

Инварианты симметрий: от свобод преобразований фигур к свободам их самосовмещений

В.В. Смолянинов, Т.А. Ракчеева

Введение

Свойства системной организации физико-математических объектов можно описывать с помощью симметрий. Системоорганизующую семантику симметрий Г. Вейль [1] выразил следующим общим образом:

«симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

В этой работе используется более рационалистический взгляд на симметрии – мы предлагаем рассматривать симметрии как редукторы свобод системной организации и производим классификацию симметрий по числу связываемых ими степеней свободы. Основными объектами наших рассмотрений служат геометрические фигуры. Эти объекты хорошо известны и поэтому удобны для иллюстрации нового системно-либернетического подхода [4].

1. Системный подход

Возможности создания и изменения произвольной системы предполагают наличие свобод или степеней свободы системных преобразований. Взгляд на системную организацию с точки зрения свобод

возможных преобразований элементов и межэлементных отношений называется *либернетическим* подходом [4]–[6].

Понятие *системной организации* весьма обширно и когнитивно многозначно ввиду большого разнообразия типов естественных (физических, химических, биологических), искусственных (технических) и абстрактных (математических) систем, единое описание которых возможно только в либернетическом контексте, то есть с позиций выявления и спецификации свобод системных преобразований. Адекватные описания систем управления, включая интеллектуальные системы, невозможны вне либернетического подхода, поскольку степени свободы таких систем служат элементами целенаправленного управления, включая принятия решений.

В процесс формальной разработки либернетического подхода полезно вовлекать простейшие системы произвольной природы, в частности, простейшие математические системы – геометрические фигуры.

1.1. Механо-геометрическая метафора

В механо-геометрической метафоре *симметрии* явным образом объединяются два разных понятия – *формы* от геометрии и *движения* от механики. Но ниже мы покажем, что понятие симметрии неявным образом включает другую пару понятий: *степени свободы* – от механики и понятие *инварианта* – от геометрии.

Пространственные движения механических тел бывают «твердыми» – без изменения формы, а бывают «мягкими» – сопровождаемыми деформациями формы. Общей мерой сложности механических движений служит *число степеней свободы*. Твердотельные движения, ввиду инвариантности формы, характеризуются малым числом свобод (например, на плоскости – тремя, в пространстве – шестью), а деформационные движения – большим, в общем случае – бесконечным. Уже из этих механических свойств движений можно заключить, что переход от деформационных движений к твердотельным, то есть обеспечение инвариантности формы, включает реду-

цию большого числа априорных степеней свободы.

Частный случай твердотельного движения – это нетривиальные дискретные движения *самосовмещения*, которые, однако, возможны не при любых формах тел, а только при симметричных. Симметричные формы обладают разным числом дискретных движений самосовмещений, которые можно трактовать как *число свобод симметрий*.

Свободы симметрий отсутствуют у тел произвольной формы (несимметричных), но у них имеется бесконечное число свобод деформаций. В частности, посредством деформаций произвольное несимметричное тело можно превращать в симметричное, у которого появляется новое качество – свободы самосовмещений.

Существует большой класс механических объектов, которые имеют не бесконечное, а конечное число степеней свободы деформаций, например, многостержневые конструкции, используя которые можно проследить последовательность необходимых ограничений, переводящих их допустимые произвольные формы в симметричные. Рассматривая такую задачу, можно ответить на вопрос:

сколько ограничений требует та или иная конструкция для приобретения той или иной симметричной формы?

1.2. Структурная метафора

Произвольный объект можно интерпретировать как *систему*, если его формальное определение допускает выделение как минимум пары множеств [4] – элементов $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ и связей $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, то есть

$$\text{система} = \{\text{элементы, связи}\} \Rightarrow S = \{E, R\}. \quad (1.1)$$

Сложные или комплексные и иерархически организованные системы могут содержать разные типы и элементов, и связей, но в этом случае система представима в виде множества подсистем, каждая из которых допускает каноническое определение вида (1.1). Отметим, множества элементов и связей семантически различны и второе является надстройкой над первым, поэтому, если первое является пустым, то и второе является пустым: $E = \emptyset \Rightarrow R = \emptyset$. Однако

обратная импликация не является верной. При фиксированном составе элементов абстрактная система допускает большое разнообразие связей – как по числу и направленности, так и по другим атрибутам, а вариант отсутствия связей заслуживает отдельного выделения:

система называется *свободной* (несвязной), если второе реляционное множество системы (1.1) является пустым, $R = \emptyset$.

Простейшему определению (1.1) удовлетворяют графы, часто используемые в качестве структурных и/или функциональных моделей конкретных систем. Действительно, общее формальное определение графа задается в виде пар множеств и эквивалентно декларации (1.1), но для целей алгебраических описаний используются векторно-матричные объекты, например, множество вершин представляется вектором номеров или состояний вершин, а связи – матрицей связности (см. [6]). Порядок матрицы связности всегда равен числу элементов, связанным парам элементов соответствуют ненулевые элементы этой матрицы. Если графы используются для топологической идентификации связности элементов, то все парные связи наделяются единичным весом.

Граф, не содержащий ребер (или дуг), представляется множеством изолированных вершин и называется *несвязным*. Несвязному графу отвечает нулевая матрица связности.

Структурным антиподом несвязного графа служит *полный* граф, каждая вершина которого связана со всеми остальными. Матрица связности полного графа содержит только единичные элементы.

Графы сами по себе отражают в первую очередь топологию связей элементов и характеризуются следующими топологическими параметрами: 1) степенями связности вершин – числом дуг (ребер), сходящихся к данной вершине; 2) периметрами элементарных контуров.

Контур произвольного полигона можно интерпретировать как неориентированный замкнутый граф, элементами которого служат вершины, а ребра, то есть стороны полигона, представляют парные связи смежных вершин. Если дополнительными атрибутами вершин служат их декартовы координаты, то априорное число свобод таких

элементов совпадает с числом координат, а число свобод всего множества элементов, то есть полигона, равно сумме свобод элементов:

$$\text{lib}(E) = \text{lib}(e_1) + \dots + \text{lib}(e_n),$$

– либернетический ресурс множества элементов есть аддитивная функция либернетических ресурсов элементов.

У свободной системы нет фиксированного тем или иным способом множества состояний, нет ограничений. В частности, точечные элементы неорганизованной системы могут иметь произвольные координаты. Организация и в абстрактном смысле сводится к наведению порядка посредством уменьшения произвола, посредством дополнительных ограничений, которые редуцируют («уменьшают») избыточные степени свободы. Но сами ограничения или связи могут быть разной, так сказать, антилибернетической емкости, то есть каждая отдельная связь может ограничивать разное число свобод либо отдельных элементов, либо подмножеств элементов. В итоге общее число несвобод $\text{fix}(R)$ складывается из несвобод отдельных связей,

$$\text{fix}(R) = \text{fix}(r_1) + \dots + \text{fix}(r_m).$$

Понятно, что в общем случае $\text{fix}(R) \leq \text{lib}(E)$ – число несвобод не может превосходить числа свобод, а разность

$$\text{lib}(E) - \text{fix}(R) = \text{lib}(S)$$

есть остаточная свобода системной организации. Когда достигается полное равенство несвобод и свобод, $\text{fix}(R) = \text{lib}(E) \Rightarrow \text{lib}(S) = 0$, тогда имеется полностью организованная и полностью несвободная или фиксированная система.

1.3. Инварианты – элементарные связи

Стержневая конструкция является примером механической системы, свободы деформаций которой можно понимать как свободы организации, выражаемой в форме. Тогда ограничения можно

понимать как инварианты формы – характеристические признаки системной организации.

Преобразования произвольной формы в симметричные связаны с нарастанием ограничений. Максимально хорошо организованные, правильные формы связаны максимальным числом ограничений или инвариантов, что обеспечивает им максимальное увеличение числа свобод самосовмещений. Таким образом, с одной стороны, правильная форма получается посредством редукции исходных свобод деформации, а с другой стороны правильная форма становится источником новых свобод самосовмещений.

Для целей сравнения, спецификации и подсчета ограничений при различных организационных мероприятиях и процедурах фиксации свобод необходимо ввести понятие элементарной связи, порождающей одну несвободу [5].

Определение 1.1. *Инвариантом* системы называется элементарная связь, которая редуцирует только одну степень свободы системной организации.

Замечание 1.1. Мы предпочли использовать для идентификации элементарной связи термин «инвариант», а не связь, ограничение и др., потому что он более отвечает семантике системной организации, подчеркивая неизменность соответствующего свойства на фоне возможной изменчивости прочих свойств.

Переход от свободной системы к фиксированной можно осуществить бесконечным множеством способов, но если удастся этот переход реализовать только с помощью инвариантов, то полный список условий включает n инвариантов, $R = \{i_1, \dots, i_n\}$, тогда как другие способы дают меньшее число редукций, $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, где $m < n$.

Метод инвариантов полезен как для подсчета несвобод системы, так и для сравнения разных целенаправленных действий по системной организации. Поскольку число фиксированных состояний произвольной системы бесконечно велико, особый интерес представляют варианты *правильной* организации, то есть варианты глобальной унификации априорного разнообразия свойств элементов.

1.4. Правильные системы

В механо-геометрических приложениях понятие *правильности* связано с понятием *симметрии*, которое подразумевает существование соразмерных («конгруэнтных») частей системы и существование *операции* совмещения этих частей. Механически такая операция трактуется как движение, геометрически – как преобразование, а алгебраически – как оператор. Обобщенным выражением таких трактовок служит следующее

Определение 1.2. *Симметрия* механо-геометрического объекта – это способ его самосовмещения, понимаемый как геометрическое преобразование, допускающее операторное алгебраическое представление.

Геометрическая трактовка симметрий, которая, вообще говоря, подобна механической, сводится к описанию канонических или *базовых* симметрий и к классификации составных («комплексных») симметрий – результатов всевозможных сочетаний базовых симметрий [1, 7].

Для плоских геометрических объектов, например плоских фигур, принято выделять три базовые симметрии:

S_{mir} – зеркальная (отражение относительно прямой);

S_{cen} – центральная (инверсия относительно точки – центра);

S_{rot}^n – циклическая порядка $n > 2$ (поворот на угол $2\pi/n$);

Строго говоря, одна симметрия из этого списка не является базовой: S_{cen} можно считать частным случаем S_{rot}^n при $n = 2$: $S_{cen} \equiv S_{rot}^2$, но поскольку S_{cen} встречается достаточно часто, ее включение в базовый список полезно.

Каждая базовая симметрия, если она присуща системе, обеспечивает соответствующий тип правильности, характеризуемый определенными признаками и условиями.

Обычно для наглядной демонстрации разных типов пространственных симметрий используется метод эталонных объектов и признаков – перечисляются основные полуправильные и правильные объекты, а также так называемые элементы симметрий, соответствующие конкретному типу симметрии.

Определение 1.3. *Элементы симметрий* – особые подмножества точек геометрических объектов, которые неподвижны при самосовмещениях объектов.

Симметрии можно классифицировать по признакам наличия, размерности и порядка элементов симметрии:

- трансляции и скольжения не имеют неподвижных точек;
- центральная и циклическая симметрии имеют неподвижные точки соответствующих порядков ($n = 2, 3, \dots$, случай $n = \infty$ соответствует кругу);
- зеркальная симметрия имеет неподвижную прямую.

1.5. Группы симметрий

Алгебраическая, то есть операторная, трактовка симметрий позволяет построить их исчисление, естественным воплощением которого служит теория групп, потому как и понятие алгебраической группы основано на абстрактной концепции «самосовмещения» некоторого множества объектов, все преобразования которых сводятся к *перестановкам*.

Группа – это алгебраическая система, общий синтаксис определения которой тоже выражается формулой вида (1.1):

$$\text{группа} = \{\text{операторы, определяющие условия}\} \rightarrow G = \{O, C\}. \quad (1.2)$$

Мощность множества элементов группы (операторов) называется *порядком* группы, который обычно указывается в идентификации группы: $|O| = n \Rightarrow G = G_n$. Возможны разные методы задания группы – от таблиц Кэли до определяющих условий. Таблицы Кэли дают полное описание (в табличной форме) всех перестановочных элементов группы, а определяющие условия выделяют *минимальный* набор свойств элементов, достаточный для реконструкции полного описания.

Системная парадигма теории конечных групп базируется на теореме Кэли, согласно которой всякая конечная группа G_n является

подгруппой «пангруппы» – полной группы перестановок P_n , содержащей $|P_n| = n!$ элементов. Следовательно, в системном контексте, полное множество перестановок P_n соответствует *свободной* (от ограничений) системе, обладающей максимальным числом свобод перестановочных преобразований. Выделение подгруппы обеспечивается дополнительным набором *ограничений* C и неизбежно сопровождается редукцией избыточных свобод перестановок, то есть

$$C : P_n \rightarrow G_n, \Rightarrow \text{lib}(P_n) = n! \rightarrow \text{lib}(G_n) = n. \quad (1.3)$$

Метод определяющих условий – это *экономный* способ спецификации ограничений, когда список условий $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ является минимальным, $m < n$. Но требование минимальности, имея свое процедурное обоснование, не является обязательным, так как и здесь альтернативным методом описания ограничений является метод инвариантов, ориентированный на спецификацию всего множества элементарных ограничений, общее число которых может существенно превосходить (и превосходит) минимальное число определяющих условий:

$$\max(|C|) = n! - n = ((n-1)! - 1)n$$

до величины этой разности метод инвариантов максимизирует множество ограничений.

2. Свободы формы

Форма геометрического объекта – понятие визуальное и подразумевает бескоординатное восприятие, инвариантное относительно линейных преобразований координат. Кроме того, для нашего восприятия формы наиболее существенна инвариантность «твердотельных» движений, при которых сохраняется *евклидова* метрика фигуры и пространства – метрика длин и расстояний.

Однако аналитические представления форм, так же, как и компьютерные, требуют координатного задания, которое следует считать первичным, поскольку на его основе вычисляются все другие характеристики форм.

2.1. Полигоны

Основная фигура этого раздела – это плоский n -полигон

$$P_n \equiv P^n(\mathbf{X}) \equiv P^n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.1)$$

содержащий n точек \mathbf{x}_k , которые служат вершинами сторон («ребер»), а стороны изображаются отрезками прямых. Полигон полностью определяется заданием координат своих вершин, которые, при необходимости, указываются как аргументы формы. Запись

$$\mathbf{x}_k \equiv (x_{1k}, x_{2k})' \equiv x_{1k}\mathbf{e}_1 + x_{2k}\mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (2.2)$$

означает векторное задание вершин посредством пар декартовых координат, оси которых задаются базисными ортами $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0)'$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0, 1)'$; тогда совокупно координаты вершин задаются $(2, n)$ -матрицей \mathbf{X} , которая развернуто пишется как строка столбцов.

