Таким образом, формулы (11) и (12) определяют функционал $\overline{\sigma} \sim \overline{\epsilon}$, заданный системой уравнений в вариациях (10) и могут быть проинтегрированы вдоль траектории деформаций.

Список литературы

[1] Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П , Молодцов И.Н. Нелокальная теория структурированных композитных материалов // Механ. композит. материалов. 1984. №3. С. 408–416.

[2] Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н. Динамическая калибровка диссипации в композитных нелокальных средах // Механ. композит. материалов. 1985. №2. С. 217–224.

[3] Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 272.

Метод параметрической устойчивой идентификации динамического битового трафика в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания

А.Н. Назаров

1. Введение

Разработка механизмов управления ресурсами и защиты от перегрузок в сетях широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания (ШЦСИО) на технологии АТМ представляет собой сложную и многоплановую задачу.

Новые подходы и методы ее решения обусловлены следующими особенностями сетей АТМ [1]:

– необходимостью удовлетворения требований пользователей к полосе пропускания (необходимой пропускной способности линий связи) и качеству обслуживания, выраженному в вероятностно-временных характеристиках процессов доставки информации для очень широкого диапазона применений;

– в отличие от традиционных пакетных сетей узким местом в высокоскоростных сетях АТМ является не время передачи по каналу, а скорость обработки пакетов в узлах коммутации и время распространения сигналов, которое полностью характеризуется битовой скоростью передачи информации пользователя.

При решении широкого круга задач, связанных с идентификацией управляемых систем, зачастую используется схема Гаусса-Маркова в различных модификациях [2], [3]–[7]. Данный подход позволяет строить в виде аппроксимирующего многочлена сглаживающую кривую, являющуюся в некотором смысле наилучшим приближением к реальному движению объекта управления для заданного интервала времени.

Однако, для широкого класса практических задач характерно наличие измерительной информации не только о фазовых координатах управляемого объекта, но и об их производных различных порядков (расширенная модель наблюдений). В работе [4] предложен метод параметрической идентификации динамических систем с учетом расширенной модели наблюдений. Однако система линейных алгебраических уравнений для определения индентифицируемых параметров модели движения имеет тенденцию к потере обусловленности с увеличением порядка сглаживающей кривой, что приводит к неустойчивости приближенного решения исходной задачи.

В работах [6, 8, 9, 10] показано, что многие обратные задачи, в том числе задача идентификации параметров на базе расширенной модели наблюдений, являются некорректными. Причиной этой некорректности являются погрешности задания входной матрицы системы линейных алгебраических уравнений, а также погрешности получаемых от системы датчиков измерений фазовых координат и их производных. При этом наличие ошибок округления и их накопление во время обработки данных, а также шумы измерительного канала являются принципиально неустранимыми [6], [8]–[10].

В данной работе в рамках теории регуляризации попробуем получить конечные аналитические соотношения для идентификации текущих параметров модели динамического трафика в случае расширенной модели наблюдений, позволяющие строить алгоритмы, устойчивые к погрешностям измерений и входных данных. Возможность устойчивого решения достигается за счет использования априорной информации качественного и количественного характера, по-

зволяющей сузить неограниченное множество допустимых оценок идентифицируемых параметров к более узкому классу оценок, близких к некоторому априорно заданному вектору.

2. Общая постановка задачи

Пусть имеется расширенная модель наблюдений

$$h_{\lambda n}^{(k)} = v_n^{(k)[\lambda]} + \Delta h_{\lambda n}^{(k)},\ \lambda = 0, 1, \ldots, L-1;\ n = 0, 1, \ldots, N, \tag{2.1}$$

соответствующая некоторой сплайн-интерполяции динамической функции количества передаваемой абонентом k-ой службы битовой информации $v^{(k)}(t)$

$$v^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_n-1} a_{nm}^{(k)} \psi_{nm}^{(k)}(t) I(t \in [t_n, t_{n+1}]), \tag{2.2}$$

где $v^{(k)[\lambda]}(t)$ – производные от динамической функции количества передаваемой битовой информации, а в точках t_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, $v^{(k)[\lambda]}(t_n) = v_n^{(k)[\lambda]} = \frac{d^\lambda v^{(k)}(t)}{dt^\lambda}\Big|_{t=t_n}$.

