной» согласованности P с $\Pr$, включающей согласованность шкал.

Определение 4. Возможность P называется согласованной с вероятностью $\Pr$, если существует эндоморфизм $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$ такой, что $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A)) \triangleq \widetilde{\gamma} * \Pr(A)$.Согласованность P с $\Pr$ обозначим символом $\Pr \sim> P$.

Возможность P называется максимально согласованной с вероятностью $\Pr$, если $\Pr \sim> P$ и $\forall \widetilde{P}$ $\Pr \sim> \widetilde{P}$ $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\widetilde{P}(A) = \widetilde{\gamma}(P(A)) \triangleq \widetilde{\gamma} * P(A)$. Максимальную согласованность P с $\Pr$ обозначим символом $\Pr \approx> P$.

Обозначим

$$\mathbb{P}(\Pr) = \{\gamma * P(\cdot), \gamma \in \Gamma\}, \quad \Pr \approx> P,$$

класс всех возможностей, максимально согласованных с вероятностью[5] Pr. Если $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, то эта формула определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot) : \mathbb{P}\mathrm{r} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, поскольку если $\mathrm{Pr} \approx> P$, то $P \in \mathbb{P}$, и, следовательно, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \subset \mathbb{P}$. В этом случае обратное к $\mathbb{P}(\cdot)$ отображение $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot) : \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$ определяется равенством[6]

$$\mathbb{P}\mathrm{r}(P) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}, P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\}, \quad P \in \mathbb{P},$$

$\mathbb{P}\mathrm{r}(P)$–*класс всех вероятностей, с каждой из которых возможность* $P \in \mathbb{P}$ *максимально согласована.* Включения $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ и $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, по определению, эквивалентны.

Заметим, что класс $\mathcal{P}$ возможностных пространств может быть представлен в виде объединения попарно непересекающихся подклассов эквивалентных возможностных пространств, каждый из которых определяет в известном смысле «неприводимую», не допускающую дальнейшей «детализации» модель Э. Действительно, поскольку $\forall\, \gamma* \in \Gamma*$ включения $P(\cdot) \in \mathbb{P}$ и $\gamma * P(\cdot) \in \mathbb{P}$ эквивалентны, и $\forall\, P(\cdot) \in \mathbb{P}$ множество $\{\gamma * P(\cdot),\ \gamma* \in \Gamma*\} \subset \mathbb{P}$ является классом эквивалентных (и эквивалентных $P(\cdot)$) возможностей, то класс $\mathbb{P}$ можно представить в виде объединения (континуума) попарно непересекающихся классов $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, $\mathrm{ord} \in [0,1]$, эквивалентных возможностей

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\mathrm{ord} \in [0,\,1]} \mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}, \tag{26*}$$

где ord–двоичное число из $[0,1]$, определяющее «точную» упорядоченность распределения возможности $P(\cdot) \in \mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, определенную лишь отношениями[7] «=» $\sim$ «0» и «>» $\sim$ «1» (см. раздел 3). Каждый класс $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, $\mathrm{ord} \in [0,1]$, определяет «неприводимую» модель Э как класс эквивалентных возможностных пространств $\mathcal{P}_{(\mathrm{ord})} = \{(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P), P \in \mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}\}$, $\mathrm{ord} \in [0,1]$. При этом $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{\mathrm{ord}\in[0,1]} \mathcal{P}_{(\mathrm{ord})}$.

Если P–любая возможность из $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, то $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})} = \{\gamma * P,\ \gamma* \in \Gamma\}$, а если $\widehat{P} \in \mathbb{P}_{(0.11\ldots)}$, то для любого $\mathrm{ord} \in [0,1]$ можно указать класс

---

[5]Если $\mathrm{Pr} \approx> P$, то $\forall \gamma \in \Gamma \quad \mathrm{Pr} \approx> \gamma * P$

[6]Классы $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}), \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}(P), P \in \mathbb{P}$, подробно рассмотрены в разделе 3

[7]Например, $0.01110\ldots$ соответствует $1 = p_1 = p_2 > p_3 > p_4 > p_5 = p_6$, где «ноль» перед «точкой» соответствует всегда верному равенству $1 = p_1$

$\widetilde{\Gamma}_{(\mathrm{ord})}$ эндоморфизмов $\widetilde{\gamma} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, таких, что $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})} = \{\widetilde{\gamma} * \widehat{P},\ \widetilde{\gamma} * \in \Gamma_{(\mathrm{ord})} *\}$.

С другой стороны, как показано в разделе 3, разбиению (26*) взаимно однозначно соответствует разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$:

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{\mathrm{ord} \in [0,\,1]} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\mathrm{ord})}, \tag{27*}$$

на классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\mathrm{ord})}$, $\mathrm{ord} \in [0,\,1]$, причем так, что любая возможность $P \in \mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, максимально согласована со всеми вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\mathrm{ord})}$, и только с ними, $\mathrm{ord} \in [0,\,1]$. Этот факт позволит свести задачу экспериментального определения возможности к задаче проверки статистических гипотез об упорядоченности распределения вероятностей.

В заключение заметим, что, если речь идет о теоретико-вероятностном «прототипе» возможности, то в том случае когда математическая модель Э определена как вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$, любая согласованная с ней теоретико-возможностная модель $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P)$ не будет востребована, ибо в этом случае полностью определенной вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\,1]$ модель $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ содержит все, что можно извлечь из $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P)$. Но, разумеется, теоретико-возможностная модель $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P)$ не обязана иметь теоретико-вероятностный «прототип». Более того, теоретико-возможностные модели как раз характерны для «нечетких», «размытых» и т.п. объектов и явлений, [3], не содержащих хорошо определенной стохастической компоненты.

Вместе с тем, как будет показано в разделе 3, наличие стохастического «прототипа» открывает путь экспериментального определения теоретико-возможностной модели. Но вначале рассмотрим то, что можно назвать *принципом соответствия* теоретико-возможностной модели модели теоретико-вероятностной. Речь пойдет об условиях согласованности классов возможностей с классами вероятностей, теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной и т.п.

1. Условия согласованности класса $\mathbb{P}$ с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$

В этом параграфе представлены некоторые свойства класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, определенного условием (3), позволяющие убедиться в анонсированной во введении согласованности класса $\mathbb{P}$ возможностей, удовлетворяющих условию (5), с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$, определенным условием (3).

Будет показано, что для возможности $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, определенной в (4), требования (6) являются следствием условий (3) и (5), которые и определяют согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$. При этом решающее значение имеет следующий факт.

Лемма 1. *Пусть* $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_{a_i}\}$, $B = \bigcup_{i \in I_B} \{\omega_{b_i}\}$ *– некоторые подмножества* Ω, *где*[8] $I_A \triangleq \{1, 2, \dots, i_A\} \subset I$, $I_B \triangleq \{1, 2, \dots, i_B\} \subset I \triangleq \{1, 2, ...\}$, *причем не исключаются случаи* $i_A = \infty$, $i_B = \infty$, $a_1 < a_2 < \dots$, $b_1 < b_2 < \dots$. *Тогда* $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B)$ ($\mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(B)$) *при любых значениях вероятностей* pr_1, pr_2, $\dots$, $\mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$, *удовлетворяющих условию* (3), *если и только если*

$$\begin{array}{c} I_A \subset I_B \ \textit{и} \quad \forall i \in I_A \cap I_B \quad a_i \geqslant b_i \\ (I_A = I_B \ \textit{и} \quad \forall i \in I_A = I_B \quad a_i = b_i,). \end{array} \tag{7}$$

Доказательство. *Достаточность.* Согласно условиям (7),(4) $\mathrm{pr}_{a_i} \leqslant \mathrm{pr}_{b_i}$, $i \in I_A \cap I_B = I_A$, поэтому $\mathrm{Pr}(B) = \sum_{i \in I_A} \mathrm{pr}_{b_i} + \sum_{i \in I_B \setminus I_A} \mathrm{pr}_{b_i} \geqslant \sum_{i \in I_A} \mathrm{pr}_{a_i} + \sum_{i \in I_B \setminus I_A} \mathrm{pr}_{b_i} \geqslant \sum_{i \in I_A} \mathrm{pr}_{a_i} = \mathrm{Pr}(A)$.

Если $a_i = b_i$, $i \in I_A = I_B$, то, очевидно, $\mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(B)$ при любых $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \dots$.

Необходимость. Пусть нарушено первое условие (7), то есть пусть $I_A \supset I_B$, $I_A \neq I_B$. Множество I_B в таком случае конечно, $i_B < \infty$, $I_A \cap I_B = I_B$ и$I_A \setminus I_B \neq \varnothing$. Покажем, что при таком условии неравенство $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B)$ не может быть выполнено при всех

[8] I – множество чисел натурального ряда; если $i_A = \infty$, то $I_A = I$, если $I_A \subset I$, $I_A \neq I$, то I_A – конечное подмножество I.

