О длине простого условного установочного эксперимента

А.Е. Кирнасов

В статье приводятся оценки длины простого условного установочного эксперимента (далее п.у.у.э.) при варьировании количества входных символов и состояний автомата. Показывается, что нижняя оценка из известной теоремы Мура-Карацубы [3, 4] не сохраняется, если число входных символов на 9 меньше, чем число состояний автомата, тогда как при равенстве указанных чисел эта оценка имеет место. Кроме этого показано, что квадратичность нижней оценки длины п.у.у.э. сохраняется при любом входном алфавите.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\phi,\psi)$ – автомат, где A – входной алфавит, B выходной алфавит, Q – множество состояний, ϕ – функция переходов, ψ – функция выходов. Деревом простого условного установочного эксперимента для автомата $\mathfrak{A}$ называется произвольное ориентированное от корня дерево T такое, что для всякой его вершины v определены подмножество $S_v \subset Q$ и слово α_v в алфавите A, а для каждого ребра $\overrightarrow{vw}$ определено слово $\beta_{\overrightarrow{vw}}$ в алфавите B так, что выполнены следующие условия:

1) $S_{v_0} = Q$, где v_0 – корень дерева T;

2) Если имется ребро $\overrightarrow{vw}$, то $S_w = \{q \in Q \mid \exists q\prime \in S_v : \phi(q\prime, \alpha_v) = q$ и $\psi(q\prime, \alpha_v) = \beta_{\overrightarrow{vw}}\}$.

При этом, кроме того, листьям дерева должны быть сопоставлены одноэлементные множества. Каждой ветви дерева припишем слово, составленное из слов, соответствующих ребрам этой ветви.

Сложностью простого условного установочного эксперимента, соответствующей дереву T, называется максимальная из длин слов, приписанных ветвям, ведущим от корня к листу. Если для автомата $\mathfrak{A}$ существует хотя бы одно дерево с описанными свойствами, то наименьшая из длин, соответствующих всевозможным таким деревьям, называется длиной простого условного установочного эксперимента для автомата $\mathfrak{A}$. Мы ее обозначим $L(\mathfrak{A})$. Далее мы рассматриваем только те автоматы, для которых величина $L(\mathfrak{A})$ определена. Более подробное описание условного экспримента, а также его свойств можно найти в [1]. Введем класс $K(m,n)$ – совокупность автоматов с m входными символами и n состояниями. Обозначим $l(m,n) = \max\limits_{\mathfrak{A}\in K(m,n)} L(\mathfrak{A})$. Согласно теореме Мура-Карацубы [3, 4] $l(n,n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. В статье доказываются следующие результаты:

Теорема 1. $l(n-9,n) < \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Теорема 2. $l(2,n) \geqslant \dfrac{n^2}{4}$.

2. Доказательство теоремы 1

Мы проведем доказательство следующим образом. Рассмотрим некоторый автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \phi, \psi)$, для которого $|A| = m$, $|Q| = n$ и $L(\mathfrak{A}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Далее во всех леммах речь будет идти именно об этом автомате, точнее об автомате $\mathfrak{A}_1$, который будет определен в следующей лемме 1. Теорема 1 будет доказана, если мы установим, что $m \geqslant n-8$.

Лемма 1. *Найдется автомат* $\mathfrak{A}_1$, *с* $A = \{1,\ldots,m\}$, $Q = \{1,\ldots,n\}$, $B = \{0,1\}$ *и* $L(\mathfrak{A}_1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, *для которого выполняются следующие соотношения:*

$$
\begin{aligned}
&\psi(i,j) = 0, \text{если } i \neq 1, && \text{(i)}\\
&\psi(1,j) = 0, \text{если } j \neq 1, && \text{(ii)}\\
&\psi(1,1) = 0, && \text{(iii)}\\
&\text{не существует } i \neq 1,\ k : \phi(i,k) = 1, && \text{(iv)}\\
&\forall i,j,k\ i \neq j,\ i \neq 1,\ j \neq 1\ \phi(i,k) \neq \phi(j,k), && \text{(v)}\\
&\forall k \neq 1\, \forall i \neq 1 \text{ если } \exists j : \phi(j,k) = 1, \text{ то } \phi(1,k) \neq \phi(i,k), && \text{(vi)}\\
&\forall i \neq 1, i \neq n\ \forall k\ \phi(i,k) \geqslant i-1, && \text{(vii)}\\
&\forall k\ \phi(n,k) \geqslant n-2. && \text{(viii)}
\end{aligned}
$$

Доказательство. Остановимся подробно на пунктах (v) и (vii). Остальные доказательства аналогичны. В этой и других леммах мы будем пользоваться следующим обобщением теоремы Мура-Карацубы [2]:

Пусть известно, что начальное состояние автомата находится в некотором подмножестве $S \subseteq Q$, причем $|S| = r \leqslant n$. Тогда, если существует простой условный эксперимент, решающий задачу определения заключительного состояния автомата, то найдется п.у.у.э. длины не более $\dfrac{n(n-1)}{2} - (1 + \ldots (n-r))$.

Пусть уже построен автомат $\mathfrak{A}_0$ с $A = \{1,\ldots,m\}$, $Q = \{1,\ldots,n\}$, $B = \{0,1\}$ и $L(\mathfrak{A}_0) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, для которого выполняются соотношения (i)–(iv). Покажем, что для него также выполняется (v). Предположим, что $\exists i \neq 1$, $j \neq 1$, k, такие, что $\phi(i,k) = \phi(j,k)$. Начнем эксперимент, подав на вход символы 1 и k. Нетрудно понять, что по выходу автомата мы сможем либо закончить эксперимент, либо заключить, что автомат перешел в некоторое состояние из множества S, $|S| \leqslant n-2$, и закончить эксперимент не более, чем за $\dfrac{n(n-1)}{2} - 3$ шагов. Общая длина эксперимента будет не более, чем $\dfrac{n(n-1)}{2} - 1$. Противоречие.