О нумерации вершин и сторон.

Когда для задания вершин полигона используются координаты (2.2), по умолчанию предполагается, что 1-я вершина находится на оси абсцисс $\mathbf{x}_1 \equiv x_{11}\mathbf{e}_1$; остальные вершины нумеруются по ряд против часовой стрелки. Полигон P^n далее считается простым по признаку отсутствия пересечения сторон, то есть звездчатые полигоны исходно не рассматриваются, но вторичные двойственные (дуальные) полигоны могут иметь звездчатую форму (при $n > 4$), например, когда их стороны являются последовательными хордами несмежных пар сторон первичного полигона. Вектор k -й стороны $\mathbf{l}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ для $k < n$, и $\mathbf{l}_n = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n$ – условие замыкания, то есть номер стороны совпадает с номером начальной вершины. Точки середин сторон нумеруются также $\mathbf{a}_k = (\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k)/2$ для $k < n$, и $\mathbf{a}_n = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_n)/2$.

Свободный полигон P^n , как система, образованная множеством n независимых точек плоскости, имеет следующие начальные характеристики организации:

$$\text{lib}(P^n) = 2n, \quad \text{inv}(P^n) = \text{sym}(P^n) = 0, \quad (2.3)$$

– максимальное число свобод преобразования («деформации») фигуры при отсутствии инвариантов и симметрий.

Далее мы рассмотрим последовательные преобразования произвольного неправильного полигона P^n – общей формы, к правильной форме P^n . Промежуточные частично правильные формы будем помечать либо нижними индексами, указывая число j инвариантов и число k симметрий, либо в виде аргументов будем указывать их списки, например:

$$P_{j,k}^n = P^n(\mathbf{X} | \mathbf{i}_j; \mathbf{s}_k) \Leftrightarrow \mathbf{i}_j \equiv (i_1, \dots, i_j), \mathbf{s}_k \equiv (s_1, \dots, s_k); \quad (2.4)$$

здесь приведены эквивалентные варианты идентификации промежуточных форм полигона P^n – с помощью индексов или списков.

Задание n -полигона (2.1) полным множеством \mathbf{X} координат вершин (2.2) представляется избыточным, если мы собираемся обсуждать свойства формы полигона P^n , но оно необходимо в описаниях операторных преобразований, и когда надо его изображать, например, на компьютерном экране. Избыточность и неизбыточность информации всегда зависит от цели ее использования. Но координатное описание \mathbf{X} не вполне годится для описания формы не только из-за своей избыточности, а потому что для описания формы требуются метрические характеристики, которые являются определенными функциями координат.

Вывод 2.1. Для описания формы полигона и его симметрий – размерностей частей фигур при самосовмещениях, именно длины сторон исходного и двойственного полигонов, а также других расстояний следует выделять в качестве определяющих характеристик.

2.2. Стержневая модель

Вопрос о свободах формы n -полигона можно поставить модельным образом. Представим, что имеется механическая модель n -гона P^n , выполненная из твердых стержней в виде замкнутой цепи звеньев, а вершинные шарниры допускают свободные плоские вращения звеньев.

Замечание 2.1. Усовершенствованный механический вариант стержневой модели – звенья можно считать телескопически раздвижными, с фиксаторами выбранной длины. Такой замкнутый многозвенник позволяет произвольно устанавливать произвольные длины стержней и свободно изменять межзвенные углы при постоянстве числа звеньев.

Вопрос 2.1. Сколько инвариантов требует полная фиксация формы P^n ?

Стержневая модель P^n подразумевает первичную фиксацию длин всех n сторон l_k , где $k = 1, \dots, n$. Если при этом исходить из предыдущего координатного задания полигона, так сказать, для компьютерного использования, то фиксация длин сторон эквивалентна введению n следующих метрических инвариантов:

$$l_k^2 \equiv (x_{1,k+1} - x_{1,k})^2 + (x_{2,k+1} - x_{2,k})^2 = const \equiv c_k^2, \quad k = 1, \dots, n; \quad (2.5)$$

здесь по умолчанию полагается, что $(n+1)$ -я вершина совпадает с первой.

Если $n = 3$, то для фиксации формы достаточно задания трех длин сторон или 3-х инвариантов (2.5) – это известно из знаменитой задачи Евклида о построении треугольника по трем заданным сторонам; поэтому

$$\text{inv}(\text{form}(P^3)) = |l_1, l_2, l_3| = 3.$$

Если $n = 4$, то следует выполнить триангуляцию, добавляя к 4-м инвариантам сторон (2.5) еще один аналогичный инвариант диагонали, тогда

$$\text{inv}(\text{form}(P^4)) = |l_1, l_2, l_3, l_4; d_1| = 5.$$

Используя метод триангуляции и далее, для общего случая находим

$$n \geq 3 \Rightarrow \text{inv}(\text{form}(P^n)) = |l_1, \dots, l_n; d_1, \dots, d_{n-3}| = 2n - 3. \quad (2.6)$$

При подсчете числа диагоналей (хорд), необходимых для полной триангуляции полигона P^n , использовалась простая веерная

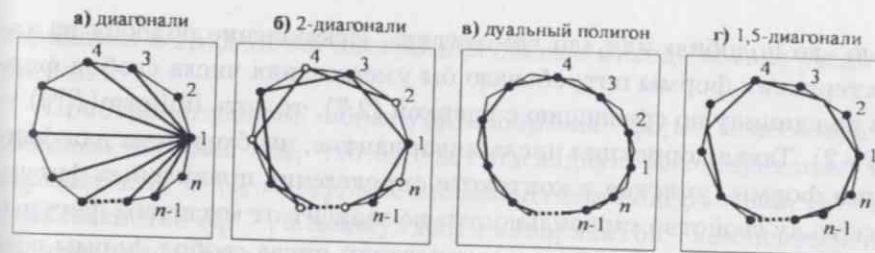


Рис. 1. Схемы разных типов полигонов и диагоналей.

схема (рис. 1а). Все хорды исходят из 1-й вершины и соединяют ее с вершинами $3 \dots n-1$, при этом получается веерная последовательность треугольников, имеющих следующие номера вершин: $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \dots, \{1, n-1, n\}$.

Вывод последней формулы (2.6) можно упростить, если учесть, что добавление новой вершины эквивалентно добавлению двух свобод форм фигуры:

$$\text{lib}(P^{k+1}) = \text{lib}(P^k) + 2.$$

Поскольку, согласно (2.3), $\max(\text{lib}(P^n)) = 2n$, после фиксации формы остается еще 3 свободы «твердотельного» движения плоской фигуры: две необходимы для перемещений ее центра и одна – для общего поворота вокруг центра.

Из предыдущего рассмотрения механической модели n -полигона мы получили необходимое параметрическое описание формы P^n :

$$\text{form}(P^n) = \{l_1, \dots, l_n; d_1, \dots, d_{n-3}\} \equiv \{L_n, D_{n-3}\}, \quad (2.7)$$

если считать все эти параметры характеристических длин фигуры свободными, то напрашивается следующий простой

Ответ 2.1. Число свобод форм фигуры равно числу инвариантов, необходимых для полной фиксации формы, то есть $\text{lib}(\text{form}(P^n)) = 2n - 3$.

Замечание 2.2. Следует обратить внимание на то, что эквивалентность форм геометрических объектов часто понимается с точно-

стью «до подобия» или «до гомотетии». Исключение подобия из характеристик формы потребовало бы уменьшения числа свобод формы на единицу по сравнению с оценкой (2.7), то есть $\text{lib}(\text{form}(P^n)) = 2(n-2)$. Такая коррекция числа инвариантов, необходимых для фиксации формы, уместна в контексте определения правильных фигур, поскольку свойство «правильности» не зависит от масштаба фигуры.

Но с другой стороны, при уменьшении числа свобод формы возникает необходимость использования нормированных, и потому неоднородных, описаний. Ниже мы будем предпочитать однородные и расширенные описания форм согласно Выводу 2.1.

2.3. Параметрическое пространство

Выделение характеристических длин сторон и диагоналей (2.6) позволяет ввести новое понятие *параметрического пространства* ПП размерности $m = 2n - 3$, которое обозначим символом $\mathbf{F}(P^n) \cong \mathbb{R}^m$ – пространство форм полигона эквивалентно вещественному m -мерному пространству точек,

$$I \equiv (l_1, \dots, l_n; d_1, \dots, d_{n-3})' \equiv (l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{2n-3})' \equiv (l_1, \dots, l_m)' \in \mathbf{F}(P^n)$$

в котором каждая *фиксированная* форма представляется одной точкой

$$I = c \in \mathbf{F}(P^n),$$

где $c \equiv (c_1, \dots, c_m)'$ – m -вектор констант.

Пример. Проблемы параметрического определения фигур начинаются с треугольника. Еще от Евклида известны три задачи на построение треугольника: 1) по трем сторонам, 2) по двум сторонам и углу между ними, 3) по одной стороне и прилежащим двум углам. Каждая из этих задач дает три примера первично различных параметрических заданий треугольников, каждый из которых является полным, так как позволяет построить заданный треугольник. В системе инвариантов правильного треугольника для этих трех случаев будут разными. Для полигонов с большим числом сторон чис-

вариантов и трудностей построения общего метода только увеличивается.

Пространственный образ разнообразия форм целесообразен главным образом тем, что он дает наглядную интерпретацию инвариантов $I_k \equiv \{l_k = c_k\}$, как инвариантных подпространств – гиперплоскостей R_k^{m-1} , а совокупности инвариантов – как пересечения инвариантных подпространств:

$$\{I_1, \dots, I_k\} \Rightarrow R_1^{m-1} \cap \dots \cap R_k^{m-1} \cong \mathbb{R}^{m-k}.$$

В частности, поскольку правильная форма однопараметрично гомотетична, множество таких форм одномерно и представляется в \mathbb{R}^m прямой $I \equiv \lambda c$, где константы координат длин сторон – единичные, $c_1 = \dots = c_n = 1$, а константы длин диагоналей зависят от выбора способа их определения.

Предыдущая верная модель диагоналей, удобная для оценки необходимого их числа (см. выше и рис. 1а), мало пригодна для формулировок условий правильности и формирования симметрий. Для этих целей можно выбрать другую модель хорд. Задача хордовых длин – заменить эквивалентным образом угловые характеристики, сохраняя «модель длин» для всех характеристик формы. Проще всего для этого использовать «двупролетные» хорды, которые соединяют пары вершин с номерами $k-1$ и $k+1$ – соседей вершины с номером k (см. рис. 1б), а также «полуторапролетные» хорды, соединяющие k -ю вершину с серединами не прилегающих к k -й вершине сторон (рис. 1г).

Назовем такие межвершинные хорды 2-диагоналями, то есть диагоналями 2-го порядка. Как следует из названия, стороны – это, так сказать, 1-диагонали, а при достаточно больших n возможны *диагональные полигоны* $Q^{n,m}$ (m -ДП) больших порядков $m < n/3$ (квадратные скобки означают целую часть). Минимальные вершинно-сторонние хорды назовем 1,5-диагоналями, произвольные вершинно-сторонние хорды для больших n образуют полигоны $Q^{n,1}$.

Мы будем относить к 1-ДП $Q^{n,1} \equiv Q^n$ не сам первичный полигон

P^n , а его двойственный вариант, который получается из P^n соединением прямыми отрезками середин сторон (см. рис. 1в). Дуальные полигоны Q^n топологически эквивалентны первичным полигонам P^n , как по составу: $|Q^n|_0 = |P^n|_0 = |Q^n|_1 = |P^n|_1 = n$ - числу вершин (индекс 0) и ребер (индекс 1), так и по односвязности. Но 2-ДП имеют принципиальные топологические отличия. У тетрагона P^4 имеется пара диагоналей - это два несвязных 2-гона, и у всех четных по числу вершин (или ребер) $n = 2m$ - полигонов P^n их 2-ДП - двусвязны, то есть представляются парами m -гонов. При нечетных $n \geq 5$ соответствующие 2-ДП односвязны, но имеют звездчатую форму.

Вывод 2.2. В качестве дополнительных метрических характеристик формы полигона P^n можно использовать либо длины сторон дуального полигона Q^n , либо длины 2 и 1,5-диагоналей, формирующих 2-диагональные полигоны $Q^{n,2}$ и 1,5-диагональные полигоны $Q^{n,1,5}$.

Изменим определение параметрического пространства полигона. В соответствии с Выводом 2.2, будем множество длин сторон P^n дополнять до нужного числа $m = n + k$, либо длинами 1-диагоналей (сторон дуального полигона Q^n), либо длинами 2-диагоналей полигона $Q^{n,2}$ (1,5-диагоналей $Q^{n,1,5}$):

$$l \equiv (l_1, \dots, l_n, d_1, \dots, d_{n-3}) \in \mathbf{F}(P^n, Q^n \vee Q^{n,2} \vee Q^{n,1,5}) \cong \mathbb{R}^m. \quad (2.8)$$

Теперь условие правильности фигуры формулируется одинаково для двух типов параметров - как условия равенства длин:

$$P^n(\mathbf{X} | l_1 = \dots = l_n = l, d_1 = \dots = d_k = d) = \mathbf{P}^n, \quad (2.9)$$

остается, при необходимости, для разных n уточнять связь параметров l и d .

2.4. Угловая модель

Геометрические описания треугольников и других полигонов, кроме как в проективной геометрии, обычно проводятся смешанным образом - с использованием длин и углов. Такая традиция видна

видимо, от первичных инструментов древних геометров - линейки и циркуля. В предыдущей стержневой модели мы предпочли только «метод линейки» ради простоты определения инвариантов. Однако можно поступить иначе и ограничиться только «методом циркуля», то есть ввести такую базовую модель полигона, которая позволяет описывать разнообразия их форм только с помощью угловых величин.

Какие бы разные взаимные положения вершин неправильных и частично правильных полигонов мы ни рассматривали при переходах к правильным фигурам, в конце концов все вершины правильных фигур находятся на одной окружности. Но окружное расположение вершин не обеспечивает правильность - является необходимым, но не достаточным условием. Для правильности еще необходимо условие равномерного распределения вершин по периметру круга, которое может выражаться разными способами - условием равенства длин сторон, или равенства площадей центральных межвершинных секторов, или равенства центральных межвершинных углов. Выбор последнего из перечисленных способа приводит нас к угловой модели.

Угловая модель полигона не является универсальной и не позволяет охватить все разнообразие форм, которое охватывается «моделью длин», но обладает своими интересными свойствами. В дальнейших рассуждениях угловая модель явным образом не используется и ее краткое описание в этой работе служит иллюстрацией существования альтернативного метода.