значениях вероятностей, ограниченных лишь условием (3). Выберем в силу условия (3) $\mathrm{pr}_j = q = \mathrm{const}$ для $j = 1, 2, \ldots, a_{i_B}$, причем так, чтобы $q \cdot \mathrm{pr}_{a_{i_B}} < 1$, тогда $\mathrm{pr}_{a_i} = \mathrm{pr}_{b_i} = q$ для $i = 1, 2, \ldots, i_B$, ибо $b_i \leqslant a_i$, $i \in I_B$. При таком выборе вероятностей $\Pr(A) - \Pr(B) = \sum\limits_{i \in I_B} (\mathrm{pr}_{a_i} - \mathrm{pr}_{b_i}) + \sum\limits_{i \in I_A \setminus I_B} \mathrm{pr}_{a_i} = \sum\limits_{i \in I_A \setminus I_B} \mathrm{pr}_{a_i} > 0$. Последнее неравенство будет выполнено, если выбрать $\mathrm{pr}_{a_{i_B+1}} > 0$, возможность такого выбора следует из условий $I_A \setminus I_B \neq \varnothing$ и $q \cdot \mathrm{pr}_{a_{i_B}} < 1$. Итак, в этом случае неравенство $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$ не может быть выполнено для всех $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$.

Пусть теперь $I_A \subset I_B$, то есть $I_A = \{1, 2, \ldots, i_A\} \subset \{1, 2, \ldots, i_B\} = I_B$, где $i_A \leqslant i_B$, причем, возможно, $i_A = \infty$ и (или) $i_B = \infty$, но второе условие (7) нарушено: $a_i \geqslant b_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, $a_k < b_k$, $a_i \geqslant b_i$, $i = k+1, \ldots, i_A$. Покажем, что и в этом случае неравенство $\Pr(A) \leqslant \Pr(B)$ не выполняется для некоторых значений вероятностей $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$. Выберем вероятности следующим образом: $\mathrm{pr}_i = q = \mathrm{const}$ для $i = 1, 2, \ldots, a_{k-1}$, $\mathrm{pr}_{a_k} \geqslant \mathrm{pr}_{b_k} + \delta$, $\delta > 0$, $\sum\limits_{i > b_k} \mathrm{pr}_i < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ $(a_{k-1} < a_k < b_k < b_{k+1} \leqslant a_{k+1}!)$. При этом $\Pr(A) \leqslant 1$, $\Pr(B) \leqslant 1$, если $q \cdot \mathrm{pr}_{a_{k-1}} + \mathrm{pr}_{a_k} \leqslant 1 - \varepsilon - \delta$, и

$\Pr(A) - \Pr(B) = \sum\limits_{i \in I_A} (\mathrm{pr}_{a_i} - \mathrm{pr}_{b_i}) - \sum\limits_{i \in I_B \setminus I_A} \mathrm{pr}_{b_i} = \sum\limits_{i=1}^{k-1} (\mathrm{pr}_{a_i} - \mathrm{pr}_{b_i}) +$

$(\mathrm{pr}_{a_k} - \mathrm{pr}_{b_k}) + \sum\limits_{i=k+1}^{i_A} (\mathrm{pr}_{a_i} - \mathrm{pr}_{b_i}) - \sum\limits_{i > i_A} \mathrm{pr}_{b_i} \geqslant \delta - \varepsilon > 0$, если выбрать

$\delta > \varepsilon$, ибо слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{k-1} (\mathrm{pr}_{a_i} - \mathrm{pr}_{b_i})$ равно нулю, $\mathrm{pr}_{a_k} - \mathrm{pr}_{b_k} \geqslant \delta$, а все остальные слагаемые не меньше $-\varepsilon$ (δ можно выбирать $> \varepsilon$, ибо $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым).

Наконец, если $\Pr(A) = \Pr(B)$ при любых $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$, то, очевидно, должны быть выполнены условия $a_i = b_i$, $i \in I_A = I_B$.

Замечание. Лемма 1 в данной формулировке верна при любой упорядоченности $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, получаемой из (3) путем замены «$\leqslant$» на произвольную комбинацию «$\leqslant$» и «$<$».

Чтобы убедиться в этом, достаточно изменить доказательство необходимости лишь в той части, где использованы равенства $\mathrm{pr}_j = q = \mathrm{const}$, $j = 1, 2, \ldots$, а именно, равенства следует заменить на неравенства $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots > \mathrm{pr}_k$ и воспользоваться тем, что разность $\mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_k > 0$ может быть сделана сколь угодно малой.

Для дальнейшего существенна лишь та часть леммы 1, которая относится к необходимости. Сформулируем ее следующим образом: если $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B)$ при любых значениях pr_i, $i = 1, 2, ...$, удовлетворяющих условию (3), то $i(A) \triangleq \min\limits_{\omega_i \in A} i = a_1 \geqslant b_1 = \min\limits_{\omega_i \in B} i \triangleq i(B)$.

Необходимость этого условия легко видеть , не обращаясь к Лемме 1. Действительно, если $a_1 < b_1$, то, выбрав в согласии с (3) $\mathrm{pr}_1 = \ldots = \mathrm{pr}_{a_1} = 1/a_1$, $\mathrm{pr}_{a_1+1} = \mathrm{pr}_{a_1+2} = \ldots = 0$, найдем: $\mathrm{Pr}(A) \geqslant \mathrm{pr}_{a_1} = 1/a_1 > 0 = \mathrm{Pr}(B)$.

Теорема 1. *Если* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $p_i \triangleq P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, *и выполнены условия* (3) *и* (5), *то неравенство* $\mathrm{Pr}(A) \triangleq \sum\limits_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i \leqslant \sum\limits_{i:\, \omega_i \in B} \mathrm{pr}_i \triangleq \mathrm{Pr}(B)$ *для вероятностей исходов* A *и* B, *верное при любых значениях вероятностей* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, *удовлетворяющих условию* (3), *влечет неравенство* $P(A) \triangleq \sup\limits_{i:\, \omega_i \in A} p_i \leqslant \sup\limits_{i:\, \omega_i \in B} p_i \triangleq P(B)$ *для возможностей* A *и* B *при любых значениях возможностей* $p_1, p_2, \ldots$, *удовлетворяющих условию* (5).

Доказательство. $\sup\limits_{i:\, \omega_i \in A} p_i = p_{i(A)} \leqslant p_{i(B)} = \sup\limits_{i:\, \omega_i \in B} p_i$.

Итак, класс $\mathbb{P}$ возможностей, определенных формулой (4), согласован с классом $\mathbb{Pr}$ вероятностей, определенных формулой (1), теоретико-возможностная модель Э $\mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P),\ P \in \mathbb{P}\}$ согласована с его теоретико-вероятностной моделью $\mathcal{P}r = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{Pr}\}$, требования упорядоченности (3) и (5) являются условиями согласованности.

Замечание. Не следует думать, что согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{Pr}$ определяет соответствие $\mathrm{Pr}(\cdot) \to P(\cdot)$ $\mathrm{Pr}(\cdot) \in \mathbb{Pr}$, $P(\cdot) \in \mathbb{P}$, при котором возможность $P(A)$ соответствует вероятности $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{Pr}$ определяет *соответствие упорядоченностей* (6), согласно которому (см. теорему 1) *правилу суммирования вероятностей* (1) *соответствует правило «суммирования» возможно-*

стей[9] (4).

На рис. 1, 2, 3 условия (3) и (5) проиллюстрированы на примере, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. На рис. 1 $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} \equiv \mathbb{P}\mathrm{r} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}_3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0\}$, $\mathbb{P}^{123} \equiv \mathbb{P} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3,\ 1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant 0\}$. $\mathbb{P}\mathrm{r}$ – один из шести[10] «треугольников вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}_3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \geqslant \mathrm{pr}_k \geqslant 0\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, образующих покрытие «треугольника всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_* \triangleq \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}_3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ \mathrm{pr}_1 \geqslant 0, \mathrm{pr}_2 \geqslant 0, \mathrm{pr}_3 \geqslant 0\} = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k=1,2,3\\ i\neq j\neq k\neq}} \mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$. Каждому «треугольнику вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$ условия согласованности упорядоченностей распределений, аналогичные (3) и (5), ставят в соответствие «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{R}_3,\ 1 = p_i \geqslant p_j \geqslant p_k \geqslant 0\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$. В частности, треугольнику $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$ условиями (3), (5) сопоставлен треугольник $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$. «Треугольники возможностей» образуют «покрытие класса всех возможностей» $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k=1,2,3\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$.

2. Согласованность теоретико-возможностной независимости со стохастической независимостью

Рассмотрим вопрос о связи между теоретико-вероятностным и теоретико-возможностным аспектами понятия независимости. Стандартной теоретико-вероятностной моделью двух экспериментов $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ является вероятностное пространство

---

[9] В [2] $P(A) = \sup\limits_{i:\,\omega_i \in A} p_i \triangleq \mathop{+}\limits_{i:\,\omega_i \in A} p_i$.