Покажем теперь как перейти от автомата $\mathfrak{A}_0$, для которого выполняются соотношения (i)–(vi), к автомату $\mathfrak{A}_1$, для которого верно также и (vii). Обозначим $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$. Будем считать, что q_1 – это как раз то состояние, в котором реализуется выход 1 при подаче 1. Разобьем Q на классы K_1, K_2 и т.д., относя к классу K_i те состояния, для которых минимальное слово α, переводящее их в q_1, имеет длину $i-1$. Такое слово для состояния q_j обозначим α_j. Очевидно, что $K_1 = \{q_1\}$ и слово 1 переводит $Q\backslash K_0$ в себя (взаимно однозначно). Пусть уже доказано, что классы $K_1, K_2, \dots K_i$ $i \leqslant n-3$ – одноэлементны и слово $1\alpha_1 1\alpha_2 1\dots\alpha_i 1$ переводит $Q\backslash(K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_i)$ в себя (взаимно однозначно). Считаем, что $K_i=\{q_i\}$ $i\leqslant n-3$. Рассмотрим класс K_{i+1}. Считаем, что $q_{i+1}\in K_{i+1}$. Пусть еще найдется $q_j \in K_{i+1}$ $j>i+1$. Начнем эксперимент, подав на вход автомата слово $1\alpha_1 1\alpha_2 1\dots\alpha_i 1$. Нетрудно видеть, что либо эксперимент завершится, либо автомат перейдет в состояние из $Q\backslash(K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_i)$. В последнем случае продолжаем словом $\alpha_{i+1}1$. Опять либо эксперимент завершится, либо автомат перейдет в состояние из $Q\backslash(K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_i\cup\{q_{i+1}\})$. Продолжаем эксперимент словом α_j и закончим его согласно приведенному обобщению теормы Мура-Карацубы. Легко подсчитать, что общая длина экспермента не превосходит $\frac{n(n-1)}{2}-1$. Противоречие. Итак K_{i+1} – тоже одноэлементный класс. Легко также понять, что $Q\backslash(K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_{i+1})$ взаимно однозначно преобразуется в себя при подаче слова $1\alpha_1 1\alpha_2 1\dots\alpha_i 1\alpha_{i+1}$. Осталось переобозначить q_i в i (переходим от $\mathfrak{A}_0$ к $\mathfrak{A}_1$) и заметить, что состояние из K_i может перейти в состояние из K_j только при условии $j\geqslant i-1$.

Лемма доказана.

Обозначим $S_k=\{n,\dots,k+1\}$. Также обозначим $l(\alpha)$ – длина слова α. Пусть даны множество S и слово ω. Будем говорить, что слово ω отделяет от S k состояний, оставляя l состояний, если в процессе подачи слова ω k состояний из S могут быть идентифицированы, в то время как остальные состояния перейдут в некоторые l состояний. Как обычно понимаем под $\overline{\phi}$ продолжение ϕ на слова из A^*. Мы также будем использовать это обозначение для такого отображения $\overline{\phi}: 2^Q\times A^*\to 2^Q$. $\overline{\phi}(S,\alpha)=\{q\mid \exists q'\in S\ \overline{\phi}(q',\alpha)=q\}$.

С помощью рассужений, аналогичных тем, котоые были использованы при доказательстве леммы 1, устанавливается справедливость следующей леммы 2.

Лемма 2. *а) Пусть $n-k\geqslant 2$ и $\alpha=a_k\dots a_2$ – такое слово, что $\overline{\phi}(k,\alpha)=1$. Обозначим $\omega=\alpha 1$. Тогда $\overline{\phi}(S_k,\omega)=S_k$.*

б) Рассмотрим множество S_i и слово ω : $\overline{\phi}(i,\omega)=1$. Пусть $l(\omega)=i+k-1$, $\overline{\omega}=\omega 1$. Тогда $\forall j\in S_i$ $\overline{\phi}(j,\overline{\omega})>i-k$.
в) Рассмотрим множество S_i. Если слово ω отделяет от S_i k состояний, оставляя по крайней мере 2 состояния, то $l(\omega)\geqslant(i+1)+\dots+(i+k)$.

Лемма 2 будет часто применяться далее, и иногда мы будем опускать ссылку на нее, подразумевая, что из контекста будет ясно, когда и как применяется эта лемма.

Лемма 3. *Пусть $i\neq j$ – 2 входных символа, а k – некоторое состояние такое, что $\exists l<k: \phi(k,i)=k-1,\dots,\phi(l+1,i)=l, \phi(l,i)=k$. Пусть также $\phi(k+1,j)=k$. Тогда $\phi(k,j)\neq k-1$.*

Доказательство. Пусть $\alpha=a_k\dots a_2$ – такое слово, что $\overline{\phi}(k,\alpha)=1$. Положим $\beta=ia_{k-1}\dots a_2$, $\gamma=ja_{k-1}\dots a_2$. Ясно, что $\overline{\phi}(k,\beta)=1$ и $\phi(k,\gamma)=1$. Далее, пусть $\overline{\beta}=\beta 1$ и $\overline{\gamma}=\gamma 1$, $Q_1=\overline{\phi}(S_k,\overline{\beta})$, $Q_2=\phi(S_k,\overline{\gamma})$. В силу леммы 2 $Q_1=Q_2=S_k$. Пусть $Q_1'=\overline{\phi}(S_k,i)$, $Q_2'=\phi(S_k,j)$. Так как $k\in Q_2'$, но с другой стороны $k\notin Q_1'$, то $Q_1'\neq Q_2'$. Очевидно, что $\overline{\phi}(a_{k-1}\dots a_2 1, Q_1')=Q_1$ и $\overline{\phi}(a_{k-1}\dots a_2 1,Q_2')=Q_2$. Отсюда легко получить, что так как $Q_1'\neq Q_2'$, то и $Q_1\neq Q_2$, Полученное противоречие с тем, что $Q_1=Q_2=S_k$, заканчивает доказательство леммы 3.