Пусть все вершины n -гона P^n всегда находятся на единичной окружности. Тогда сторонами можно называть хорды, соединяющие смежные вершины или дуги самой окружности. Если $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ - множество векторов вершин, то общее условие нахождения вершин на окружности эквивалентно условию единичной длины всех вершинных векторов (величин их автоскалярных произведений), и такой «принцип метрической инвариантности» специфицируется множеством моновекторных инвариантов:

$$I_0 \equiv \{x'_k x_k = 1 | k = 1, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

которое в два раза уменьшает число свобод P^n , не порождая при этом ни одной симметрии, при исходно произвольном распределении вершин по периметру окружности. Поэтому, вместо общей начальной характеристики (4) для угловой модели имеем:

$$P^n(\mathbf{X}|I_0) \Rightarrow \text{lib}(P^n) = n, \text{inv}(P^n) = n, \text{sym}(P^n) = 0. \quad (2.11)$$

Вывод 2.3. Возможна 2-кратная редукция свобод асимметричной фигуры.

Параметрическое пространство угловой модели P^n :

$$\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{A}(P^n | \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi, 0 \leq \alpha_k \leq 2\pi, k = 1, \dots, n),$$

содержит один инвариант суммы всех углов, поэтому линейное многообразие всех углов образует в \mathbb{R}^n правильный $(n-1)$ -мерный симплекс, вершины которого инцидентны осям угловых координат, а условие правильности фигуры – условие равенства всех углов:

$$P^n(\alpha | \alpha_1 = \dots = \alpha_n) = P^n$$

соответствует точке центра симплекса.

2.5. Инварианты базовых симметрий

Симметрии обладают свойствами глобальной редукции свобод формы, и угловая модель удобна для выполнения оценок емкости таких редукций для базисных симметрий.

Для начальной ситуации (2.11) введем дополнительное условие существования у полигона P^n центральной симметрии (ЦС) S_{cen} .

Вопрос 2.2. Скольким инвариантам эквивалентна ЦС S_{cen} ?

ЦС возможна при четном числе вершин $n = 2m$ (рис. 2а) и означает только то, что у каждой точки \mathbf{x}_k имеется антипод обратного знака – это точка $\mathbf{x}_{m+k} = -\mathbf{x}_k$. Учет ЦС дает двукратную редукцию задания вершин:

$$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, -\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m). \quad (2.12a)$$

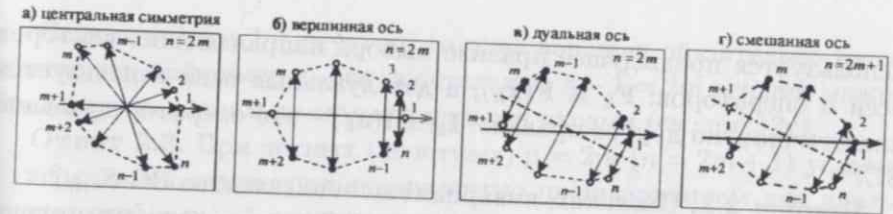


Рис. 2. Взаимное расположение вершин и элементов симметрий для полигонов с центральной и зеркальной симметриями.

Естественным оператором ЦС служит отрицательная единичная 2-матрица $-\mathbf{E} \equiv (-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2) \equiv \text{diag}(-1, -1)$, действие которой на всю матрицу \mathbf{X} эквивалентно действию на каждую точку, поэтому

$$-\mathbf{X} \equiv (-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m, -\mathbf{x}_{m+1}, \dots, -\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m). \quad (2.12b)$$

Эта запись соответствует интерпретации оператора ЦС, то есть матрицы $-\mathbf{E}$ как оператора целостного поворота полигона на угол π .

Ответ 2.2. ЦС эквивалентна $n/2 = m$ инвариантам.

Рассмотрим редуцирующие свойства зеркальной симметрии (ЗС) S_{mir} . Отметим некоторые различия в геометрии зеркальных осей для полигонов с нечетным и четным числом сторон, из-за которых происходят различия в свойствах зеркальных преобразований.

При нечетных $n = 2m + 1$ все зеркальные оси однотипны: они проходят через вершину \mathbf{x}_k и середину противоположной стороны \mathbf{a}_{k+j} , где $j = m - n[(k-1)/m]$, квадратные скобки обозначают целую часть, $m = (n-1)/2 = [n/2]$. Здесь можно вершинные векторы \mathbf{x}_k выбирать в качестве направляющих векторов осей и для соответствующих операторов использовать следующее обозначение: $\mathbf{F}_k \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.

При четных $n = 2m$ следует различать два типа зеркальных осей – вершинные и дуальные оси: первые проходят через антиподные пары вершин $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+j}\}$, а вторые – через антиподные пары середин сторон $\{\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+j}\}$, здесь величина j определяется также, $j = m - n[(k-1)/m]$, но $m = n/2$. В этих случаях для вершинных осей

используется предыдущее правило выбора направляющих векторов осей и операторов: $F_k \equiv F(x_k)$, а для дуальных осей используется аналогичное, но другое правило: $I_k \equiv I(a_k)$ – это оператор дуальной ЗС.

Вопрос 2.3. Скольким инвариантам эквивалентна ЗС S_{mir} ?

Пусть e_1 – направляющий вектор оси ЗС, то есть осью симметрии служит координатная ось абсцисс. Если $n = 2m$ – четно, то на оси находится диаметрально противоположная вершина $m+1$, а все остальные вершины делятся на зеркальные пары $\{2, n\}, \dots, \{m, m+2\}$. Разбиваемость на пары $\{x_{2+k}, x_{n-k} | k = 2, \dots, m\}$ означает, что все эти вершины связаны условиями (точки пары имеют одинаковые ординаты и абсциссы противоположного знака (см. рис. 2б)), которые образуют однородную систему линейных уравнений.

$$x_{n-k} = F_1 x_{2+k}, \quad k = 2, \dots, m; \quad (2.13a)$$

где $F(e_1) \equiv (e_1, -e_2) \equiv F_1$ – зеркальный оператор относительно e_1 оси.

Результатом этих связей является возможность редуцированного описания матрицы вершин:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, F_1 x_m, \dots, F_1 x_2), \quad (2.13b)$$

то есть с использованием координатной информации об $m+1$ точках, оставляя свободы произвольного распределения всех $m-1$ пар точек на окружности.

Если при четном n вместо вершинной зеркальной оси имеется дуальная ось, проходящая через середины n -й и m -й сторон (см. рис. 2в), то все вершины формируют зеркальные пары $\{1, n\}, \{2, n-1\}, \dots, \{m, m+1\}$. Вводя зеркальный оператор дуальной оси $a_n = (x_1 + x_n)/2$, то есть 2-матрицу $I_n \equiv I(a_n)$, мы в этом случае получаем следующее редуцированное описание матрицы вершин:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, I_n x_m, \dots, I_n x_1) \quad (2.14)$$

с использованием половины координатной информации об m точках

Если $n = 2m + 1$ – нечетно, то одна вершина обязательно инцидентна оси, например e_1 -оси, а остальные $n - 1 = 2m$ вершин можно представить зеркально-симметричными парами (см. рис. 2г).

Ответ 2.3. При четных (нечетных) $n = 2m$ ($n = 2m + 1$) условие зеркальной симметрии эквивалентно m инвариантам для дуальных осей и $m - 1$ инвариантам для вершинных осей.

Итак, с одной стороны, ЗС редуцирует не все свободы, а только примерно или точно половину, а с другой стороны, фигуры могут иметь несколько ЗС с разными осями, поэтому рассмотрим совместный эффект редукции свобод, производимый двумя ЗС.

Используем предыдущие описания разных осей ЗС, но при дополнительном условии совместного существования *двух* ЗС $S_{mir,1}$ и $S_{mir,2}$, из которых первая соответствует случаю вершинной оси (2.13), а вторая – случаю дуальной оси (2.14).

Вопрос 2.4. Скольким инвариантам эквивалентна пара ЗС?

Посмотрим на ЗС как на преобразования, переводящие зеркальные пары вершин друг в друга. Чтобы описать такие преобразования, умножим исходную матрицу вершин на оператор F_1 . Тогда, согласно (2.13), а также свойству инволютивности этого оператора: $F_1^2 = E \equiv (e_1, e_2)$ – двукратное действие эквивалентно бездействию (тождественному оператору, в данном случае – единичной 2-матрице), получается следующее преобразование (рис. 2):

$$F_1 X = (x_1, x_n, \dots, x_{m+2}, x_{m+1}, x_{m-1}, \dots, x_2), \quad (2.15)$$

Как видно из записи нового порядка вершин, в матрице (2.15) после первой вершины x_1 остальные номера вершин идут подряд в обратном порядке от n -го до 2-го.

Перейдем к анализу второй симметрии $S_{mir,2}$ (2.14), координатным оператором которой является 2-матрица $I_n \equiv I(a_n)$ и аналогично (2.15) получаем:

$$I_n X = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1), \quad (2.16)$$

здесь все номера идут в обратном порядке.

Применим теперь к полигону P^n сначала первое преобразование, затем второе, то есть умножим матрицу (2.15) на оператор I_n , в результате получим

$$I_n(F_n X) = (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1), \quad (2.17)$$

что представляет собой одношаговую *циклическую* перестановку всех вершин по часовой стрелке. Но такой циклический поворот возможен только тогда, когда *все* углы между смежными вершинами равны, то есть когда полигон $P^n = P^n$ — правильный.

Ответ 2.4. Пара смежных ЗС редуцирует все свободы формы полигона, так как эквивалентна условию его правильности; произведение двух смежных ЗС эквивалентно поворотной симметрии.

Вопрос о редуцирующих свойствах поворотной симметрии S_{rot}^n можно не задавать, поскольку ей обладают только правильные полигоны P^n .

Замечание 2.3. Более общим является вариант Вопроса 2.3 о редуцирующих свойствах пары ЗС, когда рассматриваются произвольные пары операторов одинаковых $\{F_j, F_k\}$, $\{I_j, I_k\}$, или разных $\{F_j, I_k\}$ типов, а также произвольные сочетания номеров осей j и k . Этот вариант представляет интерес для многовершинных полигонов ($n > 6$), которые здесь не рассматриваются.

3. Синтез симметрий

Последовательные преобразования неправильных форм в правильные посредством наращивания числа инвариантов позволяют выявлять «критические шаги» закономерного или спонтанного появления дополнительных симметрий. Мы будем называть такие последовательные преобразования процедурой *синтеза симметрий*.

До сих пор мы не уточняли различия в способах задания инвариантов, но теперь это необходимо сделать. Вообще говоря, ориентируясь на различные математические и прикладные задачи, теоретический и практический интерес представляют многие способы

определения инвариантных свойств разных системных объектов, но для наших узких целей достаточно различать два:

- инварианты *фиксирующего* типа («фиксаторы»), когда некоторая априори свободная характеристика объекта x_k объявляется постоянной: $x_k = \text{const} = c_k$;
- инварианты *реляционного* типа («реляторы»), когда величины самих характеристик x_i и x_j не фиксируются, но вводится условие их связи, $x_i = f(x_j)$.

С точки зрения геометрии параметрического пространства различия между этими двумя типами инвариантов не являются принципиальными, так как они соответствуют только разным способам выделения инвариантных подпространств. Более важны здесь, так сказать, операциональные различия, которые явно выявляются в операциях синтеза симметрий.

Финальные свойства правильности полигона формулируются условиями равенства и длин всех сторон, и вершинных углов, поэтому и последовательные переходы от неправильного полигона P^n к правильному P^n удобнее осуществлять последовательным накоплением и сочетанием разных частных условий равенства пар характеристик, используя реляционные инварианты вида $x_i = x_j$.

3.1. Тригон

Случай 3-гона («треугольника»), конечно, самый простейший и, казалось бы, его вообще не следовало бы выделять после предыдущих общих описаний, если бы не нетривиальность «треугольной простоты», на фоне которой сразу выясняется принципиальная разница языков инвариантов и симметрий.

Согласно предыдущим описаниям, множество форм 3-гона содержит только длины сторон:

$$\text{form}(P^3) = \{l\}, \quad l \equiv (l_1, l_2, l_3)' \in \mathbb{R}^3,$$

и это однородное параметрическое множество гомотетично избыточно.

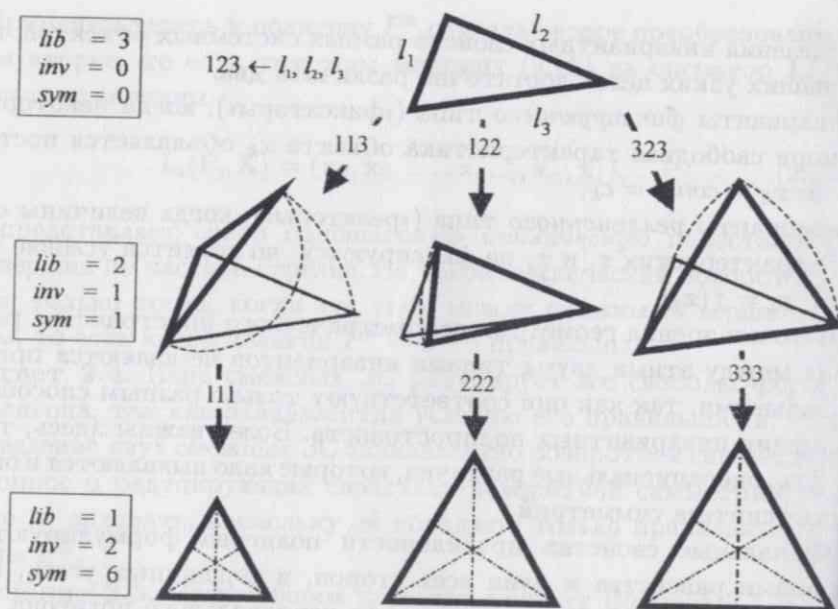


Рис. 3. Преобразование разностороннего треугольника в равно-
сторонние через последовательные условия равенства длин сторон.
Тройки цифр на стрелках обозначают индексы трех сторон. Для ис-
ходного треугольника имеем $(l_1, l_2, l_3) \rightarrow 123$, затем при условии
 $l_2 = l_1$ получаем запись $(l_1, l_1, l_3) \rightarrow 113$ и т.д.

Замечание 3.4. Параметрическое пространство всех форм $F(P^3) \subset \mathbb{R}^3$ соответствует только положительным значениям длин сторон $l_k > 0, k = 1, \dots, 3$, кроме того, положительные длины должны удовлетворять условию «неравенства треугольника». Мы здесь не строим границы определенности треугольных форм в параметрическом пространстве, а только отмечаем их существование.