[10] В рассматриваемом примере здесь и всюду далее вероятность Pr (возможность P) для упрощения формулировок «отождествляется» с точкой $\mathrm{pr} \triangleq (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_* \subset \mathcal{R}_3$ (с точкой $p \triangleq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}_* \subset \mathcal{R}_3$), определяющей ее распределение, треугольник $\mathbb{P}\mathrm{r}$ ($\mathbb{P}$) и его подмножества обозначают как множества распределений вероятностей (возможностей), так и соответствующие множества вероятностей (возможностей).

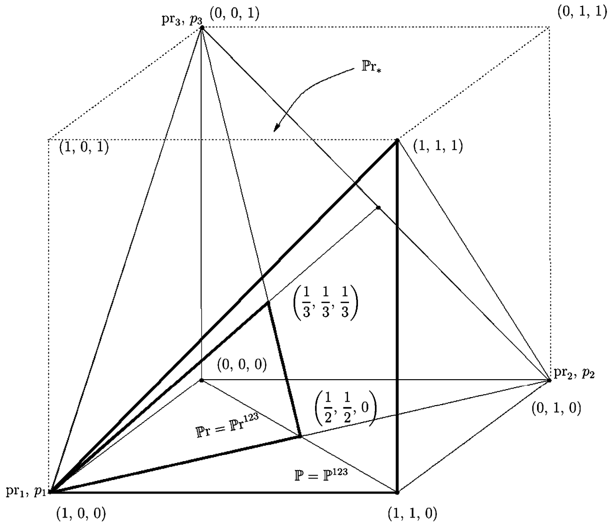

Рис. 1. Классы (распределений) вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$ и возможностей $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$ в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, $1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant 0$.

$$(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr}) = (\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}),\, \mathrm{Pr}), \tag{8}$$

определенное как произведение вероятностных пространств $(\Omega^{(1)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}),\, \mathrm{Pr}^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}),\, \mathrm{Pr}^{(2)})$, являющихся теоретико-вероятностными моделями $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ соответственно. Эксперимент, выполнение которого означает выполнение $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, обозначим $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$. В его модели (8) $\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ – множество всех упорядоченных пар $(\omega_{i_1}^{(1)},\, \omega_{i_2}^{(2)})$, определяющих элементарные исходы Э, отвечающие элементарным исходам $\omega_{i_1}^{(1)} \in \Omega^{(1)}$, $\omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}$ экспериментов $Э^{(1)}$ и соответственно $Э^{(2)}$, где i_λ пробегает конечное или бесконечное множество значений $I_{(\lambda)} = \{1,\, 2,\, \ldots\}$, $\lambda = 1,\, 2$. $\mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})$ – класс всех подмножеств $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})$, представляющих все мыслимые исходы Э.

Определим вероятность Pr ее значениями на элементарных исходах Э равенствами

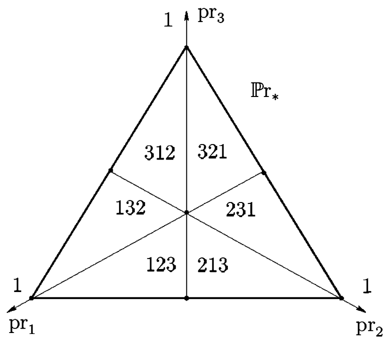

Рис. 2. «Треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$, тройка ijk обозначает упорядоченность $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \geqslant \mathrm{pr}_k$, определяющую «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$.

$$\mathrm{pr}_{i_1,i_2} \triangleq \mathrm{Pr}(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}) = \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \triangleq$$
$$\triangleq (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}), \qquad i_\lambda \in I_{(\lambda)}, \quad \lambda = 1,2, \quad (9)$$

где $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)} \triangleq \mathrm{Pr}^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\})$ – вероятность элементарного исхода $\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)} \in \Omega^{(\lambda)}$ эксперимента $\mathcal{Э}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1,2$. При этом вероятность любого исхода $A \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ эксперимента Э определится формулой

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{\substack{(i_1,i_2):\\ (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in A}} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}. \qquad (10)$$

Согласно равенствам (9) эксперименты Э$^{(1)}$ и Э$^{(2)}$, составляющие Э, стохастически независимы в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ (8),(ср. с (2)), [1]. Действительно, для любого исхода $C = A^{(1)} \times A^{(2)} \triangleq \{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)},\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \subset \Omega^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)} \subset \Omega^{(2)}\}$ эксперимента Э, представляющего исходы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов Э$^{(1)}$ и Э$^{(2)}$,

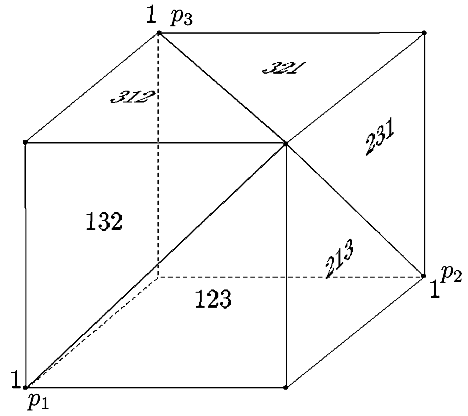

Рис. 3. «Треугольники возможностей», тройка ijk обозначает упорядоченность $1 = p_i \geqslant p_j \geqslant p_k$, определяющую «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$; $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$ – класс всех возможностей.

$$\mathrm{Pr}(C) \triangleq (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(C) \triangleq \sum_{\substack{i_1:\, \omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)}\\ i_2:\, \omega^{(2)}_{i_2} \in A^{(2)}}} \mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} \cdot \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} =$$

$$= \left(\sum_{i_1:\, \omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)}} \mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} \right) \cdot \left(\sum_{i_2:\, \omega^{(2)}_{i_2} \in A^{(2)}} \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} \right) = \mathrm{Pr}^{(1)}(A^{(1)}) \cdot \mathrm{Pr}^{(2)}(A^{(2)}). \tag{11}$$

С другой стороны исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов Э$^{(1)}$ и Э$^{(2)}$ соответствуют исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента Э, причем (см. рис. 5)

$$\Pr(C_1) = (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(C_1) = \sum_{\substack{i_1:\,\omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)} \\ i_2:\,\omega^{(2)}_{i_2} \in \Omega^{(2)}}} \mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} \cdot \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} = \Pr^{(1)}(A^{(1)}),$$
$$\Pr(C_2) = \Pr^{(2)}(A^{(2)}). \tag{12}$$

А поскольку $C = A^{(1)} \times A^{(2)} = (A^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times A^{(2)}) = C_1 \cap C_2$, то согласно (11), (12)

$$\Pr(C_1 \cap C_2) = \Pr(C_1) \cdot \Pr(C_2), \tag{13}$$

то есть исходы C_1 и C_2 эксперимента Э, представляющие соответственно исходы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $Э^{(1)}$ и $Э^{(1)}$ в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, стохастически независимы.

Пусть теперь моделями $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ являются не конкретные вероятностные пространства $(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \Pr^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \Pr^{(2)})$, а классы

$$\mathcal{P}r^{(1)} = \{(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \Pr^{(1)}), \quad \Pr^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}\},$$
$$\mathcal{P}r^{(2)} = \{(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \Pr^{(2)}), \quad \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}\},$$

где $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$ – класс вероятностей, удовлетворяющих условиям (3) $\mathrm{pr}^{(\lambda)}_1 \geqslant \mathrm{pr}^{(\lambda)}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\mathrm{pr}^{(\lambda)}_1 + \mathrm{pr}^{(\lambda)}_2 + \ldots = 1$, $\lambda = 1, 2$, а моделью $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$ является класс $\mathcal{P}r = \mathcal{P}r^{(1)} \times \mathcal{P}r^{(2)} \triangleq \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}), \Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)}), \quad \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r} \triangleq \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}\}$, где включение $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ означает по определению, что $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$, $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$.

Тогда для любых исходов $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента Э, соответствующих исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, как в (13),

$$\Pr(C_1 \cap C_2) = \Pr(C_1) \cdot \Pr(C_2)$$

для любой вероятности $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$. Такие эксперименты $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ составляющие $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$, также *назовем стохастически независимыми*.

Следующая лемма позволит установить связь между так определенной стохастической независимостью и ее теоретико-возможностным аналогом.