Будем писать $S=R_\alpha$, если $S=\overline{\phi}(R,\alpha)$.

Лемма 4. *Пусть k и l таковы, что для некоторого входного символа i $\phi(k,i)=k-1,\dots,\phi(l,i)=k$. Пусть $\alpha=a_l\dots a_2$ – такое слово, что $\overline{\phi}(l,\alpha)=1$. Если $l=1$, то полагаем $\alpha=\Lambda$ – пустое слово. Рассмотрим слово $\overline{\alpha}=\alpha 1$. Тогда $\forall j\in\{l+1,\dots,k\}$ верно следующее: $\overline{\phi}(j,\overline{\alpha})=k+l+1-j$.*

Доказательство. Проведем индукцию по j.
1. $j=k$. Как мы знаем $S_l=S_{l\overline{\alpha}}$, $S_{l+1}=S_{l+1\,i\overline{\alpha}}$. Положим $S_l'=S_{li}$. Очевидно, $S_l'=S_{l-1}\backslash\{k\}$. Положим также $S_l''=S_l'\backslash\{l\}$. Тогда $S_l''=S_l\backslash\{k\}$. Имеем $S''_{l\,\overline{\alpha}}=S_l\backslash\{k_{\overline{\alpha}}\}$. С другой стороны, очевидно, $S''_{l\,\overline{\alpha}}=S_{l+1\,i\overline{\alpha}}=S_{l+1}=S_l\backslash\{l+1\}$. Значит $k_{\overline{\alpha}}=l+1$ или в обычных обозначениях $\overline{\phi}(l,\overline{\alpha})=l+1=k+l+1-k$. Что и требовалось.

2. Пусть утверждение доказано для всех $j \geqslant j_0$, причем $j_0 \geqslant l+1$. Проверим его для $j = j_0 - 1$. Положим $p = k+l+1-j_0+1$, $\delta = \underbrace{ii\ldots i}_{p-l \text{ раз}}$. Имеем: $S_p = S_{p\delta\overline{\alpha}}$. Пусть $S'_p = S_{p\delta}$. Нетрудно понять, что $S'_p = S_l \backslash \{k, \ldots j_0, j_0-1\}$. Далее $S_p = S_{p\overline{\alpha}} = S_{l\overline{\alpha}} \backslash \{k_{\overline{\alpha}}, \ldots j_{0\overline{\alpha}}, (j_0-1)_{\overline{\alpha}}\} = S_l \backslash \{k_{\overline{\alpha}}, \ldots j_{0\overline{\alpha}}, (j_0-1)_{\overline{\alpha}}\}$. Но с другой стороны $S_p = S_l \backslash \{l+1, \ldots p\}$. Кроме того в силу индукции $k_{\overline{\alpha}} = l+1, \ldots j_{0\overline{\alpha}} = p-1$. Значит $(j_0-1)_{\overline{\alpha}} = p = k+l+1-(j_0-1)$. Что и требовалось доказать.

Как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 5. *В условиях леммы 4, если обозначить $S = \{k, \ldots (l+1)\}$, то $S = S_{\overline{\alpha}}$.*

Под циклом мы далее будем понимать произвольный отрезок $[m\ldots n]$ с $n - m > 1$ такой, что $\exists i : \phi(n,i) = n-1, \phi(n-1,i) = n-2, \ldots \phi(m,i) = n$. Под частичным циклом будем понимать произвольный отрезок $[m'\ldots n']$ такой, что $\exists l' > n' : [m'\ldots l']$ – цикл.

Из леммы 4 легко вывести, что не существует цикла $[1\ldots n]$ с $n > 3$. Назовем пучком, связанным с состоянием i, следующее множество $P(i) = \{a \,|\, a \in A\ \phi(i,a) = i-1\}$.

Лемма 6. *Пусть k таково, что на отрезке $[1\ldots k]$ нет как полных, так и частичных циклов, кроме быть может цикла $[1,2,3]$. Пусть далее для некоторых $r, j \in [2\ldots k]$ существует символ a такой, что $\phi(r,a) = r-1$ и $\phi(j,a) = j-1$, $j < r$, $j > 2$. Пусть также $i = \min\{p \,|\, \exists a \in P(p) \cap P(j)\}$. Положим $\alpha = a_{i-1}\ldots a_{j+1}$ – такое слово, что $\forall t\ j+1 \leqslant t \leqslant i-1\ a_t \in P(t)$. Пусть $S = \overline{\phi}(S_{i-1}, \alpha)$, $(i-1) \in S$, $i \notin S$, и $\forall j' < i-1\ j' \notin S$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

1) Существует слово β $l(\beta) \leqslant l(\alpha)+1$ такое, что, обозначив $S' = \overline{\phi}(S_{i-1}, \beta)$, будем иметь $\exists j'' < i-1$, $j'' \in S'$, $\overline{\phi}((i-1), \beta) = j$.