Простейшая симметрия 3-гона – зеркальная S_{mir} – соответствует свойству *равнобедренности* и может задаваться условием равенства любых двух сторон, то есть, системно говоря, первый реляционный инвариант равнобедренности I_1 , редуцируя одну свободу формы

порождает одну симметрию S_{mir} и элемент симметрии – прямую, проходящую через вершину, общую для равных сторон, и середину третьей стороны (рис. 3):

$$I_1 = \{l_2 = l_3\} \vee \{l_1 = l_3\} \vee \{l_1 = l_2\} \Rightarrow S_{\text{mir},1},$$

и вместо исходных условий свободной формы (1.3) имеем условия:

$$P^3(I|I_1) \Rightarrow \text{lib}(P^3) = 2, \text{inv}(P^3) = \text{sym}(P^3) = 1; \quad (3.1)$$

при выборе инварианта $I_1 = \{l_1 = l_3\}$ изменчивость формы задается свободными параметрами $\{l_1, l_2\}$:

$$I \equiv (l_1, l_2, l_1)' \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

Другой инвариант, инвариант второй равнобедренности $I_2 = \{l_1 = l_2\}$, порождает, как и следовало ожидать, вторую зеркальную симметрию $S_{\text{mir},2}$ вместе со вторым элементом симметрии (см. рис. 3), но поскольку больше независимых сторон не осталось: $l_1 = l_2 = l_3 \equiv l$ – получился равносторонний 3-полигон, который правильно называется *правильным*, потому как более правильных среди треугольников не бывает (здесь имеется в виду, что при большем числе вершин условие равенства длин всех сторон – это необходимое, но не достаточное условие правильности фигуры). Важно при этом то, что достраивая второй равнобедренный треугольник, мы получаем еще и третий. Из трех равных сторон одного треугольника можно образовать три равнобедренных, значит вместе с третьим равнобедренным треугольником сам собой появился и третий инвариант равнобедренности I_3 , а также третья зеркальная симметрия $S_{\text{mir},3}$, вместе с третьим элементом симметрии (см. рис. 3). Но это еще не все.

Так как три элемента трех зеркальных симметрий являются сторонами и высотами, и медианами, нетрудно доказать их пересечение в одной точке, которая представляет новый элемент симметрии, а именно элемент *поворотной* симметрии 3-го порядка S_{rot}^3 .

Несомненно, эффект пересечения трех 1-мерных элементов зеркальных симметрий является ключевым для формирования элемента 3-поворотной симметрии. Но «сначала», по построению, было пересечение только двух элементов ЗС, и появление общей неподвижной точки двух *разных* зеркальных осей, которая оказалась общей неподвижной точкой третьей оси и, как следствие, центром циклической симметрии.

Мы выделяем эффект, казалось бы, спонтанного формирования двух дополнительных элементов симметрий, чтобы и в дальнейшем обращать внимание на аналогичные механизмы «симметричных синергий».

Итак, чтобы превратить неправильный 3-гон P^3 в правильный P^3 требуется всего *два* инварианта, при этом, промежуточный полуправильный (равнобедренный) 3-гон имеет только одну зеркальную симметрию, а правильный имеет 3 зеркальные симметрии и еще циклическую, содержащую два поворота на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, итого 5 симметрий, которые совместно с всегда существующей «тождественной симметрией» образуют группу диэдра D_3 6-го порядка.

Вывод 3.1. Два инварианта 3-гона порождают 5 симметрий группы диэдра D_3 6-го порядка.

Параметрическое пространство (ПП) 3-гонов P^3 3-мерно и поэтому легко обозримо. Пусть система координат в $F(P^3) \subset \mathbb{R}^3$ задается ортами $\{e_1 \equiv (1, 0, 0)', e_2 \equiv (0, 1, 0)', e_3 \equiv (0, 0, 1)'\}$, тогда произвольная точка представляется так:

$$l \equiv (l_1, l_2, l_3)' = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3.$$

Первый инвариант равнобедренности I_1 , согласно (2.11), выделяет в пространстве \mathbb{R}^3 подпространство \mathbb{R}^2 – плоскость, которая проходит через первую ось $l_1 e_1$ и биссектрису $l(e_2 + e_3)$ координатной плоскости $l_1 = 0$.

Аналогично представляются плоскости второго и третьего инвариантов. Запишем векторные уравнения трех плоскостей трех инвариантов в базисной форме,

$$I_1 : l = l_1 e_1 + l(e_2 + e_3); \quad I_2 : l = l_2 e_2 + l(e_1 + e_3); \quad I_3 : l = l_3 e_3 + l(e_1 + e_2)$$

отсюда видно, что при равенстве всех длин сторон три уравнения трех плоскостей или любая пара плоскостей превращаются в одно уравнение прямой, по которой эти плоскости пересекаются,

$$\{l_1 = l_2 = l_3 \equiv l\} \rightarrow l = l(e_1 + e_2 + e_3) \equiv l e \leftarrow e \equiv e_1 + e_2 + e_3 \equiv (1, 1, 1)'$$

Прямая $l = l e \in \mathbb{R}^3$ и представляет в ПП все подобно правильные 3-гоны.

Вывод 3.2. Структурированный образ ПП 3-гона содержит три плоскости трех условий равнобедренности, которые пересекаются по одной прямой правильных форм.

3.2. Тетрагон

В ряду полигонов возрастающего числа вершин случай тетрагона P^4 – промежуточный, как по свойству «жесткости» правильной формы, так и по свойству симметризуемости «изосторонней» формы, удовлетворяющей равенству длин всех сторон. Правильный треугольник – жесткая фигура, не допускающая конформационных преобразований (изменения углов), но правильный 4-гон не является жестким и допускает конформационные деформации при сохранении длин сторон. Отсюда и возникает необходимость вводить в параметрическое описание формы P^4 , кроме 4-х сторон, еще две диагонали:

$$\text{form}(P^4) = \{l_1, l_2, l_3, l_4; d_1, d_2\}. \quad (3.3)$$

Преимущества выделения только характеристик длины обосновывались выше (см. Вывод 2.1), но 4-гон – наиболее подходящая фигура для рекламы углов в качестве определяющих условий: правильная фигура P^4 – квадрат – имеет прямые вершинные углы, и его диагонали перпендикулярны; имеются полуправильные формы с характерными свойствами углов: *прямоугольник* – с прямыми вершинными углами; *параллелограмм* – с парами равных углов; ромб – с парами равных углов и перпендикулярными диагоналями.

Для краткой записи вариантов выбора условий используем векторный способ записи всех характеристических длин полигона в ви-

де двух частей (3.3) – длин сторон и длин диагоналей, но вместо записи индексированных длин ограничимся списками индексов. Тогда номер элемента длины кодируется положением в векторе формы, а величина представляется индексом согласно следующему правилу: после введения условий равенства индексы равных длин заменяются меньшим индексом. Начальные векторы формы произвольного 4-гона, содержащие списки длин или только списки индексов, записываются так:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4; d_1, d_2) \rightarrow (1234; 12);$$

после выбора условия равенства число разных индексов уменьшается:

$$l_4 = l_1 : (1234; 12) \rightarrow (1231; 12).$$

Первый реляционный инвариант (равенства двух длин) допускает три варианта выбора:

$\{(1134; 12) \vee (1224; 12) \vee (1233; 12) \vee (1231; 12)\}$ – для смежных сторон,

$\{(1214; 12) \vee (1232; 12)\}$ – для противоположных сторон,

$\{(1234; 11)\}$ – для диагоналей.

Следует заметить, что ни один из этих выборов не дает симметрий (рис. 4).

Второй инвариант тоже допускает разные дополнительные равенства к первому, но только три из них порождают первые симметрии (см. рис. 4) первых трех полуправильных фигур (неправильные фигуры с двумя инвариантами на рисунке не изображены):

$(1221; 12|F_1)$ – полуправильный равносторонник («галстук») имеет ЗС с одной вершинной осью;

$(1212; 12|R_2)$ – параллелограмм имеет ЦС;

$(1214; 11|I_2)$ – трапеция имеет ЗС с дуальной осью.

Третий инвариант либо превращает в полуправильные неправильные фигуры двух инвариантов, либо добавляет две симметрии. На рис. 4 приведены следующие полуправильные фигуры трех инвариантов с одним и тремя элементами симметрии:

$(1221; 11|F_1), (1111; 12|F_1, F_2, R_2), (1212; 11|I_1, I_2, R_2), (1131; 11|I_2)$

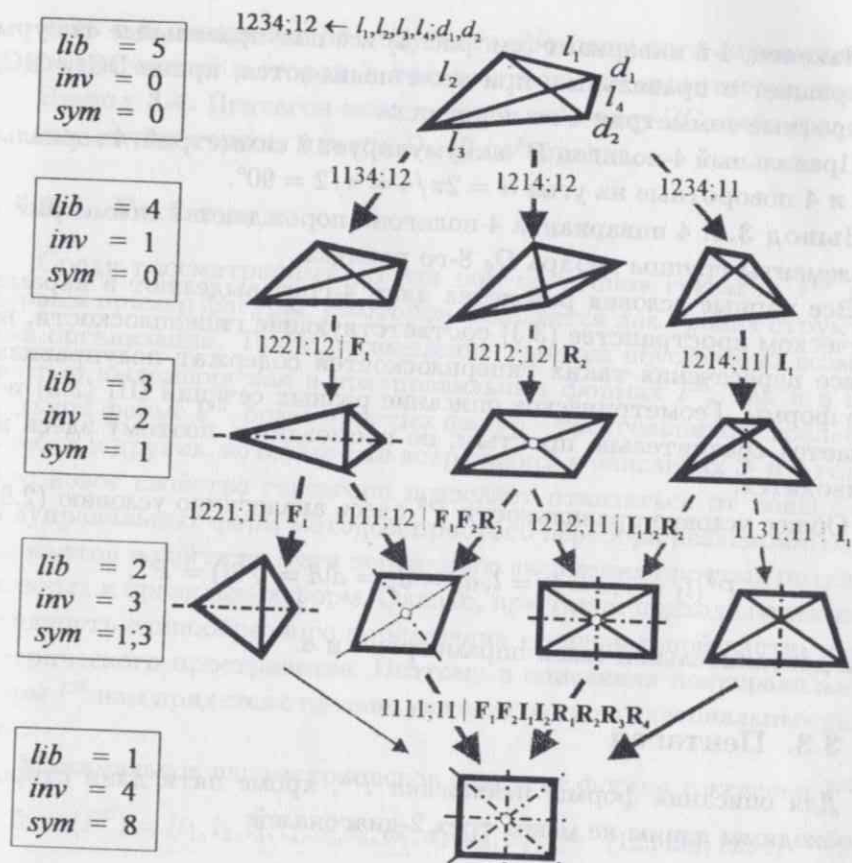


Рис. 4. Преобразование произвольного тетрагона в квадрат через последовательные условия равенства длин сторон и диагоналей. Исходное множество четырех длин сторон и двух длин диагоналей кратко кодируется 6-ти местным индексом: $(l_1, l_2, l_3, l_4; d_1, d_2) \rightarrow 1234; 12$. Затем индексный код используется для краткой идентификации условий равенства длин сторон и/или диагоналей (см. рис. 3). Дополнительно в конце индексного кода указываются (после вертикальной черты) операторы симметрий.

Наконец, 4-й инвариант (см. рис. 4) все полуправильные фигуры превращает в правильные, при этом появляются, кроме ЗС и ЦС, поворотные симметрии 4-го порядка.

Правильный 4-полигон P^4 аккумулирует 8 симметрий: 4 зеркальные и 4 поворотные на угол $\alpha = 2\pi/4 = \pi/2 = 90^\circ$.

Вывод 3.3. 4 инварианта 4-полигона порождают 7 симметрий – элементы группы диэдра D_4 8-го порядка.

Все парные условия равенства длин 4-гона выделяют в параметрическом пространстве (3.3) соответствующие гиперплоскости, но не все пересечения таких гиперплоскостей содержат полуправильные формы. Геометрическое описание разных сечений ПП (3.3) получается сравнительно простым, но громоздким, поэтому здесь не приводится.

Общее условие правильности P^4 здесь аналогично условию (2.9):

$$P^4(l_1 = \dots = l_4 = l, d_1 = d_2 = d | d = \sqrt{2}l) = P^4,$$

при дополнительной связи параметров l и d .

3.3. Пентагон

Для описания формы пентагона P^5 , кроме пяти длин сторон, необходимы длины не менее трех 2-диагоналей:

$$\text{form}(P^5) = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5; d_1, d_2, d_3) \rightarrow (12345; 123). \quad (3.4)$$

Нужно минимум 3 инварианта, чтобы образовалась одна ЗС (12321; 121| F_1), но при обязательном участии одного диагонального инварианта, тогда как 4 инварианта равенства длин всех сторон не дают какой-либо симметрии. Поэтому наращивание числа инвариантов до 5-ти, за счет равенств сторон не повышает правильность фигуры: (11111; 121| F_1), но 6-й диагональный инвариант сразу порождает правильный пентагон

$$(11111; 111|F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, R_5 | d = (1 + \sqrt{5})l) \equiv P^5,$$

то есть 6-й инвариант не допускает произвольного отношения d/l длин диагоналей и сторон, а только отношение «золотого сечения».

Вывод 3.4. Пентагон может иметь либо одну ЗС, либо сразу все симметрии группы диэдра D_5 10-го порядка.

3.4. Гексагон

Среди рассмотренных до сих пор полигонов гексагон P^6 дает первый пример фигуры, у которой появляется два уровня структурной организации. Такое расщепление уровней обусловлено возможностью выделения как в полуправильных формах P^6 , так и в правильной форме P^6 , более простых фигур – треугольников, трапеций, ромбов и других, которые уже встречались в описаниях 3- и 4-гонов. Это новое свойство гексагона позволяет отказаться от поиска его полуправильных форм методом простого перебора реляционных инвариантов и пойти по пути первичного выделения простых полуправильных и правильных форм. Однако, при таком подходе появляется трудность единообразного определения «диагональной части» параметрического пространства. Поэтому в описаниях полуправильных форм P^6 нам придется отдельно указывать типы диагональных условий.