Лемма 2. *Если при любых вероятностях* $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathrm{pr}_1^{(\lambda)} \geqslant \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad \mathrm{pr}_1^{(\lambda)} + \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} + \ldots = 1, \quad \lambda = 1, 2, \tag{14}$$

для некоторых $A, B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$,

$$\mathrm{Pr}(A) \triangleq \sum_{i_1, i_2 \in I(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \leqslant \sum_{i_1, i_2 \in I(B)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \triangleq \mathrm{Pr}(B), \tag{15}$$

где $I(C) \triangleq \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)},\ (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in C\}$, $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, *то при любых* $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, *удовлетворяющих условиям* (14), *для этих* A, B :

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}) \leqslant \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min(\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}), \tag{16}$$

Доказательство. Покажем, что если существуют вероятности $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющие условиям (15), такие, что

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}) > \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min(\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}), \tag{17}$$

то $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, можно выбрать так, чтобы выполнялись условия (14) и (17) и при этом нарушалось условие (15), то есть выполнялось неравенство $\mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B)$. Действительно, пусть для некоторых вероятностей, удовлетворяющих условиям (14), выполнено неравенство (17). Поскольку, в силу (14), точные верхние грани в (17) достигаются, существует пара индексов $(i_1(A), i_2(A)) \in I_{(1)} \times I_{(2)}$, для которой

$$\sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min(\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}) = \min(\mathrm{pr}_{i_1(A)}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2(A)}^{(2)}),$$

и, следовательно, согласно (17), (14) при любых $(i_1, i_2) \in I(B)$

$$\max(i_1, i_2) > \max(i_1(A), i_2(A)) \triangleq d(A).$$

Определим следующие подмножества $I_{(1)} \times I_{(2)}$, показанные на рис. 4:

$$J^{(1)}(A) \triangleq \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)},\ \max(i_1, i_2) \leqslant d(A)\},$$
$$J^{(2)}(A) \triangleq (I_{(1)} \times I_{(2)}) \backslash J^{(1)}(A) = \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)},\ \max(i_1, i_2) > d(A)\}.$$

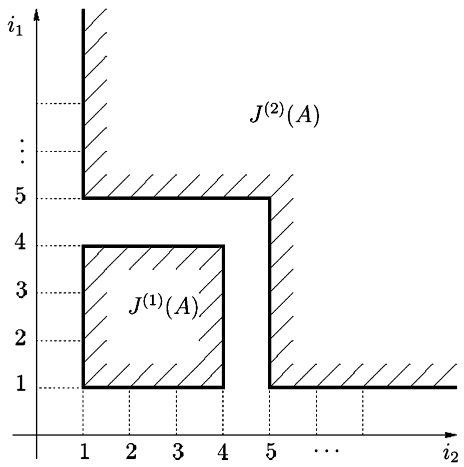

Рис. 4. Множества $J^{(1)}(A)$, $J^{(2)}(A)$ при $d(A) = 4$.

Выберем $\mathrm{pr}^{(\lambda)}_{i_\lambda}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, так, чтобы

$\mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} = \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} = 1/d(A)$, если $(i_1, i_2) \in J^{(1)}(A)$;
$\mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} = \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} = 0$, если $i_1 > d(A)$, $i_2 > d(A)$,
то есть чтобы $\mathrm{pr}^{(1)}_{i_1} \cdot \mathrm{pr}^{(2)}_{i_2} = 0$, если $(i_1, i_2) \in J^{(2)}(A)$.

При этом условия (14) выполнены, а поскольку $I(A) \cap J^{(1)}(A) \neq \varnothing$ и $I(B) \subset J^{(2)}(A)$, то выполнено условие (17) и

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{(i_1,i_2)\in I(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \geqslant \sum_{(i_1,i_2)\in (I(A)\cap J^{(1)}(A))} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} > 0,$$
$$\mathrm{Pr}(B) = \sum_{(i_1,i_2)\in I(B)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \leqslant \sum_{(i_1,i_2)\in J^{(2)}(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = 0,$$

то есть $\mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B) = 0$.

Пусть $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ – класс возможностей $P^{(\lambda)}$, $P^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\}) = p_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, согласованный с классом вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$, определенным условиями (14), то есть пусть

$$1 = p_1^{(\lambda)} \geqslant p_2^{(\lambda)} \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{18}$$

$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \{(\Omega^{(\lambda)}, \mathcal{P}(\Omega^{(\lambda)}), P^{(\lambda)}),\ P^{(\lambda)} \in \mathbb{P}^{(\lambda)}\}$–согласованная с $\mathcal{P}r^{(\lambda)}$ теоретико-возможностная модель $\text{Э}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. Теоретико-возможностную модель $\mathcal{P}$ эксперимента $\text{Э} = \text{Э}^{(1)} \times \text{Э}^{(2)}$ определим равенством

$$\mathcal{P} \triangleq \mathcal{P}^{(1)} \times \mathcal{P}^{(2)} \triangleq \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}),\ P = P^{(1)} \times P^{(2)}),$$
$$P^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)},\ P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}\}, \tag{19}$$

в котором возможность $P \in \mathbb{P} \triangleq \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ задана на элементарных исходах $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})$ эксперимента Э равенствами

$$\begin{gathered} P(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}) \triangleq P(\{(\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)})\}) = \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}), \\ (i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \end{gathered} \tag{20}$$

определяющими теоретико-возможностную P-независимость элементарных исходов Э [2]. Для любого $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ согласно формулам (4) и (20)

$$P(C) = \sup_{(i_1,\, i_2)\in I(C)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}). \tag{21}$$

Согласно определению (21) для любых исходов $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ эксперимента $\text{Э} = \text{Э}^{(1)} \times \text{Э}^{(2)}$, соответствующих исходам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ экспериментов $\text{Э}^{(1)}$ и $\text{Э}^{(2)}$,

$$P(C_1) = \sup_{\substack{i_1:\,\omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)},\\ i_2:\,\omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = P^{(1)}(A^{(1)}), \quad P(C_2) = P^{(2)}(A^{(2)}),$$

$$P(C_1 \cap C_2) = \sup_{\substack{i_1:\,\omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)},\\ i_2:\,\omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = \min(\sup_{i_1:\,\omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}} p_{i_1}^{(1)}, \sup_{i_2:\,\omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}} p_{i_2}^{(2)}) =$$
$$= \min(P^{(1)}(A^{(1)}), P^{(2)}(A^{(2)})) = \min(P(C_1), P(C_2)). \quad (22)$$

Следовательно, *исходы C_1 и C_2 P-независимы при любой возможности* $P = P^{(1)} \times P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$, [2].

Исходы C_1 и C_2 называются N-независимыми [2], если

$$N(C_1 \cup C_2) = \max(N(C_1), N(C_2)),$$

где $N(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$–необходимость, связанная с возможностью $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ равенством $N(A) \triangleq \theta * P(\Omega \setminus A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, в котором $\theta(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$–непрерывная строго монотонно убывающая функция, такая, что $\theta * \theta(a) = a$, $a \in [0,1]$. Исходы C_1 и C_2 называются независимыми, если они P- и N-независимы.

Проверим, что в модели (19), (20) и (21) любые исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ N-независимы. Действительно, воспользовавшись равенством (22), найдем (см. рис. 5)

$$N(C_1) \triangleq \theta * P((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1) = \theta * P((\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}) =$$
$$\theta * P^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \triangleq N^{(1)}(A^{(1)}); \; N(C_2) = N^{(2)}(A^{(2)}) \quad \text{и}$$
$$N(C_1 \cup C_2) \triangleq \theta * P((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus (C_1 \cup C_2)) =$$
$$\theta * P([\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}] \cap [\Omega^{(1)} \times (\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})]) =$$
$$\theta * \min(P^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}), P^{(2)}(\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})) =$$
$$\max(N^{(1)}(A^{(1)}), N^{(2)}(A^{(2)})) = \max(N(C_1), N(C_2)).$$

Итак, в модели $\mathcal{P}$, определенной равенствами (19), (20) и (21), любые исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ независимы.

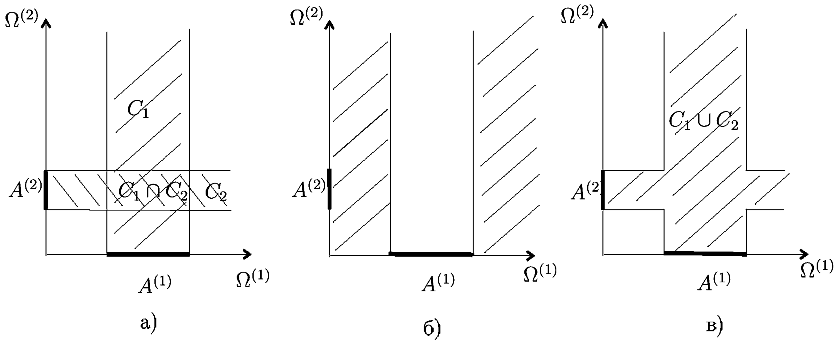

Рис. 5. Заштрихованы: а) цилиндрические множества C_1 и C_2 и их пересечение $C_1 \cap C_2$; б) дополнение $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1 = (\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}$ множества $C_1 \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(1)}$; в) объединение $C_1 \cup C_2$ множеств C_1 и C_2;

Определение 5. Класс $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей, определенных формулой (21), назовем согласованным с классом $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ вероятностей, определенных в (10), если для любых A, $B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, таких, что неравенство

$$\Pr(A) \triangleq (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(A) \leqslant (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(B) \triangleq \Pr(B), \tag{23}$$

верное для всех вероятностей $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ (то есть для всех $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$ и $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$), влечет неравенство

$$P(A) = (P^{(1)} \times P^{(2)})(A) \leqslant (P^{(1)} \times P^{(2)})(B) = P(B) \tag{24}$$

для всех возможностей $P \in \mathbb{P}$ (то есть для всех $P^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)}$ и $P^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}$).