2) Существует слово γ $l(\gamma) \leqslant l(\alpha)$ такое, что, обозначив $S' = \overline{\phi}(S_{i-1}, \gamma)$, будем иметь $i \in S'$, $\overline{\phi}((i-1), \gamma) = j$.

Доказательство. Заметим,что $P(i-1) \cap P(j) = \varnothing$. Возьмем любое $a \in P(i-1)$. Имеем только две возможности:

1) $\phi(j,a) = j$,

2) $\phi(j,a) = j+1$.

В первом случае, положив $\beta = \alpha a$, заключаем, что $a \in P(j+1)$. Остается случай $P(i-1) \subset P(j+1)$. Рассмотрим символ a_{j+1}. Имеем две возможности:

1) $a_{j+1} \in P(i-1)$,

2) $a_{j+1} \notin P(i-1)$.

В случае 2) положим $\alpha' = a_{i-1}\ldots a_{j+2}$ и $S' = \overline{\phi}(S_{i-1}, \alpha')$. Нетрудно понять, что возможны лишь две альтернативы:

1′) $S' = S_{i-1}$,

2′) $(i-1) \in S'$.

В случае 1′) полагаем $\gamma = \alpha' a$, где $a \in P(i-1)$. Во втором случае положим $\beta = \alpha a$. Остается случай 1). Опять положим $\alpha' = a_{i-1}\ldots a_{j+1}$. Тогда, если $S' = \overline{\phi}(S_{i-1}, \alpha')$, то $(i-2) \in S'$ и $j+1 = \overline{\phi}(i-1, \alpha')$. Возьмем $a \in P(i-2)$. Воможны три случая:

1) $\phi(j+1,a) = j$,

2) $\phi(j+1,a) = j+1$,

3) $\phi(j+1,a) = j+2$.

В случае 1) полагаем $\beta = \alpha'$. В случае 2) полагаем $\beta = \alpha' ab$, где $b \in P(j+1)$.

Если для любого $a \in P(i-2)$ имеем третий случай, то $P(i-2) \subset P(j+2)$. Рассмотрим a_{j+2}. Пусть $a_{j+2} \notin P(i-2)$. Положим $\alpha'' = a_{i-1}\ldots a_{j+3}$, $S'' = \overline{\phi}(S_{i-1}, \alpha'')$. Тогда имеем подслучаи:

1′) $(i-1) \in S''$,

2′) $(i-2) \in S''$.

В случае 1′) $a_{j+2} \in P(i-1)$. Но $P(i-1) \subset P(j+1)$, то есть $a_{j+2} \notin P(j+1)$, в то же время $a_{j+2} \in P(j+2)$. Значит, некоторый цикл проходит выше точки 2. Противоречие.

В случае 2′) возьмем $a \in P(i-2)$ и $b \in P(j+1)$. Слово $\beta = \alpha'' ab$ искомое.

Итак $a_{j+2} \in Pi-2$. В этом случае $(i-3) \in S''$ и $\overline{\phi}(i-1, \alpha'') = j+2$. Эти рассуждения продолжаем дальше. Очевидно, в некоторый момент мы либо придем к утверждению леммы, либо получим некоторое слово $\alpha_0 = \alpha^{\overbrace{\prime\prime\ldots\prime}^{t \text{ раз}}}$ такое, что, если обозначить $S_0 = \overline{\phi}(S_{i-1}, \alpha_0)$, будем иметь одну из возможностей:

1) $\phi(i-1,\alpha_0)+1 \in S_0$,
2) $\phi(i-1,\alpha_0)+2 \in S_0$.
Оба этих случая входят в противоречие с условием леммы. Тем самым лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть k таково, что на отрезке $[1\dots k]$ нет как полных, так и частичных циклов, кроме быть может цикла $[1,2,3]$. Пусть далее для некоторых $i,j \in [2\dots k]$ существует символ a такой, что $\phi(i,a)=i-1$ и $\phi(j,a)=j-1$, $j<i$. Тогда $j=2$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $L=\{(i,j)\mid k\geqslant i > j \geqslant 2,\ P(i)\cap P(j)\neq\varnothing\}$. Пусть $j_0=\min\{j\mid \exists i:(i,j)\in L\}$. Сначала покажем, что вариант $j_0>2$ невозможен. Положим $i_0=\min\{i\mid (i,j_0)\in L\}$. Рассмотрим $\alpha=a_{i_0-1}\dots a_{j_0+1}$, где $\forall t\ j_0+1\leqslant t\leqslant i_0-1\ \ a_t\in P(t)$.
Имеем такие случаи
1) $i_0\in\overline{\phi}(S_{i_0-1},\alpha)$,
2) $(i_0-1)\in\overline{\phi}(S_{i_0-1},\alpha)$, $\quad(*)$
3) $\exists\, j'<i_0-1\ :\ j'\in\overline{\phi}(S_{i_0-1},\alpha)$.
Рассмотрим случай 3). Продолжим слово α таким образом: $\alpha'=\alpha a_{j_0}\dots a_2 1$. Легко понять, что $\overline{\phi}(S_{i_0-1},\alpha')\neq S_{i_0-1}$, что противоречит лемме 2.

В случае 2) применим лемму 6. Согласно этому утверждению можно найти или слово γ с условием: $i_0\in\overline{\phi}(S_{i_0-1},\gamma)$ с $l(\gamma)\leqslant l(\alpha)$ или слово β с условием: $\exists j'<(i_0-1)\ \ j'\in\overline{\phi}(S_{i_0-1},\beta)$ и $\overline{\phi}(i_0-1,\beta)=j_0$ и $l(\beta)<l(\alpha)+1$. В первом случае имеем дело со случаем 1) из $(*)$. Его мы рассмотрим далее. Рассмотрим второй случай: здесь два подслучая.
1′) $1\in P(j'+1)$,
2′) $1\notin P(j'+1)$.
В случае 2′) продолжаем α так: $\alpha'=\alpha a_{j_0}\dots a_2 1$. Имеем: $\exists j'<i_0-1$ и $j'\in\overline{\phi}(\alpha',S_{i_0-1})$, причем $l(\alpha')<i_0$, что противоречит лемме 2.