Минимальное параметрическое описание формы гексагона P^6

$$\text{form}(P^6) = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6; d_1, d_2, d_3, d_4) \rightarrow (123456; 1234) \quad (3.5)$$

дает следующую нижнюю оценку числа инвариантов, обеспечивающих появление элементарной симметрии:

$$\min(\text{inv}(113355; 1133|F_1)) = 4.$$

Эта форма (рис. 5) содержит два равносторонне полуправильных 4-гона (два «галстука»), в образовании которых участвуют четыре 2-диагонали. Еще два 4-х инвариантных гексагона имеют в качестве базовых фигур равнобочную трапецию с дуальной ЗС I_1 и параллелограмм с ЦС R_2 :

$$(123432; 1221|I_1), (123123; 1231|R_2),$$

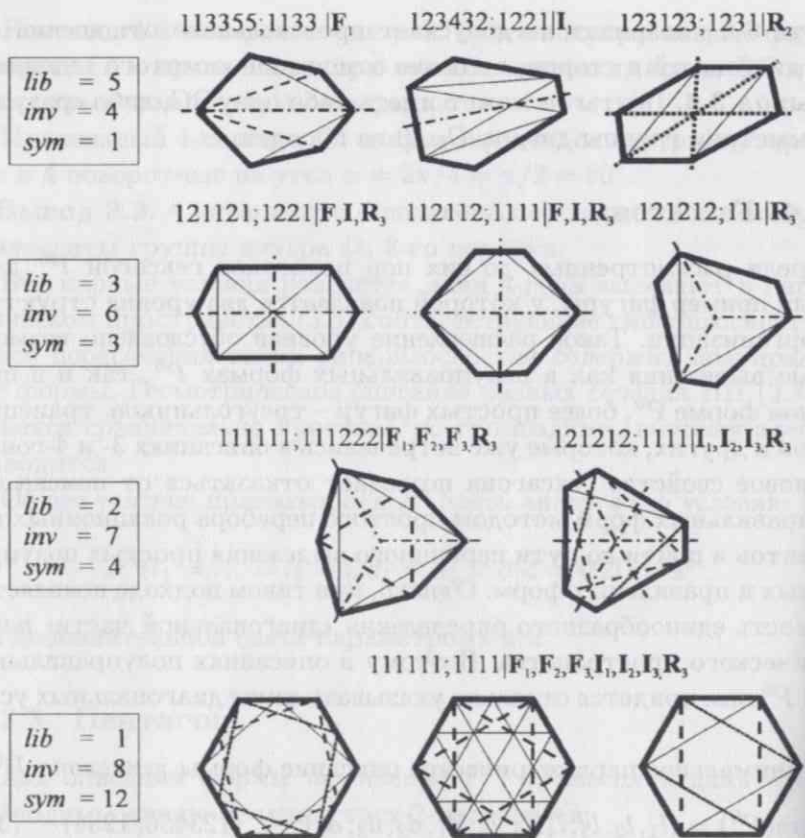


Рис. 5. Последовательные преобразования произвольного гексагона в правильный гексагон. Геометрические свойства отдельных фигур кодируются многоместными индексами (см. рис. 3, 4 и текст).

в формировании которых участвуют две пары 2- и 3-диагоналей.

Среди 6-ти инвариантных форм P^6 появляются фигуры 3-х симметрий:

(121212;111|R₃) – строится на базе правильного 3-гона, сторонами которого служат три 2-диагонали, и она обладает поворотной симметрией R₃;

(121121;1221|F, I, R₂) – на базе прямоугольника, который формируется двумя парами 2- и 3-диагоналей;

(112112;1111|F, I, R₂) – на базе ромба, сторонами которого служат 1,5-диагонали («полуторные»), соединяющие вершины P^6 с серединами сторон.

Семи инвариантные гексагоны замечательны тем, что порождают две структурные модификации диэдрической группы треугольника – с дуальными осями ЗС и с вершинными осями ЗС:

(121212;1111|I₁, I₂, I₃, R₃) – на базе двух трапеций, но присутствует и третья, боковые стороны которой являются 2-диагоналями;

(111111;111222|F₁, F₂, F₃, R₃) – на базе двух правильных 3-гонов, образованных всеми 2-диагоналями длин d_1 и d_2 , связь этих длин с длиной стороны такова: $3l^2 = d_1^2 + d_2^2 - d_1d_2$.

Наконец, следует отметить, что в правильном гексагоне P^6 , для задания которого требуется 8 инвариантов, порождающих 11 симметрий:

$$(111111;1111|F_1, F_2, F_3, I_1, I_2, I_3, R_6 | d = \sqrt{3}l) \cong P^6 \quad (3.6)$$

можно выделить полуправильные и правильные фигуры меньших порядков – треугольники, прямоугольники и ромб. Именно выделение таких подфигур существенно для классификации орнаментов гексагональной решетки.

Вывод 3.5. Для задания правильного гексагона требуется 8 инвариантов, которые порождают 11 симметрий группы диэдра D_6 ; классификация полуправильных гексагонов может быть осуществлена методом выделения полуправильных и правильных подфигур меньших порядков.

3.5. Многогоны

Полуправильные и правильные полигоны порядков $n > 6$ интересны не только в связи с классической проблемой их ручного построения циркулем. В наше время алгоритмических методов произвольных геометрических построений, то есть с помощью компьютера, появились более широкие и глубокие возможности сочетания

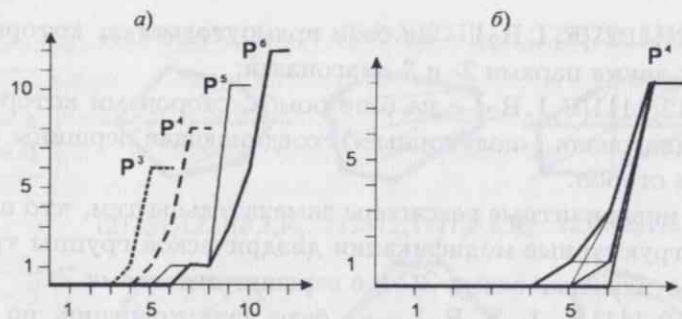


Рис. 6. Графики зависимостей числа симметрий (ордината) от числа инвариантов (абсцисса) для полигонов с разным числом вершин: а) сводный график для $n = 3, 4, 5, 6$ (см. текст); б) графики разных вариантов последовательных преобразований тетрагона.

аналитических и графических средств. Именно на пути освоения, развития и использования этих средств и должна формироваться, так сказать, новая «аналитико-алгоритмическая и когнитивно-графическая» геометрия. В такой перспективе тема полигонов (полиэдров и др.) может стать базовой для геометрической теории дискретных групп, поскольку она достаточно универсальна даже для всеобщего гуманитарного образования (с математическим уклоном).

В качестве наглядного резюме к предыдущим описаниям процедур синтеза симметрий приводится рис. 6, показывающий связь $\text{sym}(\text{inv}(P^n))$ – числа симметрий с числом инвариантов для всех описанных полигонов. На сводном рисунке приведены, условно говоря, «оптимальные» варианты последовательного задания инвариантов, но еще отдельно на примере тетрагона показаны вариации возможных последовательностей.

Для всех описанных примеров отмечался видимый и на рис. 6 эффект «циклического скачка», возникающий после задания последнего инварианта, порождающего правильную форму P^n . Такой скачок, на первый взгляд, кажется неожиданным, поскольку для синте-

за симметрий используются условия парных равенств, порождающие до «большого скачка» только зеркальные или центральные, то есть только инволютивные симметрии 2-го порядка. Тогда как циклические или поворотные симметрии обладают принципиально новым свойством – имеют циклы, порядок которых равен порядку полигона (числу вершин).

После знакомства с алгебраическими свойствами групп диэдра (см. ниже) станет ясно, что эффект «циклического скачка», присущий и системной организации этих групп, что находит свое выражение в определяющих условиях групп.

Прежде чем переходить к алгебраическим свойствам абстрактных групп, полезно рассмотреть алгебраические свойства операторов базисных симметрий и сравнить разные матричные представления таких операторов. Групповые свойства операторов не зависят от формы их представления, но представления зависят от прикладного аспекта, поскольку только через представления теория групп взаимодействует со своими «пользователями».

4. Операторы симметрий

Когда произвольный n -полигон P_n аналитически задается $(2, n)$ -матрицей вершинных векторов:

$$X(P^n) = (x_1, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

где 2-векторы $x_k = (x_{1k}, x_{2k})'$, $k = 1, \dots, n$, тогда описание симметрий фигуры сводится к определению множества

$$G(P^n) = \{G_1, \dots, G_m | G_k : X \rightarrow X, k = 1, \dots, m\},$$

содержащего все 2-матричные операторы самосоответствия фигуры. Умножение матрицы вершин X на оператор G_k дает новую матрицу вершин $G_k X$, которая отличается от старой только перестановкой столбцов. Фигура, конечно, называется неправильной, если $G(P^n) = \{E\}$ – содержит только тождественный оператор. Как уже

отмечалось, множество операторов симметрий правильного полигона образует группу диэдра.

4.1. Группа диэдра

В алгебраической теории групп (см. [1, 3] и др.) используется, как и для других алгебраических систем, абстрактное описание группы диэдра

$$D_n \equiv \{1, r, \dots, r^{n-1}, f, fr, \dots, fr^{n-1} | r^n = f^2 = (fr)^2 = 1\}, \quad (4.2)$$

главное преимущество которого состоит в том, что под двумя символами r и f можно подразумевать «все что угодно», если только удовлетворяются *определяющие условия* (ОУ), перечисленные после списка элементов группы. Согласно приведенным определениям, символ r – элемент циклической подгруппы C_n , а инволютивный символ f – элемент циклической подгруппы C_2 , кроме того свойством инволютивности обладает произведение fr .

Запись элементов группы в списке (4.2) ориентирована на демонстрацию достаточности знания только двух элементов r и f для реконструкции всей группы с помощью ОУ. Как видно, группа диэдра содержит два смежных класса элементов $\{1, f\}$ и представима в виде прямого произведения двух базисных циклических групп C_n и C_2 :

$$D_n \equiv C_2 \times C_n = \{1, f | f^2 = 1\} \times \{1, r, \dots, r^{n-1} | r^n = 1\}, \quad (4.3)$$

то есть два первых ОУ в (4.2) – это ОУ базисных подгрупп, а третье характеризует их кооперативное свойство.

Что не видно сразу из ОУ (4.2) – это, что *все* элементы 2-го смежного класса являются *инволютивными*. Доказательство этого важного свойства диэдрической группы таково:

$$\begin{aligned} (fr)^2 \equiv frfr = 1 &\rightarrow rfr = f \rightarrow r^2fr^2 = rfr = f \rightarrow \\ &\rightarrow r^kfr^k = f \rightarrow (fr^k)^2 = 1, \end{aligned}$$

где $k = 0, \dots, n$. Введем новые символы элементов:

$$f^k \equiv fr^k = r^{-k}f,$$

которые будем называть *главными инволюциями* (ГИ) группы диэдра. Теперь можно переписать каноническое определение (4.2) в избыточной, но в более удобопонимаемой форме:

$$D_n \equiv \{1, r, \dots, r^{n-1}, f_0, f_1, \dots, f_{n-1} | r^n = f_k^2 = 1; k = 0, \dots, n-1\}, \quad (4.4)$$

Вывод 4.1. Группа диэдра D_n содержит n циклических элементов $\{1, r, \dots, r^{n-1}\}$ и n инволютивных элементов $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$.

Всякая группа $G = \{g_k\}$ содержит также и свои обратные элементы: $g_k \in G \Rightarrow g_k^{-1} \in G$. Обратные элементы инволюций совпадают с самими элементами:

$$f^2 = 1 \Rightarrow f^{-1} = f.$$

Но обратные элементы n -циклического элемента r определяются иначе. Все степени r представляют различные элементы группы, $r^k \equiv r_k$, пока $k < n$, а при $k > n$ начинается новый цикл с элемента $r^n \equiv r_0 \equiv r_0 = 1$. Из циклического условия:

$$n = k + j \Rightarrow r^n = 1 \Rightarrow r^k \equiv r_k = r^{n-j} = r^{-j} \equiv r_{-j}$$

следует возможность разбиения всего цикла, при сохранении прежнего порядка элементов, на два полуцикла:

$$\begin{aligned} n = 2m : C_n = \{r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, r_m, r_{n-(m-1)}, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}\} = \\ = \{r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, r_m, r_{-(m-1)}, \dots, r_{-2}, r_{-1}\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} n = 2m + 1 : C_n = \{r_0, r_1, \dots, r_m, r_{n-m}, \dots, r_{n-2}, r_{n-1}\} = \\ = \{r_0, r_1, \dots, r_m, r_{-m}, \dots, r_{-2}, r_{-1}\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

полуциклы содержат взаимнообратные пары элементов, $\{r_1, r_{-1}\}$, $\{r_2, r_{-2}\}$, ... Для четных циклов $n = 2m$ имеется дополнительная возможность выделения *центрально симметричных* пар элементов,

потому как элемент r_m инволютивен, $(r_m)^2 \equiv r^n = 1$, и противоположен в цикле начальному элементу $r_0 = 1$. Это позволяет присвоить r_m значение отрицательной единицы и ввести центрально симметричное представление четной циклической группы:

$$C_n = \{1, r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, -1, -r_1, -r_2, \dots, -r_{m-1} | n = 2m\}. \quad (4.7)$$

Мы можем исключить элемент $r = (f_0 f_1)$ и из ОУ и из списка элементов группы диэдра (4.2), выделяя только главные инволютивные элементы:

$$D_n \equiv \{1, f_0 f_1, \dots, f_0 f_{n-1}, f_0, f_1, \dots, f_{n-1} | (f_0 f_1)^n = f k^2 = 1; k = 0, \dots, n_1\}. \quad (4.8)$$

но ОУ напоминает, что парные произведения ГИ – элементы n -циклической подгруппы:

$$f_0 f_k = r_k \rightarrow f_i f_j = f_0 r_i f_0 r_j = f_0 (r_i f_0 r_i) r_{j-i} = r_{j-i}. \quad (4.9)$$

Вывод 4.2. Группа диэдра D_n полностью определяется заданием главных инволюций, но их парные произведения образуют n -циклическую подгруппу.

Описание строения диэдрической группы с помощью инволюций более адекватно нашей задаче анализа связей зеркальных (инволютивных) и поворотных (n -циклических) симметрий правильных полигонов.

4.2. Матричные операторы

В предыдущем пункте, решая задачу выделения всех инволютивных компонент группы диэдра, мы заодно убедились в том, что тройка ОУ в каноническом задании этой группы (4.2) является *операционно полной* – позволяет полностью реконструировать все элементарные отношения, то есть вычислить результаты произведений произвольных пар элементов (мы не дали полного списка всех пар, как это делается в таблице умножения группы, но указали основные варианты таких произведений). В этом пункте мы рассмотрим операторное содержание ОУ группы диэдра.