Как следствие леммы 2 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если* $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ *– класс возможностей, согласованный с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$ *вероятностей,* $\lambda = 1, 2$, *то класс* $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ *возможностей, определенных в* (21), *согласован с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ *вероятностей,определенных в* (10).

Доказательство. Действительно, если неравенство (15) выполнено для всех вероятностей $\Pr = \Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)}$, $\Pr^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$, $\Pr^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$, то, поскольку в силу леммы 2 для любых $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, выполняется неравенство (16), то для всех возможностей $p_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющих условию (18), будет выполнено неравенство

$$P(A) = \sup_{(i_1,i_2)\in I(A)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) \leqslant \sup_{(i_1,i_2)\in I(B)} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) = P(B).$$

Итак, согласно теореме 2, согласованность класса $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей (21) с классом $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ вероятностей (10), означающая соответствие упорядоченности (24) упорядоченности (23), определяет соответствие правила «суммирования» возможностей (21), означающего теоретико-возможностную независимость[11] $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, правилу суммирования вероятностей (10), означающему стохастическую независимость $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$; наконец, соответствие теоретико-возможностной независимости независимости стохастической определяет соответствие правилу умножения вероятностей стохастически независимых элементарных исходов в (10): $\Pr(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv \Pr((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \Pr(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cdot \Pr(\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})$ операции min как «операции умножения возможностей» P- независимых элементарных исходов в (20): $P(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv P((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \min(P(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}), P(\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}))$. Эти факты в совокупности составляют то, что можно назвать *согласованностью теоретико-возможностной независимости со стохастической независимостью.*

3. Экспериментальное построение теоретико-возможностной модели Э

В этом параграфе задача экспериментального оценивания распределения возможностей сведена к задаче проверки статистических

[11] В [2] $P(C) = \sup\limits_{\substack{(i_1,i_2)\\(\omega_{i_1},\omega_{i_2})\in C}} \min(p_{i_1}^{(1)}, p_{i_2}^{(2)}) \triangleq \mathop{+}\limits_{\substack{(i_1,i_2)\\(\omega_{i_1},\omega_{i_2})\in C}} (p_{i_1}^{(1)} \bullet p_{i_2}^{(2)})$.

гипотез о классах эквивалентных распределений возможностей, каждый из которых определен той или иной упорядоченностью значений возможностей элементарных исходов эксперимента. Эти классы, образующие разбиение класса $\mathbb{P}_*$ «всех возможностей» на классы эквивалентных возможностей, в свою очередь определяют разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ «всех вероятностей» на соответствующие классы вероятностей, причем так, что в этих разбиениях между классами возможностей и вероятностей установлено взаимно однозначное соответствие, согласно которому каждый класс эквивалентных возможностей максимально согласован [2] с соответствующим классом вероятностей (и с каждой вероятностью из этого класса).

Тем самым задача экспериментального определения теоретико-возможностной модели эксперимента, *эквивалентная задаче выбора одного из классов эквивалентных возможностей, образующих разбиение* $\mathbb{P}_*$, сводится к задаче проверки статистических гипотез, в которой на основе наблюдения исходов эксперимента требуется принять решение о принадлежности распределения вероятностей, контролирующего наблюдения, к одному из классов вероятностей, образующих разбиение $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$.

3.1. Классы $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и их когерентные разбиения

Далее, если не оговорено противное, предполагается, что в определении 3 согласованности P с Pr ($\mathrm{Pr} \sim> P$) и максимальной согласованности P с Pr ($\mathrm{Pr} \approx> P$) вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, то есть распределение Pr удовлетворяет условию (3). В таком случае распределение любой согласованной с Pr возможности удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{gathered} 1 = p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \\ \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_{i+1}, \Rightarrow p_i = p_{i+1}, \quad \mathrm{pr}_i = 0, \Rightarrow p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots , \end{gathered} \tag{5*}$$

а для максимальной согласованности дополнительно требуется, чтобы в (5*) было максимальное число строгих неравенств при каждом конкретном распределении $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ [2].

Напомним, что $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$–класс всех возможностей, максимально согласованных с $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ (см. введение).

В монографии [2] показано, что любая возможность $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, максимально согласованная с вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, может быть задана распределением

$$p_i = g(\mathrm{pr}_i), \quad i = 1, 2, \dots , \tag{25}$$

где $g(\cdot)$ – некоторая функция из класса $\mathbb{G}(\mathrm{Pr}) \subset \widetilde{\Gamma}$ монотонно неубывающих функций $g(\cdot)\,:\ [0,\,1] \to [0,1]$, непрерывных на $(0,1]$, принимающих постоянные значения p_i на каждом интервале $\Delta_i = [\mathrm{pr}_i,\, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$, строго монотонно возрастающих всюду вне интервалов Δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, и таких, что $p_i < p_{i-1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i-1} = \varnothing$, $p_i = p_{i-1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i-1} \neq \varnothing$, $p_1 = g(\mathrm{pr}_1) = g(x) = 1$, $x \in [\mathrm{pr}_1, 1]$, $g(0) = 0$; при этом для возможности P, определяемой распределением (25), в силу непрерывности $g(\cdot)$ согласно (4) $P(A) = g(\mathrm{Pr}(A))$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Выберем произвольно возможности P и $\widetilde{P}$ из $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, пусть $p_i = g(\mathrm{pr}_i)$, $\widetilde{p}_i = \widetilde{g}(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ – их распределения, где $g(\cdot)$ и $\widetilde{g}(\cdot)$ – функции из $\mathbb{G}(\mathrm{Pr})$. Так как для любых $g(\cdot)$ и $\widetilde{g}(\cdot)$ из $\mathbb{G}(\mathrm{Pr})$ можно указать функцию $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, такую, что[12] $g(\mathrm{pr}_i) = \gamma(\widetilde{g}(\mathrm{pr}_i)) \triangleq (\gamma \circ \widetilde{g})(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ то согласно определению (4) для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A) = (\gamma * \widetilde{P})(A)$, ибо $\gamma(\cdot)$ – строго монотонно возрастает и непрерывна на $[0,\,1]$. Следовательно, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ – *класс эквивалентных возможностей* $P \in \mathbb{P}$, или, иначе говоря, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ – *класс эквивалентности в* $\mathbb{P}$. Пусть P – любая возможность из $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, тогда $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\gamma * P,\ \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$ и, следовательно, класс $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ инвариантен относительно любого преобразования $\gamma * :\ \mathbb{P} \to \mathbb{P}$: $\gamma * \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\gamma * \in \Gamma *$.

Проверим, что любые два класса эквивалентности $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ и $\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{Pr}})$, как подмножества $\mathbb{P}$, либо не имеют общих элементов, либо совпадают. Действительно, если $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \cap \mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{Pr}})$, то $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\gamma * P,\ \gamma * \in \Gamma *\} = \mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{Pr}})$.

Наконец, убедимся, что *класс* $\mathbb{P}$ *можно представить в виде объединения попарно непересекающихся классов эквивалентности* $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$:

[12] Если $g(\cdot)$ – некоторая функция из $\mathbb{G}(\mathrm{Pr})$, то $\mathbb{G}(\mathrm{Pr}) = \{(\gamma \circ g)(\cdot),\ \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$.

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}} \mathbb{P}(\mathrm{Pr}), \tag{26}$$

где $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}$ – множество тех вероятностей $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, которым отвечают попарно различные классы $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$: $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \cap \mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{Pr}}) = \varnothing$, если $\mathrm{Pr}, \widetilde{\mathrm{Pr}} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}$ и $\mathrm{Pr} \neq \widetilde{\mathrm{Pr}}$. Действительно, пусть для некоторых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B)$ для любой вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и P – произвольная возможность из $\bigcup\limits_{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{*}} \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$. Тогда при некоторой вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}$ $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ и, следовательно, можно указать функцию $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})$ такую, что для любого $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(C) = g(\mathrm{Pr}(C))$. Поэтому $P(A) = g(\mathrm{Pr}(A)) \leqslant g(\mathrm{Pr}(B)) = P(B)$, то есть выполнены условия (6), $P \in \mathbb{P}$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}} \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \subset \mathbb{P}$. С другой стороны, как показано в [5], для любой возможности $P \in \mathbb{P}$ можно указать вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, для которой $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$. Следовательно, $\mathbb{P} \subset \bigcup\limits_{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}} \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ и поэтому $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{\circ}} \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ – разбиение $\mathbb{P}$ на классы эквивалентности.