В случае 1′) рассмотрим любое $a\in P(j')$ и продолжаем α так: $\alpha'=\alpha a_{j_0} a a_{j_0-1}\dots a_2 1$. Очевидно $\overline{\phi}(j',\alpha')=j'-1<i_0-2$. Так как $l(\alpha')\leqslant i_0+1$, то вновь приходим к противоречию с леммой 2.

Перейдем к случаю 1). Пусть a – любой символ из $P(i)\cap P(j)$.
Опять имеем два варианта:

1′) $1\in P(i)$,
2′) $1\notin P(i)$.
В случае 2′) продолжаем α так: $\alpha'=\alpha a a_{j_0-1}\dots a_2 1$. Как и ранее получим противоречие с леммой 2. В случае 1′) полагаем $\alpha'=\alpha a b a_{j_0-1}\dots a_2 1$, где $b\in P(i_0-1)$. Вновь имеем противоречие.

Итак $j_0=2$. Перейдем к установлению противоречия и в этом случае.

Рассуждения будут следующими. Будем приводить некое S_i, а также $\overline{\omega}=\omega 1$ с $l(\overline{\omega})=i+k$ и тем условием, что $\exists\, j\in\overline{\phi}(S_i,\overline{\omega})$, $j\leqslant i-k$. Слово ω будет зависеть не только от i, но еще и от особенностей функции ϕ. Проверку указанных свойств будем опускать.

Вновь обозначим $i_0=\min\{i\mid (i,j_0)\in L\}$. Сначала убедимся в противоречивости предположения о том, что $\exists\, i,\ j\ k\geqslant i>j\geqslant 2$: $P(i)\cap P(j)\neq\varnothing$.

Пусть $i_0>j_0+1$. Тогда то, что на отрезке $[j_0+1\dots i_0-1]$ такой пары (i,j) не существует, доказывается также как и в случае $j_0>2$. Покажем теперь, что $\forall\, t\in[j_0+1\dots i_0-1]\ \ P(t)\cap P(i_0)=\varnothing$. Положим $t_0=\min\{t\in[j_0+1\dots i_0-1]\ P(t)\cap P(i_0)\neq\varnothing\}$. Рассмотрим $\alpha=a_{i_0-1}\dots a_{t_0+1}$. Возможны такие варианты:
1) $i_0\in\overline{\phi}(S_{i_0},\alpha)$,
2) $i_0-1\in\overline{\phi}(S_{i_0},\alpha)$,
3) $\exists\, j'<i_0-1\ :\ j'\in\overline{\phi}(S_{i_0},\alpha)$.
В случае 3) $\alpha'=\alpha a_{t_0}\dots a_2 1$. α' и i_0 – искомая пара.

Случай 1) порождает такие подслучаи:
1′) $1\notin P(i_0-1)$.
Берем любое $a\in P(i_0-1)$. Слово α продолжается так: $\alpha'=\alpha a_{t_0} a a t_0-1\dots a_2 1$. Здесь $a_{t_0}\in P(t_0)\cap P(i_0)$. Пара i_0, α' – искомая.
2′) $1\in P(i_0-1)$ $i_0-2>t_0$.
Берем $b\in P(i_0-2)$. Тогда $\alpha'=\alpha a_{t_0} 1 b a_{t_0-1}\dots a_2 1$. Здесь $a_{t_0}\in P(t_0)\cap P(i_0)$. Пара i_0, α' – искомая.
3′) $1\in P(i_0-1)$ $i_0-2=t_0$, $t_0>3$.
Берем $b\in P(t_0-2)$. Тогда $\alpha'=\alpha a_{t_0} 1 b a_{t_0} a_{t_0-1}\dots a_2 1$. Здесь $a_{t_0}\in P(t_0)\cap P(i_0)$. Пара i_0, α' – искомая.
4′) $1\in P(i_0-1)$ $i_0-2=t_0$, $t_0=3$.
$\alpha'=\alpha a_{i_0} a_{t_0} a_{i_0} 1$. Здесь $a_{t_0}\in P(t_0)\cap P(i_0)$, $a_{i_0}\in P(i_0)\cap P(2)$. Пара i_0, α' – искомая.

Осталось разобрать случай 2). Очевидно,что тогда $i_0 - 2 > t_0$. Согласно лемме 6 или существует слово γ, которое сводит случай 2) к случаю 1) или слово β такое, что $l(\beta) \leqslant l(\alpha) + 1$ и $\exists\, j' < i_0 - 1$: $j' \in \overline{\phi}(S_{i_0-1}, \beta),\ t_0 = \overline{\phi}(i_0 - 1, \beta 1)$. Имеем два варианта:
1$'$) $1 \in P(j'+1)$,
2$'$) $1 \notin P(j'+1)$.
В случае 2$'$) полагаем $\alpha' = \beta a_{t_0} a_{t_0-1} \ldots a_2 1$. α', i_0 – искомая пара.
В случае 1$'$) полагаем $\alpha' = \beta a_{t_0} b a_{t_0-1} \ldots a_2 1$, где $b \in P(j')$. α', i_0 – искомая пара. Итак $\forall t \in [j_0 + 1 \ldots i_0 - 1] :\ P(t) \cap P(i_0) = \varnothing$.