Естественное операторное представление группы диэдра и симметрий полигонов дают 2-матрицы $\mathbf{R}^k \equiv \mathbf{R}(k\alpha)$ кратного поворота на угол $\alpha = 2\pi/n$, а также матрица $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(e_1)$ отражения относительно оси e_1 и единичная матрица \mathbf{E} :

$$\mathbf{R}^k \equiv \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Матрица $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\alpha)$ – оператор однократного поворота (против часовой стрелки) на угол α вокруг начала координат $o \equiv (0, 0)'$, $\mathbf{R}(0) \equiv \mathbf{R}^0 \equiv \mathbf{E}$ – тождественное преобразование. Три матрицы (4.10) представляют минимальный набор, необходимый для канонического задания всех операторов группы диэдра.

Введем изоморфное соответствие для элементов D_n : $1 \cong \mathbf{E}$, $r \cong \mathbf{R}$, $f \cong \mathbf{F}$, тогда операторный изоморфизм этой группы – это аналог определения (4.2):

$$D_n \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{F}, \mathbf{FR}, \dots, \mathbf{FR}^{n-1} | \mathbf{R}^n = \mathbf{F}^2 = (\mathbf{FR})^2 = \mathbf{E}\}. \quad (4.11)$$

Операторные ОУ выделяют три канонические *орбиты* циклических преобразований, итогом которых является тождественное преобразование \mathbf{E} :

- n -кратный поворот \mathbf{R}^n на угол α ;
- 2-кратное отражение \mathbf{F}^2 относительно оси абсцисс;
- более сложное преобразование \mathbf{FRFR} , содержащее два поворота и два отражения относительно оси абсцисс, которое эквивалентно 2-кратному отражению $(\mathbf{FR})^2$ относительно другой оси (см. ниже).

Можно сказать, что канонические орбиты соответствуют *каноническим симметриям* правильного полигона P^n . Обычно принято вычислять все симметрии P^n , то есть преобразовательные свойства всех операторов группы (4.11).

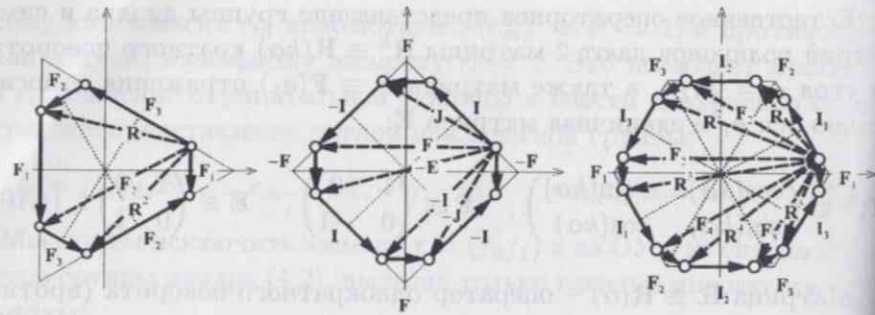


Рис. 7. Графы канонических орбит самосовмещений полигона ($n = 3, 4, 6$).

Центральные повороты. Выделим циклическую n -группу C_n умножим каждый оператор этой группы на произвольный ненулевой вектор $x_0 \neq o \equiv (0, 0)'$:

$$C_n \equiv \{E, R, \dots, R_{n-1} | x_0\} \rightarrow X(P^n) = (x_0, Rx_0, \dots, R^{n-1}x_0). \quad (4.12)$$

В результате получилась матрица $X(P^n)$ всех вершин $R^k x_0 \equiv x_k$ правильного полигона, начальной вершиной которого служит произвольная точка x_0 :

$$X(P^n) = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Действительно, если вектор x_0 задан в полярной форме, $x_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ - известен его угол наклона α_0 , то общий k -кратный поворот порождает при $k < n$ разные вершины:

$$R(k\alpha)x_0(\alpha_0) = x_0(\alpha_0 + k\alpha) \equiv x_k,$$

а при $k > n-1$ начинается новый цикл, поскольку $x_n = x_0, x_{n+1} = x_1$ и т.д.

Следствие 4.1. Каноническая орбита поворотных самосовмещений полигона представима графом (рис. 7) последовательных циклических переходов $x_{k+1} = Rx_k$, при дополнительном условии замыкания цикла $x_0 = Rx_{n-1}$.

Унифицируем выбор начальной точки: $x_0 = e_1$ и используем запись 2-матриц операторов поворота в виде строки двух векторов:

$$R^k = (r(k\alpha), Jr(k\alpha)) \equiv (r_k, Jr_k), \quad (4.13)$$

согласно определению (4.10), $R(\pi/2) = J \equiv (e_2, -e_1)$. Тогда матрица вершин (4.12) содержит первые столбцы операторов R^k :

$$X(P^n) = (e_1, Re_1, \dots, R^{n-1}e_1) \equiv (e_1, r_1, \dots, r_{n-1}). \quad (4.14)$$

Вывод 4.3. Поворотные операции самосовмещения P^n эквивалентны умножению матрицы вершин $X(P^n)$ на степени оператора R .

Главные инволюции. Элементы главных инволюций группы диэдра выделены в модифицированном абстрактном варианте определения группы (4.4). Формальный перевод этого определения на язык операторов - таков:

$$D_n \equiv \{E, R, \dots, R^{n-1}, F_0, F_1, \dots, F_{n-1} | R^n = F_k^2 = E; k=0, \dots, n-1\}, \quad (4.15)$$

в сравнении с (4.11), здесь $F_k \equiv FR^k = R^{-k}F$, то есть $F_0 = F$.

Когда точка e_1 является вершиной правильного полигона P^n , все остальные вершины расположены зеркально симметрично относительно оси абсцисс. Тогда зеркальное относительно e_1 -оси самосовмещение полигона описывается умножением матрицы вершин на оператор F :

$$FX(P^n) = (Fe_1, Fr_1, \dots, Fr_{n-1}) = (e_1, r_{n-1}, \dots, r_1), \quad (4.16)$$

вершина e_1 , как точка оси, и противоположная ей точка в случае четного числа вершин n неподвижны, а вершины зеркальных пар $\{r_1, r_{n-1}\}, \{r_2, r_{n-2}\}, \dots, \{r_k, r_{n-k}\}$ меняются местами.

Геометрический образ 3-й канонической орбиты зависит от выбора начальной точки. Для точки общего положения x_0 получается 4-х точечный контур $X_{1,4}(x_0)$ графа последовательных переходов (рис. 8):

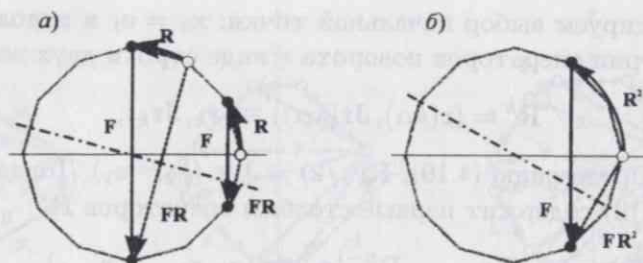


Рис. 8. Определение результирующих зеркальных осей для композиций преобразований, содержащих разные степени поворота R^k , а) $k = 1$; б) $k = 2$, и канонического зеркального преобразования F . направление результирующей оси не зависит от выбора начальной вершины (а), но зависит от степени поворота (б).

$$X_{1,4}(x_0) = \{x_0, x_1 = Rx_0, x_2 = FRx_0, x_3 = RFRx_0, x_4 = FRFRx_0 \equiv x_0\}$$

Вводя новый оператор $F_1 \equiv FR$, мы сужаем 4-х точечный переход до 2-х точечной инволюции, которая выделяет в множестве $X_{1,4}$ пары диагональных точек:

$$F_1 \equiv FR : X_{1,4} \rightarrow X_{1,2} = \{x_2 = F_1x_0, x_0 = F_1x_2\}.$$

С целью описания геометрических свойств инволюции F_1 выделим векторы разности $d_1 \equiv x_2 - x_0$ и суммы $d_2 \equiv x_2 + x_0$ диагональных точек, а также прямые L_1 и L_2 , коллинеарные этим векторам

$$L_1(\lambda_1; x_0, d_1) : x \equiv x_0 + \lambda_1 d_1, \quad L_2(\lambda_2; o, d_2) : x \equiv \lambda_2 d_2,$$

то есть прямая L_1 инцидентна точкам $\{x_0, x_2 = F_1x_0 \equiv x_2 + d_1\}$, прямая L_2 — точкам $\{o, d_2\}$, при этом векторы $d_1 \equiv (F_1 - E)x_0$ и $d_2 \equiv (F_1 + E)x_0$ ортогональны:

$$d_1' d_2 = x_0'(F_1' - E)'(F_1 + E)x_0 = 0.$$

Оператор F_1 можно интерпретировать как *зеркальную симметрию* (ЗС) точек прямой L_1 , осью которой служит ортогональная прямая L_2 , проходящая через начало координат — точку o — и через точку $d_2/2$ — середину отрезка, соединяющего преобразуемые точки x_0 и x_2 .

Применим определение нового оператора F_1 к вершинам полигона P^n :

$x_0 = e_1 \rightarrow x_2 = r_{n-1}, d_1 = r_{n-1} - e_1 \equiv l_{n-1}, d_2 = r_{n-1} + e_1 \equiv 2a_{n-1}$, где l_{n-1} — $(n-1)$ -я сторона полигона, a_{n-1} — средняя точка этой стороны:

$$d_2 \equiv (R^{-1} + E)e_1 = (R^{-1/2} + R^{1/2})R^{-1/2}e_1 = 2\cos(\alpha/2)r_{-1/2} \equiv 2a_{n-1}.$$

Если далее в качестве начальных брать другие вершины полигона r_k , то, как нетрудно убедиться, осью симметрии зеркальных пар $\{r_k, F_1 r_k\}$ всегда оказывается одна и та же центральная прямая $L(\lambda; o, a_{n-1})$, инцидентная средней точке $(n-1)$ -й стороны полигона.

Чтобы подготовить общее заключение о геометрических свойствах всех главных инволюций списка (4.15), рассмотрим еще оператор

$$F_2 \equiv FR_2 : x_0 = e_1 \rightarrow x_2 = r_{n-2}, d_1 \equiv r_{n-2} - e_1, d_2 \equiv r_{n-2} + e_1,$$

где $d_2 \equiv (R^{-2} + E)e_1 = (R^{-1} + R)R^{-1}e_1 = (2\cos(\alpha)E)r_{-1} = 2\cos(\alpha)r_{n-1}$, то есть ось симметрии коллинеарна вектору $(n-1)$ -й вершины r_{n-1} .

Рассмотренные примеры нетрудно обобщить на произвольные операторы главных инволюций $F_k \equiv FR^k = R^{-k}F$ и убедиться в чередовании двух типов осей ЗС, когда степень кратности поворота k изменяется от 0 до n :

- вершинные оси коллинеарны векторам вершин при четных k ;
- стороннецентрические («дуальные») оси коллинеарны векторам середин сторон при нечетных k .

Вывод 4.4. Главные инволюции группы диэдра D_n изоморфны зеркальным симметриям правильного полигона P^n , $f_k \cong F_k \equiv FR^k = R^{-k}F$; вершинные оси ЗС соответствуют четным номерам $k = 0, 2, \dots$, стороннецентрические («дуальные») – нечетным номерам $k = 1, 3, \dots$.

Переопределения. При каноническом определении зеркальных преобразований $F_k \equiv FR^k$ последовательные оси с ростом их номера k перемещаются по часовой стрелке, то есть в обратном порядке принятой нумерации вершин и сторон. Чтобы согласовать направления нумерации осей и вершин, следует в определении главных инволюций операторы R заменить на обратные:

$$F_k \rightarrow F_k \equiv FR^{-k} = R^k F;$$

Кроме того, если в новом определении операторов зеркальных симметрий однократные повороты R заменить на 2-кратные:

$$F_k \rightarrow F_k \equiv FR^{-2k} = R^{2k} F \quad \Leftarrow \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.17)$$

то при изменении k от 0 до n , оси ЗС последовательно проходят все вершинные направления, то есть все являются вершинными осями, что подходит для нечетных полигонов, когда $n = 2m+1$. Для четных полигонов удобно разобщить вершинные F_k и дуальные I_k ЗС:

$$n = 2m; \quad F_k \equiv FR^{-2k} = R^{2k} F, \quad I_k \equiv FR^{-2k-1} = R^{2k+1} F \\ k = 0, \dots, m-1. \quad (4.18)$$

Следовательно, для нечетных и четных полигонов целесообразно использовать разные операторные представления главных инволюций группы диэдра:

$$\{E, R, \dots, R^{n-1}, F_0, F_1, \dots, F_{n-1} | n = 2m+1\}, \quad (4.19a)$$

$$\{E, R, \dots, R^{n-1}, F_0, F_1, \dots, F_{m-1}, I_0, I_1, \dots, I_{m-1} | n = 2m\}. \quad (4.19b)$$

Дальнейшая классификация симметрий фигур производится в соответствии с этой номенклатурой операторов.

4.3. Собственные базисы полигонов

Переход к новым базисам часто используется в описаниях симметрий плоских решеток [2] с целью замены иррациональных координат вершин гексагонов целочисленными координатами, тогда и все матричные операторы симметрий гексагона оказываются целочисленными. Мы рассмотрим проблему базисных преобразований полигонов в более общем виде.

Преыдущие определения операторов симметрий даны в стандартном ортонормальном базисе плоскости, содержащем единичные векторы $\{e_1, e_2\}$, из которых образуется единичная базисная матрица $E \equiv (e_1, e_2)$. Как вершины полигона $X(P^n)$, так и диэдрические операторы самосовмещений вершин можно переопределить в произвольном косоугольном базисе $B \equiv (b_1, b_2)$, но групповые свойства новых представлений операторов останутся старыми, то есть групповые свойства операторов инвариантны относительно базисных преобразований.

Пусть x -точки определяются в E -базисе, а y -точки – в B -базисе: $x \equiv By$.

Тогда, если $x_2 = Ax_1$, то $y_2 = Cy_1$, где $C \equiv B^{-1}AB$ – смена базиса, как известно, индуцирует подобное преобразование линейных операторов.

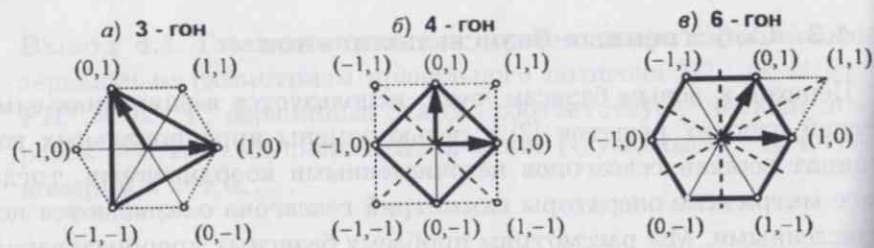
В данном случае нас интересуют собственные базисы (СБ) полигонов.