Формула (2.2) задает комбинацию известных независимых функций с параметрами $a_{n0}^{(k)}, a_{n1}^{(k)}, \ldots, a_{nM_n-1}^{(k)}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, подлежащими идентификации на каждом временном отрезке $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Полагаем, что случайные ошибки наблюдений $\Delta h_{\lambda n}^{(k)} = \Delta h_\lambda^{(k)}(t_n)$ некоррелированы и характеризуются нулевым математическим ожиданием и соответствующей дисперсией $(\sigma_{\lambda n}^{(k)})^2 = \frac{(\sigma_{0\lambda}^{(k)})^2}{w_{\lambda,n}^{(k)}}$, где $w_{\lambda,n}^{(k)}$ – известные положительные веса измерений, $(\sigma_{0\lambda}^{(k)})^2$ – некоторый безразмерный коэффициент [2, 9], зависящий от порядка производной λ.

По аналогии с [4, 10] введем вектор невязок, соответствующий расширенной модели наблюдений

$$\delta^{(k)} = H^{(k)} - \hat{V}^{(k)} = H^{(k)} - \Psi^{(k)} \hat{A}^{(k)}, \tag{2.3}$$

где

$$H^{(k)} = \{H_0^{(k)}, H_1^{(k)}, \dots, H_{L-1}^{(k)}\}^T,\ H_j^{(k)} = \{h_{j0}^{(k)}, h_{j1}^{(k)}, \dots, h_{jN-1}^{(k)}\},$$
$$j = 0, 1, \dots, L-1,$$

$$\Psi^{(k)} = \begin{pmatrix} \Psi_0^{(k)} \\ \Psi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \Psi_{L-1}^{(k)} \end{pmatrix},\ \psi_j^{(k)} = \{\psi_{nm}^{(k)[j]}, n = \overline{0, N-1}, m = \overline{0, M-1}\},$$
$$j = 0, 1, \dots, L-1,$$

$$\hat{V}^{(k)} = \{\hat{V}_0^{(k)}, \hat{V}_1^{(k)}, \dots, \hat{V}_{L-1}^{(k)}\}^T,\ \hat{V}_j^{(k)} = \{\hat{v}_0^{(k)[j]}, \hat{v}_1^{(k)[j]}, \dots, \hat{v}_{N-1}^{(k)[j]}\},$$
$$j = 0, 1, \dots, L-1,$$

$$\hat{A}^{(k)} = \{\hat{A}_0^{(k)}, \hat{A}_1^{(k)}, \dots, \hat{A}_{L-1}^{(k)}\}^T,\ \hat{A}_j^{(k)} = \{\hat{a}_{nm}^{(k)[j]}, n = \overline{0, N-1},$$
$$m = \overline{0, M-1}\},\ j = 0, 1, \dots, L-1,$$

символ «ˆ» указывает на случайный характер процесса идентификации.

Вектор оптимальных оценок идентифицируемых параметров находится [12] из условия минимума квадрата евклидовой нормы вектора невязок расширенной модели (2.3):

$$\|H^{(k)} - \hat{V}^{(k)}\|^2 = [H^{(k)} - \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}]^T W^{(k)} [H^{(k)} - \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}], \quad (2.4)$$

где $W^{(k)} = \mathrm{diag}\{w_{0,0}^{(k)}, w_{0,1}^{(k)}, \dots, w_{0,N-1}^{(k)}, \dots, w_{L-1,0}^{(k)}, \dots, w_{L-1,N-1}^{(k)}\}$.

С учетом (2.4) искомая оценка $\hat{A}^{(k)}$ вектора параметров $A^{(k)}$ находится как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\Psi^{(k)T} W^{(k)} \Psi^{(k)} \hat{A}^{(k)} = \Psi^{(k)T} W^{(k)} H^{(k)}. \quad (2.5)$$

В соответствии с [2, 10] оценка

$$\hat{A}^{(k)} = \left(\Psi^{(k)T} W^{(k)} \Psi^{(k)}\right)^{-1} \Psi^{(k)T} W^{(k)} H^{(k)}, \quad (2.6)$$

являющаяся решением уравнения (2.5), имеет минимальную дисперсию среди множества всех линейных несмещенных оценок.