Теперь будем доказывать следующее: $\forall i \in [i_0 + 1 \ldots k]\ \forall j \in [j_0 + 1 \ldots i_0 - 1]\ P(i)\ P(j) = \varnothing$. Предположив обратное, найдем пару (i'_0, j'_0) с условием, что $j'_0 = \min\{j \mid \exists i \in [i_0 + 1 \ldots k]\ P(i) \cap P(j'_0) \neq \varnothing$. Положим также $i'_0 = \min\{i \mid i \in [i_0 + 1 \ldots k]\ P(i) \cap P(j_0) \neq \varnothing$. В разборе этого варианта полагаем в качестве искомого S_i множество $S_{i'_0-1}$. Имеем такие варианты:
1) $i'_0 \in \overline{\phi}(\alpha, S_{i'_0-1})$,
2) $(i'_0 - 1) \in \overline{\phi}(\alpha, S_{i'_0-1})$,
3) $\exists j' < i'_0 - 1$ и $j' \in \overline{\phi}(\alpha, S_{i'_0-1})$,
где $\alpha = a_{i'_0-1} \ldots a_{j'_0+1}$ – такое слово, что $\forall t\ j'_0 + 1 \leqslant t \leqslant i'_0 - 1\ a_t \in P(t)$.
Рассмотрим случай 1). Положим $\alpha' = \alpha a_{j'_0} \ldots a_3 a_{i'_0-1} \ldots a_{i_0-1} a i_0 1$, где a_{i_0} берется из $P(i_0) \cap P(2)$, $a_{j'_0} \in P(j'_0) \cap P(i'_0)$.

Рассмотрим случай 3). Нетрудно понять, что $j' \geqslant i_0$. Тогда можно положить $\alpha' = \alpha a_{j'_0} \ldots a_3 a_{j'-1} a_{i_0} 1$, где a_{i_0} берется из $P(i_0) \cap P(2)$.
Разберем случай 2). Имеется две возможности:
1$'$) $i'_0 - 1 > i_0$,
2$'$) $i'_0 - 1 = i_0$.
В случае 1$'$) применяем лемму 6 и находим или слово γ, которое сводит случай 2) к случаю 1), или слово β со свойством: $\exists j' < i'_0 - 1$: $j \in \overline{\phi}(S_{i'_0-1}, \beta)$ и $\overline{\phi}(i'_0 - 1, \beta) = j'_0 + 1$.
Возможны случаи:
1$''$) $j' > i_0$,
2$''$) $j' = i_0 - 1$,
3$''$) $j' < i_0 - 1$.
В случае 1$''$) проходят рассуждения из 1) и 3). В случае 2$''$) имеем $\alpha' = \beta a_{j'_0+1} a i_0 - 1 a j'_0 \ldots a_2 1$. В случае 1$''$) имеем $\alpha' = \beta a_{j'_0+1} \ldots a_2 1$.

Перейдем к 1$'$). Здесь имеем такой анализ:
1$''$) $1 \notin P(i_0 - 1) \ \Rightarrow\ \alpha' = \beta a_{i_0} a_{i_0+1} a_{i_0-1} a_{j'_0} \ldots a_2 1$. Здесь $a_{i_0} \in P(i_0) \cap P(j_0),\ a_{i_0+1} \in P(i'_0) \cap P(j'_0), a_{i_0-1} \in P(i_0 - 1)$.
2$''$) $1 \in P(i_0 - 1)$ и $i_0 - 1 > j'_0 \ \Rightarrow\ \alpha' = \beta a_{i_0} a_{i_0+1} a_{i_0} 1 a_{i_0-2} a_{j'_0} \ldots a_2 1$. Здесь $a_{i_0} \in P(i_0),\ a_{i_0+1} \in P(i'_0) \cap P(j'_0), a_{i_0-2} \in P(i_0 - 2)$.
3$''$) $1 \in P(i_0 - 1)$ и $i_0 - 2 = j'_0$. В этом случае $1 \in P(i_0 + 1)$. Тут тоже два варианта:
1$'''$) $j'_0 > 3$,
2$'''$) $j'_0 = 3$.
В 1$'''$) $\alpha' = \alpha a_{i_0} a_{i_0+1} 1 a_{j'_0} a_{j'_0-2} \ldots a_2 1$.
В 2$'''$) $\alpha' = a_{i_0} a_{i_0+1} 1 a_{i_0+1} a_{i_0} 1 a_{i_0+1} a_{i_0} 1$.
Здесь для любого $t\ a_t \in P(t)$.
Итак, $\forall i \in [i_0 + 1 \ldots k]$ и $\forall j \in [j_0 + 1 \ldots i_0 - 1]\ P(i) \cap P(j) = \varnothing$.

Остается такая возможность: $\exists\, i, j\ k \geqslant i > j \geqslant i_0 + 1\ :\ P(i) \cap P(j) \neq \varnothing$.
Положим $\alpha = a_{i''_0-1} \ldots a_{j''_0+1}$, где i''_0 и j''_0 выбираются аналогично тому, как выбирались i_0, j_0 и i'_0, j'_0. Опять имеем три возможности:
1) $i''_0 \in \overline{\phi}(S_{i''_0-1}, \alpha)$,
2) $(i''_0 - 1) \in \overline{\phi}(S_{i''_0-1}, \alpha)$,
3) $\exists\, j'' < i''_0 - 1\ :\ j'' \in \overline{\phi}(S_{i''_0-1}, \alpha)$.
Случай 2) либо путем замены $\alpha \to \gamma$ сводится к случаю 1), либо путем замены $\alpha \to \beta$ сводится к случаю, аналогичному 3). В обоих случаях обозначим β и γ снова α. Тогда в случае 1) имеем $\alpha' = \alpha a_{j''_0} \ldots a_3 a_{i''_0-1} \ldots a_{j''_0+1} a_2 1$, в случаях 2) и 3) имеем $\alpha' = \alpha a_{j''_0} \ldots a_3 a_{j'} \ldots a_{j''_0+1} a_2 1$. Здесь $a_2 \in P(2) \cap P(i_0)$, $a_{j''_0} \in P(i''_0) \cap P(j''_0)$, $a_t \in P(t)$ для остальных t.
Итак, лемма 7 доказана.