Определение 4.1. Собственным базисом полигона называется любая пара неколлинеарных вершинных векторов.

Учитывая предыдущую унификацию задания вершин полигона $X(P^n)$, см. (4.14), в качестве канонического варианта СБ выберем первую пару векторов:

$$B \equiv (e_1, r_1), \quad B^{-1} \equiv (e_1, q_1) \\ r_1 \equiv (\cos(\alpha), \sin(\alpha))', \quad q_1 \equiv (-\cos(\alpha), 1)' / \sin(\alpha).$$

В новом базисе операторы поворота и отражения становятся таковыми:

Рис. 9. Собственные базисы полигонов ($n = 3, 4, 5, 6$).

$$\mathbf{R}_B \equiv \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{B} = \mathbf{J} + 2 \cos(\alpha) \mathbf{E}_{22}, \quad \mathbf{F}_B \equiv \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{B} = \mathbf{F} + 2 \cos(\alpha) \mathbf{E}_{12}, \quad (4.20)$$

где \mathbf{E}_{ij} – 2-матрица, (ij) -элемент которой равен 1, а остальные нулю. Общие формулы для k -кратного поворота, согласно (4.10), в \mathbf{E} -, и в \mathbf{B} -базисе:

$$\mathbf{R}^k \equiv \cos(k\alpha) \mathbf{E} + \sin(k\alpha) \mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{R}_B^k \equiv \cos(k\alpha) \mathbf{E} + \sin(k\alpha) \mathbf{N} \quad (4.21)$$

можно записать в одинаковой форме, если выделить новую матричную «мнимую единицу» $\mathbf{N} \equiv \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{B}$.

Из формул (4.20) видно, что новобазисные операторы поворота и отражения имеют целочисленные представления только для трех углов:

$$\alpha = 2\pi/3, \pi/2, \pi/3 \Rightarrow 2 \cos(\alpha) = -1, 0, 1;$$

то есть только для СБ 3-, 4- и 6-гонов.

4-гон. Поскольку \mathbf{E} -базис является собственным для 4-гона, его векторы вершин и операторы его симметрий наиболее просто выражаются именно в этом базисе. Матрица вершин этой фигуры содержит орты положительных и отрицательных осей координат:

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}^4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(\pi/2), \mathbf{r}(\pi), \mathbf{r}(3\pi/2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2), \quad (4.22a)$$

а 8 операторов симметрий (см. рис. 9б), согласно четной версии (4.19b),

$$D_4 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{J}, -\mathbf{E}, -\mathbf{J}, \mathbf{F}, -\mathbf{F}, \mathbf{I}, -\mathbf{I}\} \quad (4.22b)$$

содержат 4 центрально-симметричные пары. Здесь обратим внимание на не комментированный ранее оператор дуальной ЗС $\mathbf{I} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$.

3-гон. Поскольку \mathbf{E} -базис не СБ для 3-гона, его векторы вершин не просто выражаются в нем, тогда как в СБ – проще (рис. 9а):

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}^3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(2\pi/3), \mathbf{r}(4\pi/3)) \Rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{P}^3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}), \quad (4.23a)$$

где $\mathbf{r}(2\pi/3) = (c, s)'$, $\mathbf{r}(4\pi/3) = (c, -s)'$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$,

$$c \equiv \cos(2\pi/3) = -1/2, \quad s \equiv \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

Аналогично различаются 6 операторов симметрий, ср. с (4.19а):

$$D_3 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} = \{\mathbf{E}, (\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}), (-\mathbf{e}, \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}), (-\mathbf{e}, \mathbf{e}_2), \mathbf{I}\} = \{\mathbf{E}, c\mathbf{E} + s\mathbf{J}, c\mathbf{E} - s\mathbf{J}, \mathbf{F}, c\mathbf{F} - s\mathbf{I}, c\mathbf{F} + s\mathbf{I}\}. \quad (4.23b)$$

6-гон. Заимствуя обозначения от 3-гона, имеем (рис. 9в):

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}^6) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(\pi/3), \mathbf{r}(2\pi/3), -\mathbf{e}_1, -\mathbf{r}(\pi/3), -\mathbf{r}(2\pi/3)), \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{P}^6) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e} + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),$$

где $\mathbf{r}(\pi/3) = (c, s)'$, $\mathbf{r}(2\pi/3) = (c, -s)'$, $c \equiv \cos(\pi/3) = 1/2, s \equiv \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Приведем сначала полный список символов операторов гексагонального базиса, основанный на общих определениях (4.19b):

$$D_6 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5, \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2\}, \quad (4.24b)$$

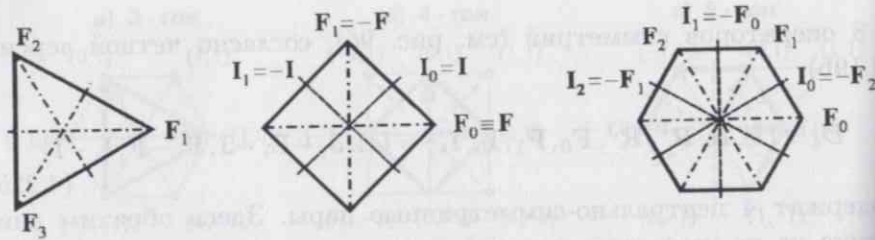


Рис. 10. Оси симметрий полигонов ($n = 3, 4, 6$). Для гексагона дуальные I -оси можно заменить на отрицательные F -оси, что обусловлено их взаимной ортогональностью: отрицательные «вершинные» оси в данном случае представляют дуальные (стороннецентрические) оси.

но как в списках вершин, так и в списках операторов возможно 2-кратное сокращение разнообразия символов за счет центральной симметрии. Действительно, учитывая, что

$$\mathbf{R}^3 = -\mathbf{E}, \mathbf{I}_0 = -\mathbf{F}_2, \mathbf{I}_1 = -\mathbf{F}_0, \mathbf{I}_2 = -\mathbf{F}_1, \quad (4.25a)$$

мы можем следующим образом представить операторы группы диэдра:

$$D_6 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, -\mathbf{E}, -\mathbf{R}, -\mathbf{R}^2, \mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_0, -\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_2\}. \quad (4.25b)$$

Отметим, что возможность символической замены дуальных I -осей на отрицательные F -оси обусловлена их взаимной ортогональностью (рис. 10). Поэтому полезно помнить: отрицательные «вершинные» оси в данном случае представляют дуальные (стороннецентрические) оси.

Операторы симметрий 6-гона в базисах 6-гона и 4-гона:

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{R}^2\} \Leftarrow \{(e_2, e_-), (e_-, -e_1)\} = \{c\mathbf{E} + s\mathbf{J}, -c\mathbf{E} + s\mathbf{J}\};$$

$$\{\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} \Rightarrow \{(e_1, -e_-), (e_-, e_2), -\mathbf{I}\} = \{\mathbf{F}, -c\mathbf{F} + s\mathbf{I}, -c\mathbf{F} - s\mathbf{I}\}$$

здесь $e_- \equiv -e_1 + e_2$.

В тех случаях, когда симметрии 6-гона и 3-гона рассматриваются совместно, более удобен единый базис. Ниже для сравнения приведены представления операторов 6-гона в базисе 3-гона:

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{R}^2\} \Rightarrow \{(e, -e_1), (e_2, -e)\};$$

$$\{\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} \Rightarrow \{(e_1, -e), \mathbf{I}, (-e, e_2)\};$$

Предупреждение: описанная в этом пункте номенклатура символов операторов симметрий 4-гона (4.22b), 3-гона (4.23b) и 6-гона (4.25b) используется в дальнейшем тексте и на рисунках (см. рис. 10).

5. Свободы самосовмещений

В этом разделе рассматриваются процедуры понижения числа симметрий правильной фигуры без изменения ее формы или, иначе говоря, методы редукции свобод самосовмещений правильного полигона. Для целей такой редукции используется метод «раскраски» элементарных зон полигона, который позволяет «фильтровать» отдельные типы симметрии – разрешать одни и запрещать другие, но некоторые одиночные симметрии все же не «фильтруются». Тем самым, этот метод позволяет изучать «синергии симметрий», которые отражают групповые свойства движений самосовмещений.

Комментарий: *синергией* в общем случае принято называть функциональную кооперацию компонент системной организации.

При преобразованиях неправильных форм фигур в полуправильные и правильные имеется возможность характеризовать последовательные этапы числом свобод деформаций $\text{lib}(P^n)$, а закрепленные несвободы деформаций интерпретировать как инварианты системной («фигурной») организации и сводить подсчет несвобод деформаций к числу инвариантов $\text{inv}(P^n)$.

С появлением же у фигуры симметрий появляются и новые свободы ее преобразований – свободы дискретных движений самосовмещений. В этом случае число симметрий $\text{sym}(P^n)$ становится мерой

свобод самосовмещений фигуры, роль которой в нашем рассмотрении играет полигон P^n . С ростом числа симметрий происходит увеличение свобод самосовмещений и предел для правильного полигона P^n устанавливается, как уже отмечалось выше, порядком группы диэдра: $\max(\text{sym}(P^n)) = \text{sym}(P^n) = |D_n| = 2n$.

5.1. Разнообразие подгрупп

Охарактеризуем кратко диэдрические подгруппы рассмотренных фигур.

3-гон. Группа «треугольника» D_3 знаменита в алгебре как минимальная некоммутативная группа, из-за этого она присутствует как «примерная» во всех учебниках алгебры. Состав подгрупп, исключая тривиальные (единичный элемент и вся группа) включает три осевые инволюции и 3-цикл (рис. 10):

$$C_{2,0} \cong \{E, F_0\}, C_{2,1} \cong \{E, F_1\}, C_{2,2} \cong \{E, F_2\}, C_3 \cong \{E, R, R^2\}, \quad (5.1)$$

инволюции представляют зеркальные симметрии, а 3-цикл – повороты.

4-гон. Группа «квадрата» D_4 тоже знаменита, но не только в алгебре. Она содержит 5 инволюций, первая из которых – центральная

$$\begin{aligned} C_{2,0} \cong \{E, -E\}, C_{2,1} \cong \{E, F\}, C_{2,2} \cong \{E, -F\}, \\ C_{2,3} \cong \{E, I\}, C_{2,4} \cong \{E, -I\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

а остальные представляют две пары взаимно ортогональных вершинных и сторонних симметрий (рис. 10).

Три подгруппы 4-го порядка включают циклическую (поворотную), и еще два симметричных варианта «четверной группы Клейна», являющиеся по сути диэдрическими 2-го порядка, то есть D_2

$$C_{4,0} \cong \{E, R, -E, -R\}, C_{4,1} \cong \{E, F, -E, -F\}, C_{4,2} \cong \{E, I, -E, -I\}, \quad (5.3)$$

5-гон. Группа «пентагона» D_5 упоминается нами как еще один пример простой организации – ее подгруппы включают только инволюции (5-ти вершинных осей) и циклическую 5-группу. Эти подгруппы можно не выписывать ввиду их очевидности.

6-гон. Группа «гексагона» D_6 – самая богатая своими подгруппами из всех предыдущих. Среди 2-подгрупп из-за четности имеется центральная, а также, в отличие от квадрата, не две, а три пары взаимно ортогональных осевых инволюций, но знакоразличные пары, как специально отмечалось (4.25а), представляют и вершинную, и дуальную симметрии (рис. 10):

$$C_{2,0} \cong \{E, -E\}, C_{2,1+k} \cong \{E, F_k\}, C_{3,4+k} \cong \{E, -F_k\}, k=0, \dots, 2. \quad (5.4)$$

Поскольку через вершину гексагон есть треугольник, то имеется циклическая 3-подгруппа, образованная 2-кратными поворотами:

$$C_3 \cong \{E, R^2, R^4\}. \quad (5.5)$$

Все три 4-подгруппы являются диэдрическими D_2 и относятся к парам вершинных и дуальных осей:

$$D_{2,k} \cong \{E, F_k, -E, -F_k\}, k=0 \dots 2. \quad (5.6)$$

Наконец, имеются три 6-подгруппы, одна из них – циклическая 6-группа, в которой, из-за четности, можно выделять центральную симметрию:

$$C_6 \cong \{E, R, R^2, -E, -R, -R^2\}; \quad (5.7)$$

две другие – это группы диэдра D_3 для двух треугольников – основного и дуального, повернутого на $\pi/2$ относительно первого:

$$D_{3,1} \cong \{E, R^2, R^4, F_0, F_1, F_2\}, D_{3,2} \cong \{E, R, R^2, -F_0, -F_1, -F_2\}. \quad (5.8)$$

Списки подгрупп наглядно показывают, какие сочетания элементов группы могут существовать автономно или присутствовать в подгруппах. Кроме того, чем больше типов подгрупп, тем больше и вариантов объединений самих подгрупп, тем шире спектр симметричных форм.

5.2. Синергии симметрий

Принципиальное отличие свобод самосовмещений от свобод деформаций выявляется в рассмотренных выше процедурах синтеза симметрий и проявляется в том, что симметрии не являются в той же мере независимыми как деформации. В этой связи естественно выделить следующий вопрос

Вопрос 5.1. Какова природа внутренних несвобод симметрий или существования «симметричных синергий»?

Ответ на выделенный вопрос удобно дать сначала в абстрактной форме. Симметричные синергии отражают существование дополнительной структурной организации группы диэдра, а именно, существование *подгрупп*.

Богатство структурной организации всякой группы – в множестве ее подгрупп, которые в изолированном виде являются группами. Поэтому можно говорить, что, с одной стороны, всякая составная группа образована из некоторого множества «простых» групп, а с другой стороны, всякую составную группу можно разлагать на подгруппам – представлять в виде множеств подгрупп. Число подгрупп зависит не только от порядка группы, но и от того, является ли этот порядок простым или составным числом (теорема Лагранжа). В частности, все циклические группы простых порядков не имеют подгрупп, но циклические группы, в отличие от других групп, существуют для всех порядков. Из-за этого уникального свойства циклические группы служат базовыми для формирования многих других групп, к которым относится и группа диэдра, согласно (5.3).

При малом числе типов подгрупп, как у 3- или 5-гона (это справедливо для всех диэдрических групп простого порядка), любое объединение подгрупп является структурно жестким – порождает всю группу. Поясним этот эффект порождения на примере подгрупп 3-гона (5.1).

Только в таком разобобщенном виде операторы (5.1) образуют независимые группы, а инволюции могут служить симметриями правильных фигур (равнобедренных треугольников). Стоит только

объединить минимум две инволюции, например объявить принадлежность группе G элементов $\{E, F_0, F_2\}$, как автоматически, по определению группы, в ней появляются, то есть должны присутствовать, все остальные элементы группы диэдра D_3 .