Рассмотрим данную задачу с позиций классической теории регуляризации. Уравнение (2.5) есть частный случай общего операторного уравнения

$$V^{(k)} a^{(k)} = u^{(k)},\ a^{(k)} \in A_{(k)},\ u^{(k)} \in U_{(k)}, \quad (2.7)$$

где $A_{(k)}, U_{(k)}$ – нормированные пространства. Предположим, что существует единственное решение $\bar{a}^{(k)}$ точного уравнения $V^{(k)} a^{(k)} = \bar{u}^{(k)}$, при этом $\bar{a}^{(k)} \in A_{(k)}$, $\bar{u}^{(k)} \in U_{(k)}$. Пусть $\bar{u}^{(k)}$ известно с погрешностью $\delta^{(k)}$, то есть $\|\bar{u}^{(k)} - u_{\delta(k)}^{(k)}\| \leqslant \delta^{(k)}$, где $u_{\delta(k)}^{(k)} \in U_{(k)}$. Задача построения устойчивого приближенного решения $a_{\delta(k)}^{(k)}$ сводится в данном случае к минимизации сглаживающего функционала

$$J^{\alpha^{(k)}}(\alpha^{(k)}, u_{\delta(k)}^{(k)}) = \|V^{(k)} a^{(k)} - u_{\delta(k)}^{(k)}\|^2 + \alpha^{(k)} \Omega(\alpha^{(k)}), \quad (2.8)$$

где $\Omega(\alpha^{(k)})$ – непрерывный неотрицательный функционал, определенный на всюду плотном на $A_{(k)}$ подмножестве $A_{(k)1}$, называемый стабилизирующим [10, 11], $\alpha^{(k)}$ – параметр регуляризации, определяемый по невязке

$$\|V^{(k)} a_{\alpha^{(k)}}^{(k)} - u_{\delta(k)}^{(k)}\| = \delta^{(k)}. \quad (2.9)$$

При решении задач идентификации параметров не только правая часть (2.7), но и оператор $V^{(k)}$ может быть задан неточно, то есть вместо $\{V^{(k)}, \bar{u}^{(k)}\}$ из (2.7) известно двухпараметрическое семейство исходных данных $\{V_\mu^{(k)}, u_{\delta(k)}^{(k)}\}$, такое, что

$$\|\bar{u}^{(k)} - u_{\delta(k)}^{(k)}\| < \delta^{(k)},\ \|V^{(k)} a^{(k)} - V_{\mu^{(k)}}^{(k)} a^{(k)}\| \leqslant \mu^{(k)} [\Omega(a^{(k)})]^{1/2},$$
$$a^{(k)} \in A_{(k)1},\ \Omega(a^{(k)}) > 0. \quad (2.10)$$

В этом случае задача построения устойчивого приближенного решения $a^{(k)}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}$ сводится к минимизации функционала [6, 11]

$$J^{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}(a^{(k)}, u^{(k)}_{\delta^{(k)}}, V^{(k)}_{\mu^{(k)}}) = \left\| V^{(k)}_{\mu^{(k)}} a^{(k)} - u^{(k)}_{\delta^{(k)}} \right\|^2 + \\ +(\alpha^{(k)} - \mu^{(k)2})\Omega(a^{(k)}) + 2\delta^{(k)}\mu^{(k)}[\Omega(a^{(k)})]^{1/2}, \tag{2.11}$$

причем параметр регуляризации определяется из условия [11]

$$\|V^{(k)}_{\mu^{(k)}} a^{(k)}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}} - u^{(k)}_{\delta^{(k)}}\| - \mu^{(k)}[\Omega(a^{(k)}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}})]^{1/2} = \delta^{(k)}, \tag{2.12}$$

где $a^{(k)}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}$ – решение (2.11).