Определим класс вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}(P) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\}$, $P \in \mathbb{P}$. Если $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ рассматривать как значение в точке $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ многозначного отображения $\mathbb{P}(\cdot) : \mathbb{P}\mathrm{r} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, то $\mathbb{P}\mathrm{r}(P)$ – значение в точке $P \in \mathbb{P}$ многозначного отображения $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot) : \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$, обратного к $\mathbb{P}(\cdot)$.

Так как для любого $\gamma * \in \Gamma *$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\mathrm{r}(\gamma * P) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \gamma * P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\} = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ P \in \gamma^{-1} * \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\} = \\ = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\} = \mathbb{P}\mathrm{r}(P), \qquad P \in \mathbb{P},\end{aligned}$$

то $\mathbb{P}\mathrm{r}(P)$ можно рассматривать как образ при отображении $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot) : \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$ класса эквивалентности в $\mathbb{P}$, содержащего возможность P. А поскольку включения $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ и $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, $P \in \mathbb{P}$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, эквивалентны, то $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(P) \cap \mathbb{P}\mathrm{r}(\widetilde{P}) \Leftrightarrow (P \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \& (\widetilde{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr}))$ и, следовательно, $\mathbb{P}\mathrm{r}(P) = \mathbb{P}\mathrm{r}(\widetilde{P})$, ибо возможности P и $\widetilde{P}$ эквивалентны. Итак, *классы* $\mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, $P \in \mathbb{P}$, *либо не имеют общих элементов* *в* $\mathbb{P}\mathrm{r}$*, либо совпадают,* то есть являются классами эквивалентности в $\mathbb{P}\mathrm{r}$ – образами классов эквивалентности $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^\circ$, в $\mathbb{P}$ при отображении $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot) : \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$, и аналогично разбиению (26)

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{P \in \mathbb{P}^\circ} \mathbb{P}\mathrm{r}(P), \tag{27}$$

где $\mathbb{P}^\circ$ – множество всех попарно неэквивалентных возможностей $P \in \mathbb{P}$ (которым отвечают попарно различные классы вероятностей: $\mathbb{P}\mathrm{r}(P) \cap \mathbb{P}\mathrm{r}(\widetilde{P}) = \varnothing$, если $P, \widetilde{P} \in \mathbb{P}^\circ$, $P \neq \widetilde{P}$). Иначе говоря, в разбиении (27) множества $\mathbb{P}\mathrm{r}$ на классы $\mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, $P \in \mathbb{P}^\circ$, $\mathbb{P}^\circ$ – множество всех возможностей, выбранных по одной из каждого класса эквивалентных возможностей $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^\circ$.

Связь между разбиениями (26) и (27) можно охарактеризовать следующим образом. Пусть возможность $P_0 \in \mathbb{P}$ и вероятность $\mathrm{Pr}_0 \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ таковы, что $P_0 \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0)$ и $\mathrm{Pr}_0 \in \mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$. Тогда класс $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0)$ состоит из тех и только тех возможностей $P \in \mathbb{P}$, каждая из которых максимально согласована с теми и только теми вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, которые составляют класс $\mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$, и соответственно класс $\mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$ состоит из тех и только тех вероятностей $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, с каждой из которых максимально согласованы те и только те возможности $P \in \mathbb{P}$, которые составляют класс $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0)$. Иначе говоря, эквивалентные включения $P_0 \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0) \Leftrightarrow \mathrm{Pr}_0 \in \mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$ определяют взаимно однозначное соответствие $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0) \Leftrightarrow \mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$ между классами в разбиениях (26) и (27), при котором *класс* $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}_0)$ *естественно назвать максимально согласованным с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}(P_0)$. Для краткости так согласованную пару разбиений (27) и (26) назовем *когерентной.*

В свою очередь, каждый класс $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^\circ$, эквивалентных возможностей определяется свойственной всем принадлежащим ему возможностям P одной и той же «точной» упорядоченностью возможностей $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, элементарных исходов, которая, в отличие от «общей» упорядоченности (5), определяется только равенствами и строгими неравенствами[13]. В случае счетного $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ каждой «точной» упорядоченности взаимно

[13]Например, $1 = p_1 = p_2 = p_3 > p_4 = p_5 > \ldots$; этой упорядоченности соответствует двоичное число $0.00101\ldots$.

однозначно соответствует двоичное число, например, упорядоченности $1 = p_1 = p_2 > p_3 > p_4 = p_5 > \ldots$ соответствует число $\mathrm{ord} = 0.01101\ldots \in [0, 1]$, в котором точка отделяет первый ноль отвечающий всегда верному равенству $1 = p_1$, а далее каждому равенству отвечает ноль, неравенству – единица. Отсюда следует, что множество всех «строгих» упорядоченностей, каждая из которых определяет один из классов эквивалентных возможностей в (26) и соответствующий ему класс вероятностей в (27), имеет мощность континуума. Следовательно, в случае счетного Ω множества $\mathbb{P}\mathrm{r}^\circ$ в (26) и $\mathbb{P}^\circ$ в (27) имеют мощность континуума.

Поскольку любое число из $[0, 1]$ можно представить в двоичной записи $\mathrm{ord} = 0.e_1e_2\ldots$, где e_i равно либо нулю, либо единице, $i = 1, 2, \ldots$, а каждая такая запись выделяет один из классов $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$ эквивалентных возможностей в разбиении (26), определенных «точной» упорядоченностью значений $p_1, p_2, \ldots$, соответствующей $\mathrm{ord} \in [0, 1]$, разбиение (26) можно представить в следующем виде:

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\mathrm{ord}\in[0,1]} \mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}. \tag{26*}$$

Здесь индекс (ord) в явном виде указывает на «точную» упорядоченность распределений $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, эквивалентных возможностей, образующих класс $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$. Равенство (26*) назовем разбиением класса $\mathbb{P}$ на (неразложимые!) классы $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, эквивалентных, «точно» упорядоченных возможностей. Соответственно вместо (27) получим

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{\mathrm{ord}\in[0,1]} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\mathrm{ord})}. \tag{27*}$$

Здесь индекс (ord) указывает на соответствие класса вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\mathrm{ord})}$ классу возможностей $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$, максимально с ним согласованных, $\mathrm{ord} \in [0, 1]$. Пара разбиений (26*), (27*), по определению, является когерентной.

3.2. Классы $\mathbb{P}_*$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ и их когерентные разбиения

Обратимся теперь к классу «всех возможностей» и уточним его структуру. Обозначим $\mathbb{P}_*$ класс всех возможностей, распределение каждой из которых может быть линейно упорядочено по невозрастанию путем перенумерации элементарных исходов ω_i, $i = 1, 2, \ldots$. Точнее, пусть $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, – распределение возможности $P \in \mathbb{P}_*$, тогда существует такая биекция $j_. : \{1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, \ldots\}$, что $1 = p_{j_1} \geqslant p_{j_2} \geqslant \ldots$. Это означает, что существуют максимальные элементы:

$$1 = p_{j_1} = \max_i p_i, \quad p_{j_2} = \max_{i:\, i \neq j_1} p_i, \quad p_{j_3} = \max_{i:\, i \neq j_1, i \neq j_2} p_i, \quad \ldots .$$

Класс $\mathbb{P}_*$ не содержит, например, возможности, для распределений которых $\exists\, i_0 : \forall i \geqslant i_0 : p_i \leqslant p_{i+1} < p_{i+2} \leqslant \ldots$, где строгих неравенств «$<$» бесконечно много[14]. С другой стороны, если Ω конечно, то $\mathbb{P}_*$ – класс всех возможностей.

В этом случае класс $\mathbb{P}_*$ может быть представлен в виде разбиения на классы $\mathbb{P}_{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$, эквивалентных возможностей

$$\mathbb{P}_* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}_{(\lambda)}, \tag{26**}$$

в котором каждый класс $\mathbb{P}_{(\lambda)}$ состоит из возможностей, распределения которых могут быть одинаково «точно» упорядочены согласно одному из условий, своему для каждого класса $\mathbb{P}_{(\lambda)}$, например, как $1 = p_{j_1} > p_{j_2} = p_{j_3} > \ldots$, путем должной перестановки $i \to j_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, индексов элементарных исходов ω_i, $i = 1, \ldots, n$.

Индекс λ в (26**) отличает как число $\mathrm{ord} \in [0, 1]$, характеризующее «точную» упорядоченность, так и зависящую от распределения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (упорядочивающую его) функцию $j_.$, причем один и тот же индекс λ сопоставлен числу ord и всем функциям $j_.$, отличающимся переставновками индексов элементраных исходов, возможности которых равны.