Как уже ранее отмечалось, если в диаграмме переходов есть циклы, то они могут быть только следующего вида:
а) $[1 \ldots 3]$,
б) $[m \ldots n]$.
Рассмотрим множество всех циклов типа б) и образуем множество их левых концов. Выберем из последнего множества минимальный элемент. Обозначим его k_0. Рассмотрим некоторый цикл $[k_0 \ldots l_0]$.

Лемма 8. $l_0 \geqslant n-3$.

Доказательство. Предположим обратное и придем к приворечию. Сначала докажем, что $P(l_0+1) \subset P(k_0)$. В самом деле, пусть $a \in P(l_0+1)$ и $a \notin P(k_0)$. Обозначим $S = \{l_0-1 \dots k_0\}$. Тогда $\phi(S,a) = S$.

Теперь рассмотрим множество S_{k_0}. Построим слово $\omega = ba\omega'$, где b – некоторый символ, переставляющий точки $[k_0 \dots l_0]$ по циклу. Обозначив $A = \{k_0{+}1 \dots l_0{+}1\}$, $B = \{k_0 \dots l_0\}$, получим: $\overline{\phi}(A, ba) = B$. Слово ω' будет устроено так: $\omega' = \omega_1 \dots \omega_t$, где $t = l_0 - k_0 + 1$, ω_1 – произвольное слово, переводящее k_0 в 1, $\omega_2 = b\omega_1$, $\omega_{i+1} = b\omega_i\ \forall i \leqslant t-1$. Из леммы 2 следует, что слово ω удаляет из S_{k_0} t точек, при этом остается еще по крайней мере две. Легко видеть, что $l(\omega) = 2 + k_0 + \dots + l_0$. Следовательно, так как для любого цикла $[m \dots n]$ $n - m \geqslant 2$, имеем $l(\omega) < (k_0+1) + \dots (l_0+1)$. Противоречие с леммой 2. Итак, $P(l_0+1) \subset P(k_0)$.

Теперь покажем, что $l_0 - k_0 = 2$. В самом деле, пусть $l_0 - k_0 > 2$. Пусть ω – такое слово, что $\overline{\phi}(k_0, \omega) = 1$. Тогда
$$\overline{\phi}(l_0, \omega 1) = k_0 + 1. \qquad (1)$$
Пусть c – первый символ слова ω. Можно взять $c \in P(l_0+1)$. Тогда $\phi(l_0, c) \in S_{l_0}$. Используя (1), получим, что в слове ω должен быть символ из $P(l_0+1)$. В силу леммы 7 это возможно, только если это последний символ слова ω. Таким образом, $\overline{\phi}(l_0, \omega) = l_0$ и $\overline{\phi}(l_0, 1) = k_0 + 1$. Значит $l_0 - k_0 = 2$.

Рассуждая как и выше заключаем, что :
1) $\phi(l_0, 1) = k_0 + 1$,
2) $\exists a \neq 1 :\ a \in P(l_0+1) \cap P(k_0) \cap P(2)$.
Покажем, что $1 \in P(k_0)$. Рассмотрим S_{k_0} и $\alpha = a_{k_0} \dots a_3$. Имеем $(k_0 - 1) \in \overline{\phi}(\alpha', S_{k_0})$, где $\alpha' = \alpha a$. Отсюда получаем $1 \in P(k_0)$. Далее, согласно лемме 4, для любого слова $\omega' = \omega 1$, где $\overline{\phi}(k_0, \omega) = 1$, должны иметь: $\overline{\phi}(k_0+1, \omega) = l_0$. Первый символ в ω можно взять a или 1. При этом $\phi(k_0+1, a) = k_0 + 1 \neq l_0 = \phi(k_0+1, 1)$, откуда получаем, что, хотя бы в одном из случаев выбора первого символа слова ω (1 или a) $\overline{\phi}(k_0+1, \omega) \neq l_0$. Полученное противоречие заканчивает доказательсиво леммы 8.

Докажем, наконец, что $|A| \geqslant n - 8$. Для этого убедимся в том, что $l_0 - k_0 < 4$. В самом деле, пусть $l_0 - k_0 \geqslant 4$. Рассмотрим ω – такое слово, что $\overline{\phi}(l_0, \omega) = k_0 + 1$. Рассмотрим S_{l_0-3}. Подадим на вход $l_0 - k_0 - 2$ раза символ, по которому переставляются точки цикла $[k_0 \dots l_0]$. Три его верхние точки станут тремя нижними. Подадим еще раз тот же символ. Тогда остаются две точки внизу цикла и одна наверху. Теперь подадим слово $\omega 1$. Согласно лемме 4 та точка, которая была вверху цикла, перейдет в $k_0 + 1$. Та же точка, что была внизу, отсечется. Отсюда легко получаем противоречие с леммой 7. Итак $l_0 - k_0 < 4$. Кроме того $l_0 \geqslant n - 3$. Значит $k_0 \geqslant n - 6$. Далее, в силу леммы 7, $\forall\, s,t\ 3 \leqslant s < t \leqslant k_0\ P(s) \cap P(t) = \varnothing$. Значит входной алфавит автомата $\mathfrak{A}$ с $L(\mathfrak{A}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ должен содержать не менее $n - 8$ различных символа. Что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 2