(По определению: $F_0 \in G \& F_1 \in G \Rightarrow F_0 F_2 \equiv R \in G$.)

Аналогичная жесткость объединения инволюций присуща, как мы видели, и пентагону: здесь тоже любая пара инволюций порождает «все».

С другой стороны, у 4- и 6-гонов наблюдается появление «мягкости» к сочетаниям симметрий, из-за чего и возрастает число подгрупп. Понятно, что с ростом порядка группы диэдра, при условии увеличения числа простых множителей порядка, возрастает и число разных типов подгрупп, то есть условия сочетаемости становятся все более мягкими. Но несмотря на такие тенденции расширения сочетаемости, определяющие условия группы диэдра для всех порядков пишутся *одинаковым* образом. Ключевыми в этих определениях являются два элемента: $f_0 \equiv f$ и $f_1 \equiv fr$, см. (4.2), которые в геометрической интерпретации представляют пару смежных инволюций вершинной и дуальной осей.

Вывод 5.1. Пара смежных зеркальных симметрий вершинного и дуального типов является порождающей для группы диэдра произвольного порядка.

Итак, если на описанные выше этапы синтеза симметрий посредством реляционных инвариантов накопления правильных свойств n -угона P_n посмотреть с точки зрения структуры подгрупп полной группы диэдра правильного n -угона $D_n(\mathbb{P}^n)$, то нетрудно заключить, что все промежуточные полуправильные формы воспроизводят только разные подгруппы симметрий того множества симметрий, которые имеются у итоговой правильной формы. Переформулируем это общее положение:

Симметричный императив. Полуправильные формы фигуры не могут содержать симметрии, отсутствующие в правильной форме.

Описанный выше синтез симметрий интересен также другим императивом – демонстрацией отсутствия у циклической симметрии, так сказать, собственной формы, содержащей только циклические симметрии, и не содержащие других, нециклических симметрий.

Вопрос 5.2. Проявляется ли в императиве «циклической формы» геометрическая специфика фигуры, как системного объекта?

Иначе говоря, вопрос сводится к тому, можно ли построить фигуру, обладающую только циклическими симметриями. Для ответа на него рассмотрим специальный метод редукции числа симметрий правильной фигуры.

5.3. Зональные симметрии

Операторы симметрий (ОС) однозначно определяются на множестве вершин фигуры, но их действие можно распространить на все точки фигуры и даже всей плоскости. Наблюдая результаты расширенных действий ОС, можно обратить внимание, что правильный полигон при этом разбивается на конечное число самосовмещающихся зон, равное удвоенному числу вершин $2n$, то есть порядку группы диэдра. Естественное разбиение полигона на *зоны самосовмещения* (ЗСС) производят оси зеркальных симметрий, все пересекающиеся в центре поворотных симметрий (рис. 10).

Вывод 5.2. Каждый правильный полигон имеет внутреннюю организацию, порождаемую зональной триангуляцией внутренней области всеми осями зеркальных симметрий.

С целью различения смежных и других ЗСС удобно ввести дополнительную раскраску всех их внутренних точек, например черную («бинарную»). Поскольку все ЗСС располагаются веерообразным образом относительно центра полигона, то их можно переименовать по кругу – против часовой стрелки от 1 до $2n$. Тогда для классификации вариантов раскрасок удобно ввести зональные векторы $\mathbf{z} \equiv (z_1, \dots, z_{2n})'$, элементы которых принимают значения 0 или 1 для белых и черных зон, соответственно.

Назовем раскраску *базисной*, когда $\mathbf{z} = \mathbf{e}_k$ – только k -й элемент

равен 1, остальные равны 0, $k = 1 \dots 2n$.

Очевидно, всякая зональная раскраска представима суммой базисных. При сложении произвольных пар раскрасок выполняются следующие локальные правила суммирования: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$.

Пусть σ – общий символ оператора симметричного преобразования полигона, частным случаем которого служат описанные выше матричные операторы. Тогда при действии оператора на раскрашенный полигон $[P^n]$ некоторый заданный вектор раскраски \mathbf{z}_1 в общем случае преобразуется в другой вектор \mathbf{z}_2 ,

$$\sigma[P^n] : \mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{z}_2 \vee [P^n] : \mathbf{z}_2 = \sigma(\mathbf{z}_1). \quad (5.9)$$

Определение 5.1. Раскрашенный полигон $[P^n]$ называется зонально симметричным, если его зональный вектор \mathbf{z} инвариантен относительно преобразования симметрии $\mathbf{z} = \sigma(\mathbf{z})$.

Следствие 5.1. *Базисные векторы раскрасок $\mathbf{z} = \mathbf{e}_k$ асимметричны для любого k .*

Применим к базисной раскраске преобразование $\sigma : \mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_j$ – получим, согласно следствию 5.1, другую базисную раскраску. Назовем объединенный вектор

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \sigma(\mathbf{z}_1) \equiv \sigma\{\mathbf{z}_1\} \quad (5.10)$$

операторной раскраской, заданной раскраской \mathbf{z}_1 . Если заданная раскраска – базисная, операторная раскраска называется *фундаментальной*.

Следствие 5.2. *Если σ – инволюция, то $\sigma\{\mathbf{e}_k\}$ – симметрична для любого k .*

Если ρ – оператор поворота, то фундаментальная раскраска \mathbf{e}_k асимметрична, но если $R = \{\rho\}$ – циклическая группа поворотов, то фундаментальная раскраска $R\{\mathbf{e}_k\}$ симметрична относительно всех операторов группы, то есть всех поворотов. Обобщением этого примера служит следующая лемма.

Лемма 1. *Фундаментальные операторные раскраски подгрупп инварианты (симметричны) относительно всех операторов данной подгруппы.*

Общее число раскрасок полигона $|\{P^n\}| = 2^{2^n}$ – велико, но в общем множестве раскрасок можно выделить симметричные, которые распадаются на подмножества раскрасок подгрупп. Каждое подмножество содержит эквивалентные раскраски и поэтому его можно идентифицировать одним представителем.

Вывод 5.3. Множество симметричных раскрасок полигона идентифицирует структуру его подгрупп симметрий.

На рис. 11 приведены примеры типовых раскрасок 3-, 4- и 6-гона, которые представляют соответствующие подгруппы симметрий.

Обратим отдельное внимание на раскраску типа «вертушки», которая представляет только циклическую подгруппу поворотов и не содержит других симметрий. Следовательно, на вопрос 2, сформулированный в конце предыдущего раздела, можно ответить утвердительно: существует такая форма, расширенная процедурой «вертушечной» раскраски, которая обладает только циклическими симметриями.

Таким образом, императив «циклической формы» частично нарушается «вертушечной» раскраской – выделяется вся циклическая группа фигуры, но не отдельные ее элементы и подгруппы.

6. Заключение

Итак, оценка степени правильности геометрического объекта может производиться по числу симметрий – чем большим числом симметрий обладает объект, тем более правильным он является. Хотя про некоторые очень сложные системы и говорится – нет предела их совершенству, но про простые системы такого не скажешь – предел их правильности существует. Монотонную связь правильности с числом симметрий отражает следующее замечание.

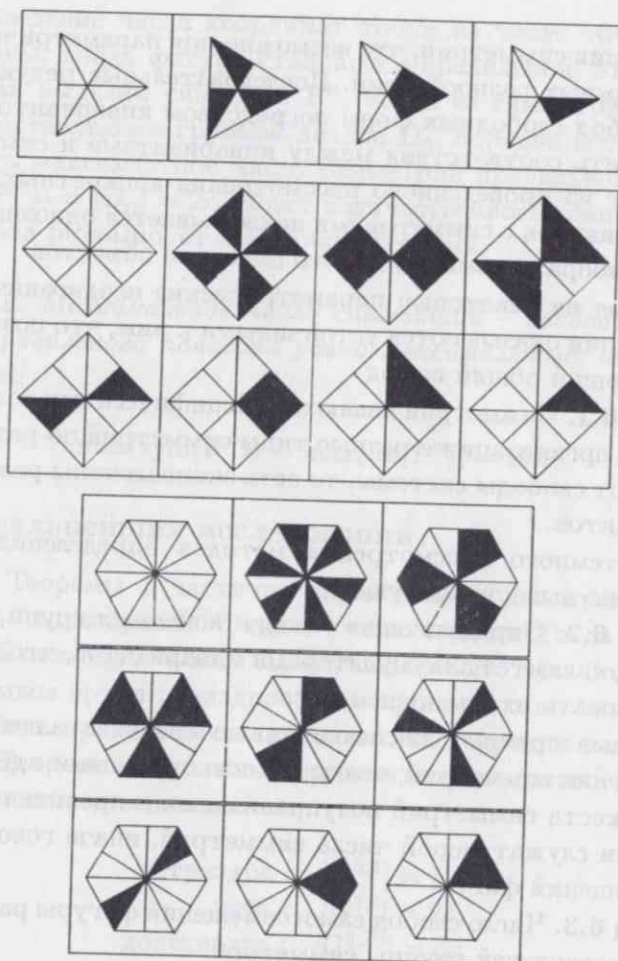


Рис. 11. Примеры типовых раскрасок 3-, 4- и 6-гона, представляющие соответствующие подгруппы симметрий.

Эпистема. Конечная система называется правильной, если она обладает максимальным числом симметрий.

Переход к языку инвариантов требует разработки новой схемы

классификации симметрий, что возможно при параметрическом описании системных разнообразий. Последовательные редукции избыточных свобод свободных форм посредством инвариантов позволяют установить соответствия между инвариантами и симметриями. Как следует из проведенного рассмотрения конкретных объектов, связь инвариантов с симметриями не оказывается однозначной и зависит от выбора параметрического описания объектов.

Несмотря на некоторые параметрические неоднозначности, общие тенденции оказываются устойчивыми к ним, что позволяет сделать следующий общий вывод

Вывод 6.1. Симметрии являются специфическими условиями системной организации и разные типы симметрий по-разному ограничивают свободы системы, то есть эквивалентны разному числу инвариантов.

Из системного рассмотрения методов определения конечных групп можно вывести следующее.

Вывод 6.2. Определяющие условия конечных групп, как и симметрии, являются аккумуляторами инвариантов, что и позволяет использовать их в меньшем числе.

Конечные группы, как лаконичные средства алгебраического представления симметрий, являются естественными идентификаторами множеств симметрий полуправильных и правильных фигур, их порядки служат мерой числа симметрий, иначе говоря – свобод самосовмещений фигур.

Вывод 6.3. Число свобод самосовмещений фигуры равно порядку соответствующей группы симметрий.

Для полигонов предыдущую эвристику «максимальной правильности» можно сформулировать в виде теоремы, которую мы тут же и докажем.

Сравним свободы деформаций со свободами самосовмещений. Пусть P^n – общий символ плоской фигуры полигонального типа, имеющей n вершин. Число свобод деформации такой фигуры равно сумме свобод плоских перемещений вершин, поэтому для случая отсутствия ограничений мы можем подсчитать $\max(\text{lib}(P^n))$

$2n$ (произведение числа координат точки на число точек). С другой стороны, когда фигура становится правильной, этот предельный случай выделим символом P^n , тогда ее симметрии алгебраически представляются группой диэдра D_n , порядок которой $|D_n| = 2n$, то есть максимальное число симметрий правильного полигона $\max(\text{sym}(P^n)) = |D_n| = 2n$. Факт количественного совпадения двух видов свобод резюмирует следующая теорема.

Теорема 1. Максимальное число симметрий – свобод самосовмещений – правильного полигона равно максимальному числу свобод деформаций:

$$\max(\text{sym}(P^n)) = \max(\text{lib}(P^n)) = 2n.$$

Тема дальнейших исследований

Аналог Теоремы 1 частично справедлив и для правильных 3-мерных тел – полиэдров $P^{3,n}$, где n – число вершин. Тогда для свобод деформаций полиэдров имеем оценку: $\max(\text{lib}(P^{3,n})) = 3n$. Если $G^{3,n}$ – общий символ групп полиэдров, ранжированных по числу вершин n , то для пяти правильных платоновых тел порядки их групп, по аналогии с Теоремой 1, должны определяться следующей формулой: $|G^{3,n}| = 3n$, которая верна для

$$\text{тетраэдра : } |G^{3,4}| = 12,$$

$$\text{куба : } |G^{3,8}| = 24,$$

$$\text{додекаэдра : } |G^{3,20}| = 60.$$

Но группа октаэдра $G^{3,6}$ изоморфна группе куба, то есть $|G^{3,6}| = 24 > 18$, а группа икосаэдра $G^{3,12}$ изоморфна группе додекаэдра, то есть $|G^{3,12}| = 60 > 36$.

Таким образом, для трех тел – тетраэдра, куба, додекаэдра – 3-мерный аналог Теоремы 1 справедлив, а для двух – октаэдра и икосаэдра – нет. Причину последней несправедливости следовало бы выяснить.

Список литературы

- [1] Вейль Г. Симметрия. М.: Наука, 1968.
- [2] Жидков Н.П., Щедрин Б.М. Геометрия кристаллического пространства. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [3] Скорняков Л.А. Элементы алгебры. М.: Наука, 1980.
- [4] Смолянинов В.В. Структура, функция, управление – системно-конструктивный подход // Биологические мембраны. Т. 14. №6. 1997. С. 574–583.
- [5] Смолянинов В.В. От инвариантов геометрий к инвариантам управления // Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987. С. 66–110.
- [6] Смолянинов В.В. Математические модели биологических тканей. М.: Наука, 1980.
- [7] Шубников А.В., Копчик В.А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972.

О восстановлении подтекста при трансляции мульти-медиа языков

Нгуен Дык Тхао

При трансляции текстовых описаний на видео-язык почти всегда возникает проблема восстановления подтекста. Это обусловлено особенностями естественного языка. В работе предлагается методика решения этой проблемы при трансляции пространственных и пространственно-временных отношений с ограниченного естественного языка на видео-язык.

Разработка мульти-медиа систем, обрабатывающих текстовую, графическую и звуковую информацию, началась сравнительно недавно. Назначением таких систем является усиление выразительных средств представления информации в ЭВМ. Существующие системы обладают рядом недостатков: они не способны визуализировать богатый набор пространственных и пространственно-временных (динамических) отношений, в них отсутствуют функции анализа сцены на основе знаний о физических и геометрических свойствах объектов, в них отсутствуют средства восстановления подтекста.

В работе предлагается методика решения проблемы адекватной трансляции пространственных и пространственно-временных отношений с ограниченного естественного языка на видео-язык. В этой методике большое внимание уделено восстановлению подтекста. Описан разработанный по этой методике динамический графический визуализатор.

Сначала рассмотрим трансляцию пространственных отношений между объектами (статических сцен). Статическую сцену будем называть кадром.