Разбиению (26**) соответствует разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ всех вероятностей

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\lambda)}, \tag{27**}$$

[14]Такой возможности должна соответствовать «вероятность», распределение которой не удовлетворяет условию нормировки.

образующее с (26**) когерентную пару.

В случае счетного Ω разбиения (26**) и (27**), образующие когерентную пару, остаются в силе, причем в (27**) $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ – класс *всех* вероятностей.

Действительно, пусть $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ – произвольное распределение вероятностей. В силу условий $\mathrm{pr}_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$, во-первых, существует наименьший номер i_1, для которого $\mathrm{pr}_{i_1} > 0$, и, во-вторых, $\mathrm{pr}_i \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому $\exists n_1\ \forall i > n_1\ \mathrm{pr}_i < pr_{i_1}$ и, следовательно, $\sup\limits_i \mathrm{pr}_i = \max\limits_{i \leqslant n_1} \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_{j_1},\ 1 \leqslant j_1 < n_1$. Если i_2– наименьший среди $i > i_1$ номер, для которого $\mathrm{pr}_{i_2} > 0$, то $\exists n_2\ \forall i > n_2\ \mathrm{pr}_i < \mathrm{pr}_{i_2}$ и, следовательно, $\sup\limits_{i,\, i \neq j_1} \mathrm{pr}_i = \max\limits_{i \leqslant n_2, i \neq j_1} \mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_{j_2} \leqslant \mathrm{pr}_{j_1}$ и т.д.

3.3. Задача эмпирического определения тероретико-возможностной модели Э как задача проверки статистических гипотез

Рассмотрим задачу проверки статистических гипотез о распределении вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_*$, определяющей стохастическую модель $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$ эксперимента Э, в которой на основе наблюдения исходов Э требуется принять решение в пользу одного из взаимоисключающих включений $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\lambda)},\ \lambda \in \Lambda$. Если принимается гипотеза, согласно которой $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\lambda_0)}$, то наблюденные исходы Э свидетельствуют в пользу любой из эквивалентных теоретико-возможностных моделей $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P),\ P \in \mathbb{P}_{(\lambda_0)}$, эксперимента.

Заметим, что в то время как гипотеза $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\lambda_0)}$ определяет стохастическую модель Э как класс вероятностных пространств $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\lambda_0)}$, и, вообще говоря, такая модель Э не позволяет использовать стандартный формализм теории вероятностей для анализа и интерпретации его исходов, все возможностные пространства $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P),\ P \in \mathbb{P}_{(\lambda_0)}$, определяют, по существу, одну и ту же теоретико-возможностную модель эксперимента Э, поскольку результаты анализа и интерпретации его исходов для всех моделей $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, P),\ P \in \mathbb{P}_{(\lambda_0)}$ одинаковы [2].

Обратимся к примеру $\Omega = \{\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3\}$ и рассмотрим один из шести «треугольников возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, изображенных на рис. 2, например, $\mathbb{P}^{123} = \mathbb{P}$. Выделим в нем семь подмножеств, $\mathbb{P}(\mathrm{ord})$, $\mathrm{ord} \in [0, 1]$, образующих разбиение (26*) класса $\mathbb{P}$ на классы эквивалентных возможностей. Это – три одноточечных подмножества $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1, 0, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1, 1, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1, 1, 1)\},$$

содержащих вершины $\mathbb{P}$, три стороны $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(0.110)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P},\ 1 = p_1 > p_2 > p_3 = 0\},\\
\mathbb{P}_{(0.011)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P},\ 1 = p_1 = p_2 > p_3 > 0\},\\
\mathbb{P}_{(0.101)} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P},\ 1 = p_1 > p_2 = p_3 > 0\},
\end{aligned}$$

и, наконец, множество

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P},\ 1 = p_1 > p_2 > p_3 > 0\},$$

внутренних точек $\mathbb{P}$.

Проверим, что каждое из множеств (распределений) $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ определяет класс эквивалентных возможностей, отличный от остальных. Если $p \triangleq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}$ и, по определению,

$$\gamma p \triangleq (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3)), \qquad \gamma(\cdot) \in \Gamma, \tag{28}$$

то, как легко видеть, все выделенные множества $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ *инвариантны относительно преобразований* (28). Например, если $p \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, то есть $p = (p_1, p_2, p_3)$, где $1 = p_1 > p_2 > p_3 > 0$, то и $\gamma p = (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3)) \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, ибо $1 = \gamma(p_1) > \gamma(p_2) > \gamma(p_3) > 0$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

С другой стороны, поскольку каждой точке $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{P}$ соответствует[15] возможность $P(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, определенная для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ равенством $P(A) = \max\limits_{i:\, \omega_i \in A} p_i$, а преобразованной точке $\gamma p = (\gamma(p_1), \gamma(p_2), \gamma(p_3))$ соответствует эквивалентная $P(\cdot)$ возможность $(\gamma * P)(\cdot)$, $(\gamma * P)(A) = \max\limits_{i:\omega_i \in A} \gamma(p_i) = \gamma(\max\limits_{i:\, \omega_i \in A} p_i) = \gamma(P(A))$, то каждому множеству распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \dots, \mathbb{P}_{(0.111)}$

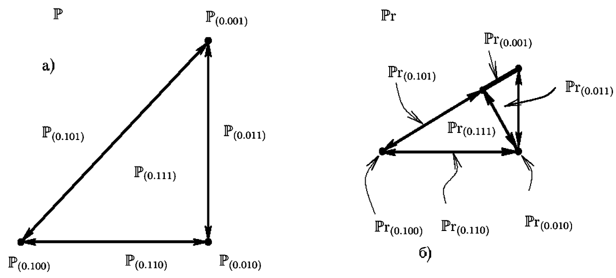

Рис. 6. а) «Треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ и семь классов распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.010)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ (26*) и определяющих семь попарно различных классов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных возможностей. б) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} = \mathbb{P}\mathrm{r}$ и семь его подмножеств-прообразов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение (27*). При этом $\mathbb{P}_{(0.100)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}, \ldots,$ $\mathbb{P}_{(0.111)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, $P \in \mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots,$ $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(P)$, $P \in \mathbb{P}_{(0.111)}$.

отвечает класс эквивалентных возможностей, которые обозначены теми же символами $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$.

Рассмотрим теперь «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$ и выделим в нем подмножества, соответствующие подмножествам $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ «треугольника возможностей». Рассмотрим подмножество

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},$$
$$1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > \mathrm{pr}_2 > \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 > 0\}. \quad (29)$$

Для каждой точки $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ интервалы $\Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1]$, $\Delta_2 = [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1]$ и $\Delta_3 = [\mathrm{pr}_3, 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3] = \{\mathrm{pr}_3\}$ не пересекаются, следовательно, отображение (25) $p_i = g(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, 3$, $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, каждой точке[16] $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$

[15]Напомним, что в этом примере $\mathbb{P}_{(\mathrm{ord})}$ обозначает как класс эквивалентных возможностей, так и множество их распределений в $\mathcal{R}_3$.

[16]Напомним, что в рассматриваемом примере вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ «отожде-

при любой фиксированной функции $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})$ ставит в соответствие точку множества $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$, а, когда $g(\cdot)$ пробегает все $\mathbb{G}(\mathrm{Pr})$, точки $g\mathrm{pr} \triangleq (g(\mathrm{pr}_1),\, g(\mathrm{pr}_2),\, g(\mathrm{pr}_3))$ заполняют все множество $\mathbb{P}_{(0.111)}$ (при любой фиксированной точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$!), то есть

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \bigcup_{g(\cdot)\in\mathbb{G}(\mathrm{Pr})} \{(g(\mathrm{pr}_1),\, g(\mathrm{pr}_2),\, g(\mathrm{pr}_3))\},$$
$$\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}. \quad (30)$$

Равенство (30) определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot)$: $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, ставящее в соответствие каждой точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ множество $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$.