Требуется, с учетом (2.7)–(2.12), получить конечные аналитические выражения для устойчивого оценивания идентифицируемых параметров модели динамического трафика (2.2) по результатам наблюдений (2.1) при неточно заданных входных данных.

3. Основные результаты

Вернемся теперь от общих операторных уравнений к задаче (2.1). В этом случае $\left\|V^{(k)}a^{(k)} - u^{(k)}_{\delta^{(k)}}\right\|^2 = \left\|H^{(k)} - \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}\right\|^2$, то есть $V^{(k)}a^{(k)} = \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}$, $a^{(k)} = \hat{A}^{(k)}$, $u^{(k)}_{\delta^{(k)}} = H^{(k)}$. В качестве $\Omega(a^{(k)})$ естественно взять квадрат нормы уклонения решения $\hat{A}^{(k)}$ от некоторого заданного вектора $A^{(k)}_0$: $\|\hat{A}^{(k)} - A^{(k)}_0\|^2$.

Тогда (2.8) принимает следующий вид

$$J^{\alpha^{(k)}}(\hat{A}^{(k)}, H^{(k)}) = \left\|H^{(k)} - \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}\right\|^2 + \alpha^{(k)}\left\|\hat{A}^{(k)} - A^{(k)}_0\right\|^2, \tag{3.1}$$

где $\alpha^{(k)}$ определяется по невязке

$$\|H^{(k)} - \Psi^{(k)}\hat{A}^{(k)}_{\alpha^{(k)}}\|^2 = (\delta^{(k)})^2. \tag{3.2}$$

Для получения эффективного в вычислительном плане алгоритма идентификации вектора параметров $\hat{A}^{(k)}$ введем некоторые (не ограничивающие общности) предположения, упрощающие запись. Считаем, что измерения являются независимыми, то есть $(\sigma^{(k)}_{\lambda n})^2 = (\sigma^{(k)})^2 = \mathrm{const}$. В этом случае величину $\alpha^{(k)}$ можно оценить как $LN(\sigma^{(k)})^2$ [6]. Полагаем также $A^{(k)}_0 = 0$.

Для аппроксимации результатов измерений битового трафика k-ой службы воспользуемся широко распространенной на практике моделью (2.2) на базе кусочно-полиномиальной гладкой сплайн-интерполяции [12]

$$\hat{v}^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M_n-1} \hat{a}^{(k)}_{nm} t^m_n I(t \in [t_n, t_{n+1}]), \tag{3.3}$$

где $I(x \in [t_n, t_{n+1}])$ – индикатор.

Для удобства дальнейших выкладок запишем функционал качества (3.1) в скалярном виде

$$J^{\alpha^{(k)}}(\hat{A}^{(k)}, H^{(k)}) = \sum_{n=0}^{N-1}\left\{\sum_{\lambda=0}^{L-1}\left[\left(\hat{v}^{(k)[\lambda]}_n - h^{(k)}_{\lambda n}\right)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\sigma^{(k)}\right)^2\sum_{m=0}^{M_n-1}(\hat{a}^{(k)}_{nm})^2\right]\right\} I(t \in [t_n, t_{n+1}]) = \sum_{n=0}^{N-1} J^{\alpha^{(k)}}_n(\hat{v}^{(k)}(t)), \tag{3.4}$$

где $J^{\alpha^{(k)}}_n(\hat{v}^{(k)}(t)) = \sum\limits_{\lambda=0}^{L-1}\left[\left(\hat{v}^{(k)[\lambda]} - h^{(k)}_{\lambda n}\right)^2 + \left(\sigma^{(k)}\right)^2\sum\limits_{m=0}^{M_n-1}(\hat{a}^{(k)}_{nm})^2\right] \geqslant 0$ – выпуклые функционалы.