Положим $A = \{0,1\}$, $B = \{0,1\}$ и $Q = \{1 \dots n\}$. Будем считать $n = 2k$. Случай нечетного n рассматривается аналогично. Функцию ψ определим так: $\psi(i,0) = 0\ \forall i$, $\psi(i,1) = 0$ если $i \neq 1$ и $\psi(1,1) = 1$. Функцию переходов ϕ задаем так: $\phi(i,0) = i-1$, если $i > 1$ и $\phi(1,0) = k$. Далее $\phi(i,1) = f(i)$, где f – есть некоторое отображение из Q в Q, которое определяется так.

Положим f_0 – произвольное взаимно однозначное отображение множества $Q_1 = \{1 \dots k\}$ на множество $Q_2 = \{k+1 \dots n\}$, такое что $f_0(1) = k+1$. Продолжим f_0 до отображения $\overline{f_0} : Q \to Q_2$ так, чтобы сужение $\overline{f_0}$ на любой отрезок $[j \dots j+k-1]$ $j \leqslant k+1$ было бы взаимно однозначным преобразованием. Достаточно, очевидно, положить $\overline{f_0}(i) = f_0(i-k)$ для $i > k$. В качестве $f(i) = \phi(i,1)$ возьмем $\overline{f_0}$. Мы покажем, что $L(\mathfrak{A}) \geqslant k^2 + k - 3$, где $\mathfrak{A}$ – построенный выше автомат. Обозначим $L(\mathfrak{A}, S)$ – длина простого условного установочного эксперимента в случае, если начальное состояние автомата $\mathfrak{A}$ входит в $S \subset Q$. Нетрудно видеть, что $L(\mathfrak{A}, S) \leqslant L(\mathfrak{A})$. Покажем,что $L(\mathfrak{A}, Q_2) \geqslant k^2 + k - 3$. В данном случае любой эксперимент сводится к подаче слова $\alpha = a_1 \dots a_l$ такого, что $\forall j \in Q_2$ существует такой начальный отрезок $a_1 a_2 \dots a_{r_j}$ слова α, что $a_{r_j+1} = 1$ и $\bar{\phi}(a_1 \ldots a_{r_j}, j) = 1$. Точнее это должно быть выполнено для всех $j \in Q_2$, кроме быть может одного. Положим $\phi'(S,0) = \phi(S,0)$ $\phi'(S,1) = \phi(S \backslash \{1\}, 1)$, где $S \subset Q$ $\alpha \in A^*$, то есть при идентификации состояния мощность множества возможных состояний уменьшается на 1. До начала эксперимента имеем: $S = Q_2$, а в конце эксперимента $S \to S' = \{q\}$, где q – некоторое состояние. Заметим, что в течении всего эксперимента множество S возможных состояний всегда можно покрыть некоторым отрезком длины k. Это легко проверить по индукции. Разобьем слово α на блоки следующим образом:

$\alpha = \underbrace{00\ldots0}_{O}\underbrace{11\ldots1}_{I}\underbrace{00\ldots0}_{O}\ldots$

Моменты, в которые происходит уменьшение мощности множества S, совпадают с моментами идентификации состояний, так как множество S всегда находится в некотором отрезке длины k. При этом мощность S уменьшается ровно на 1. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ – все моменты идентификации. Нетрудно видеть, что для любого i $1 \leqslant i \leqslant k-2$, $t_{i+1} - t_i \geqslant k+1$. Отсюда:
$L(\mathfrak{A}, Q_2) \geqslant k + 1 + (k-2)(k+2) = k^2 + k - 3$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Кудрявцеву В.Б. и Подколзину А.С. за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Хибрард Т. Точные верхние границы для минимальных экспериментов, определяющих заключительное состояние, для двух классов последовательных машин // Кибернетический сборник. Вып. 2. М.: Мир, 1966.

[3] Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы М.: ИЛ, 1956. С. 179–210.

[4] Карацуба А.А. Решение одной задачи из теории конечных автоматов. М.: УМН, 1960. Т. 15, Вып. 3. С. 157–159.

О выделении существенного при распознавании изображений

В.Н. Козлов

Введение

Зрительное восприятие занимает особое место в ряду других органов чувств человека. По некоторым оценкам биологов до 90% сенсорной (то есть от органов чувств) информации составляет зрительная информация [1]. В немалой мере и собственно мышление, можно предполагать, имеет в основе своей оперирование со зрительной информацией из окружающей среды и из памяти.

Столь же очевидно значима визуальная информация и для работы технических устройств: роботов, компьютеров, систем наведения на цели, и пр.

Одна из особенностей зрительной информации – ее огромные объемы. Глаз человека содержит около 130 миллионов светочувствительных элементов (палочек и колбочек). Вместе с тем распознавание изображений осуществляется иногда лишь за доли секунды. Вряд ли это можно сделать, используя целиком всю информацию на сетчатке глаза. Должно существовать некоторое «сито» и для изображений из среды, и для визуальной информации из памяти при оперировании с ними. Парадокс, однако, состоит в том, что попытки до собственно распознавания выделить на изображениях «опорные точки», «важные детали», и пр. есть тоже распознавание, то есть возникает до некоторой степени замкнутый круг, со всеми вытекающими из этого сложностями.

Трудно рассчитывать эту задачу – построение «сита» для изображений – решить неким единовременным усилием. В настоящей