Доопределим $\mathbb{P}(\cdot)$ на всем треугольнике вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Для этого введем кроме подмножества $\mathbb{P}_{(0.111)}$ (29) еще шесть подмножеств $\mathbb{P}\mathrm{r}$ (см. рис. 6, б)) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \{(1,\, 0,\, 0)\}$ – вершина $\mathbb{P}\mathrm{r}$, ей согласно правилу (25) отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1,0,0)\} \subset \mathbb{P}$, функция $g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$ в (25): $g(1) = 1$, $g(0) = 0$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.010)} = \{(1/2,\, 1/2,\, 0)\}$ – вершина $\mathbb{P}\mathrm{r}$, ей отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1,\, 1,\, 0)\} \subset \mathbb{P}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)} = \{(\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ 1/2 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2\}$ – отрезок, соединяющий точки $\mathrm{pr} = (1/2,\, 1/4,\, 1/4)$ и $\mathrm{pr} = (1/3,\, 1/3,\, 1/3)$, содержащий эти точки. По правилу (25) ему соответствует одноточечное подмножество $\mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1,\, 1,\, 1)\} \subset \mathbb{P}$, ибо для всех точек отрезка $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)}$ $g(\mathrm{pr}_1) = g(\mathrm{pr}_2) = g(\mathrm{pr}_3) = 1$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)} = \{(\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ 1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > 1 - \mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 > \mathrm{pr}_3 = 0\}$ – нижняя сторона треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$ без его вершин. Каждой точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.110)} \subset \mathbb{P}$: $\mathbb{P}_{(0.110)} = \{(g(\mathrm{pr}_1),\, g(\mathrm{pr}_2),\, g(\mathrm{pr}_3)),\ g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})\}$, $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$. $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ – подмножество треугольника с вершинами $(1/2,\, 1/2,\, 0)$, $(1/3,\, 1/3,\, 1/3)$, $(1/2,\, 1/4,\, 1/4)$ без этих вершин и без стороны, соединяющей вершины $(1/3,\, 1/3,\, 1/3)$ и $(1/2,\, 1/2,\, 0)$. Каждой точке $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.011)} \subset \mathbb{P}$: $\mathbb{P}_{(0.011)} = \{(g(\mathrm{pr}_1),\, g(\mathrm{pr}_2),\, g(\mathrm{pr}_3)),\ g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})\}$, $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$. Наконец, каждой точке подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)} = \{(\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in$

ствляется» с точкой $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, координаты которой задают распределение Pr.

$\mathbb{P}\mathrm{r},\ 1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > 1 - pr_1 > pr_2 = \mathrm{pr}_3 > 0\}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.101)} \subset \mathbb{P}$, $\mathbb{P}_{(0.101)} = \{(g(\mathrm{pr}_1), g(\mathrm{pr}_2), g(\mathrm{pr}_3)),\ g(\cdot) \in \mathbb{G}(\mathrm{Pr})\}$, $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)}$.

На рис. 7 изображен «треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$, представленный в виде объединения двадцати пяти непересекающихся подмножеств, каждому из которых по правилу (25) сопоставлен класс возможностей, определенный условиями упорядоченности возможностей p_i, $i = 1, 2, 3$, элементарных исходов Э, – всего 25 попарно различных классов эквивалентных возможностей.

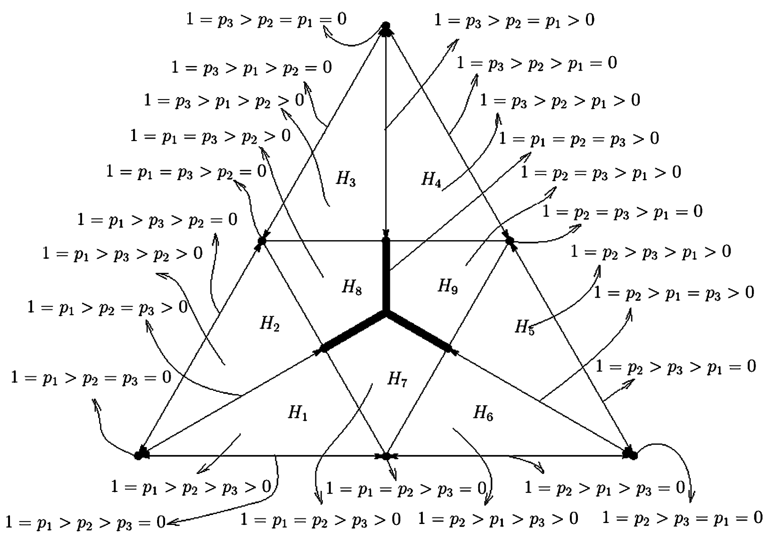

Рис. 7. Двадцать пять подмножеств $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$, образующих разбиение (27^{**}), и соответствующие им условия упорядоченности возможностей p_i, $i = 1, 2, 3$, определяющие различные классы эквивалентности возможностей в разбиении (26^{**}). Среди двадцати пяти подмножеств девять, имеющих «положительную площадь», отмечены символами $H_1, H_2, \ldots, H_9$.

Обратимся теперь к задаче экспериментального определения теоретико-возможностой модели Э на основе наблюдения его исходов. Общую схему решения разъясним на примере определения теоретико-возможностной модели стохастического эксперимента Э, в модели $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{Pr})\}$ которого на сей раз не только вероятности $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\},\ i = 1, 2, 3$, но и их упорядоченность неизвестны. Предположим, что Э может быть воспроизведен n раз при одних и тех же значениях вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$. В таком случае вероятность того, что при n независимых испытаниях исход ω_i реализуется k_i раз, $i = 1, 2, 3$, равна

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(k_1, k_2, k_3|\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}(\mathrm{pr}_1)^{k_1}(\mathrm{pr}_2)^{k_2}(\mathrm{pr}_3)^{k_3}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = n. \quad (31)$$

В равенстве (31) значения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2$ являются неизвестными значениями параметров полиномиального распределения, относительно которых, на основе наблюдения k_1, k_2, k_3, надлежит принять одну из 25 гипотез, представленных на рис. 7. Эта задача проверки статистических гипотез эквивалентна задаче выбора одной из 25 теоретико-возможностных моделей Э на основе наблюдения значений k_1, k_2, k_3, или, что то же самое, – на основе наблюдения частот $f_i = k_i/n$ исходов ω_i, $i = 1, 2, 3$.

При априори произвольных значениях $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$ простейшим решением задачи определения распределения возможностей (и соответственно – теоретико-возможностной модели Э) состоит в том, что на основе наблюдаемого вектора частот $f \triangleq (f_1, f_2, f_3)$ выбирается упорядоченность возможностей p_1, p_2, p_3, определяемая тем подмножеством $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$, в котором содержится[17] f, см. рис. 7.

Проиллюстрируем решение рассматриваемой задачи в легко обозримой байесовской постановке. Допустим, что в (31) вектор вероятностей $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)$ является значением случайного вектора $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, имеющего, например, распределение Дирихле с плотностью[18]

[17] Заметим, что $f = (f_1, f_2, f_3)$ является оценкой максимального правдоподобия $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)$.

[18] Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

$$d(\mathrm{pr}|s) = \frac{\Gamma(s_1+s_2+s_3)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_3)} \prod_{i=1}^{3} (\mathrm{pr}_i)^{s_i-1} \cdot \delta(\mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\mathrm{pr}_3-1),$$
$$\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3), \quad \mathrm{pr}_i > 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3,$$

локализованной на плоскости $\mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\mathrm{pr}_3 = 1$, $s = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ – параметры распределения Дирихле, $s_i > 0, i = 1,\, 2,\, 3$. В таком случае в (31) $q(k|\mathrm{pr}) \triangleq \mathrm{Pr}^{(n)}(k_1,\, k_2,\, k_3|\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3)$ – условная вероятность значения $k = (k_1,\, k_2,\, k_3)$ случайного вектора $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ при условии $\pi = \mathrm{pr}$ и, как нетрудно проверить, $d(\mathrm{pr}|s+k)$ – условная плотность распределения π при условии, что исход ω_i в n испытаниях наблюдается k_i раз, $i = 1,\, 2,\, 3$, [4]. При этом отличными от нуля будут условные вероятности не всех 25, а лишь выделенных девяти гипотез $H_1,\, H_2,\, \ldots\,,\, H_9$:

$$\mathrm{Pr}(\pi \in H_j|k) = \int\limits_{\mathrm{pr}\in H_j} d(\mathrm{pr}|s+k) d\mathrm{pr}_1 d\mathrm{pr}_2 d\mathrm{pr}_3, \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, 9.$$

Байесовское решение, минимизирующее вероятность ошибки, предписывает при наблюдении $k = (k_1,\, k_2,\, k_3)$ принять гипотезу $H_{j(k)}$, где $j(k) = \arg\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 9} \mathrm{Pr}(\pi \in H_i|k)$, и соответствующий класс эквивалентных возможностных пространств считать теоретико-возможностной моделью Э. Средняя вероятность ошибки байесовского решения, равная $1 - \mathbf{E}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 9} \mathrm{Pr}(\pi \in H_i|\varkappa)$, есть средняя вероятность ошибочного определения теоретико-возможностной модели Э. Здесь $\mathbf{E}$–символ математического ожидания по распределению π и $\varkappa$, [6].

В заключение мне приятно выразить признательность моим коллегам Г. Животникову, О. Жучко и О. Мондрус за обсуждение содержания статьи и помощь при ее оформлении.

Список литературы

[1] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

[2] Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[3] Дюбуа А., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.

[4] Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.

[5] Пытьев Ю.П., Животников Г.С. Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ // Интеллектуальные системы. 2001. Т. 6. Вып. 1–4. С. 63–90.

[6] Боровков А.Л. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.