Мощность полиномиально задаваемых булевых функций при малых n

Д.В. Алексеев, М.В. Носов

В работе приведены значения мощностей подмножеств булевых функций, которые могут быть заданы многочленами с действительными коэффициентами. Оценки даны при $n = 0, \dots, 6$.

Приведем известное определение ([1]).

Определение. Булевская функция $F(t_1, \dots, t_n)$ называется M_k-пороговой, если существует такой многочлен $f(t_1, \dots, t_n)$ с действительными коэффициентами степени k , что

$$F(t_1, \dots, t_n) = 1 \Leftrightarrow f(t_1, \dots, t_n) \geqslant 0,$$
$$F(t_1, \dots, t_n) = 0 \Leftrightarrow f(t_1, \dots, t_n) < 0.$$

Введем новое определение, учитывающее ограничение на k.

Определение. Булевская функция $F(t_1, \dots, t_n)$ называется строго M_k-пороговой, если она является M_k-пороговой, но не M_{k-1}-пороговой.

Имеет место следующая таблица чисел строго M_k-пороговых функций для малых n.

n\k	0	1	2	3	4	5	6
0	2	-	-	-	-	-	-
1	2	2	-	-	-	-	-
2	2	12	2	-	-	-	-
3	2	102	150	2	-	-	-
4	2	1880	58135	5517	2	-	-
5	2	94570	4049555686		244317046	2	-
6	2	15028132					2

В таблице прочерки поставлены в тех клетках, в которых число строго M_k-пороговых функций равно 0; значения строго M_2, M_3, M_4, M_5-пороговых функций для $n = 6$ не определено; в пятой строке в соответствующих столбцах приведена сумма строго M_2 и M_3-пороговых функций; значения нулевого и первого столбца – известный результат[2]; диагональ таблицы – известный факт (см.например [1]) о линейных функциях алгебры логики, зависящих существенно от всех переменных.

Расчеты производились в рациональных числах с использованием симплекс-метода для спрямляющего пространства соответствующей размерности; использование алгоритма Розенблатта с учетом теоремы Новикова для вершин единичного куба [3] позволяет подтвердить только нулевой и первый столбцы, но верхние оценки на число исправлений при $n = 4, k = 2$ слишком большие для практической реализации.

Числа, стоящие под главной диагональю есть разность числа булевых функций для конкретного n и всех остальных чисел строки. Расчеты производились последовательно по n на основании факта ([1]): если булевская функция $F(0, t_2, \ldots, t_n)$ является M_k-пороговой, а $F(1, t_2, \ldots, t_n)$ M_{k-1}-пороговой, то $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является M_k-пороговой.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №99-01-00317.

Список литературы

[1] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. М.: изд-во МГУ, 1996.

[2] Яджина С., Ибарани Т. Нижняя оценка числа пороговых функций // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1969. Вып. 6. С. 72–81.

[3] Носов М.В. Оценка отклонения разделяющей плоскости пороговой функции от вершин единичного куба // Интеллектуальные системы. Т. 4. Вып. 1–2. 1999. С. 299–304.