Теорема 1. *Коэффициенты аппроксимирующего сплайн-полинома* $\hat{v}^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{M_n-1} \hat{a}^{(k)}_{nm} t^m_n I(t \in [t_n, t_{n+1}])$, *оптимальные в смысле минимума критерия (3.4), находятся как решения следующих систем линейных алгебраических уравнений [12]:*

$$\sum_{m=0}^{j} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{m} t_n^{m+j-2\lambda}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}\right] + \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\hat{a}_{nm}^{(k)}\left[\sum_{\lambda=0}^{j} t_n^{m+j-2\lambda}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}\right] + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nj}^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{j} h_{\lambda n}^{(k)}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{j-\lambda},\quad n=0,1,\dots,N-1;\ j=0,1,\dots,L-1. \tag{3.5}$$

$$\sum_{m=0}^{L-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{m} t_n^{m+j-2\lambda}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}\right] + \sum_{m=L}^{M_n-1}\hat{a}_{nm}^{(k)}\left[\sum_{\lambda=0}^{L-1} t_n^{m+j-2\lambda}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}\right] + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nj}^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{L-1} h_{\lambda n}^{(k)}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{j-\lambda},\ n=0,1,\dots,N-1;\ j=L,L+1,\dots,M_n-1. \tag{3.6}$$

Доказательство. Приравнивая нулю частные производные от $J^{\alpha^{(k)}}\left(\hat{A}^{(k)},H^{(k)}\right)$ по $\hat{a}_{nj}^{(k)}$, а также замечая, что $\frac{d^j t^m}{dt^j}=0$, при $j>m$, с учетом (3.4) и

$$\hat{v}_n^{(k)[\lambda]} = \sum_{m=\lambda}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-\lambda)!}t_n^{m-\lambda}\hat{a}_{nm}^{(k)} \tag{3.7}$$

для случая $j \leqslant L-1$ можно записать для каждого временного отрезка $[t_n,t_{n+1}]$, $n=0,1,\dots,N-1$

$$\sum_{\lambda=0}^{j}\left[\sum_{m=\lambda}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{m+j-2\lambda}\hat{a}_{nm}^{(k)} + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nm}^{(k)}\right] = d_{nj}, \tag{3.8}$$

где $d_{nj} = \sum\limits_{\lambda=0}^{j} h_{\lambda n}^{(k)}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{j-\lambda}$, $j=0,1,\dots,L-1$.

Раскрывая в (3.8) сумму по λ, получаем

$$\sum_{m=0}^{M_n-1} t_n^{m+j}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-1)!}\frac{j!}{(j-1)!}t_n^{m+j-2}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=2}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-2)!}\frac{j!}{(j-2)!}t_n^{m+j-4}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \dots + \sum_{m=j}^{M_n-1}\frac{m!j!}{(m-j)!}t_n^{m-j}\hat{a}_{nm}^{(k)} + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nj}^{(k)} = d_{nj}. \tag{3.9}$$

Выражение (3.9) после несложных преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned}&\hat{a}_{n0}^{(k)}t_n^j + \hat{a}_{n1}^{(k)}\left[t_n^{j+1} + \frac{j!}{(j-1)!}t_n^{j-1}\right] + \hat{a}_{n2}^{(k)}\left[t_n^{j+2} + 2\frac{j!}{(j-1)!}t_n^{j} + 2\frac{j!}{(j-2)!}t_n^{j-2}\right] + \dots +\\ &+\hat{a}_{nj}^{(k)}\left[t_n^{2j} + \frac{(j!)^2}{((j-1)!)^2}t_n^{2j-2} + \frac{(j!)^2}{((j-2)!)^2}t_n^{2j-4} + \dots + (j!)^2\right] +\\ &+\left[\sum_{m=j+1}^{M_n-1} t_n^{m+j}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-1)!}\frac{j!}{(j-1)!}t_n^{m+j-2}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \dots + \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\frac{m!j!}{(m-j)!}t_n^{m-j}\hat{a}_{nm}^{(k)}\right] + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nj}^{(k)} = d_{nj},\\ &j=0,1,\dots,L-1.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Замечая, что

$$\left[\sum_{m=j+1}^{M_n-1} t_n^{m+j}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-1)!}\frac{j!}{(j-1)!}t_n^{m+j-2}\hat{a}_{nm}^{(k)} + \dots + \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\frac{m!j!}{(m-j)!}t_n^{m-j}\hat{a}_{nm}^{(k)}\right] = \sum_{m=j+1}^{M_n-1}\hat{a}_{nm}^{(k)}\left[\sum_{\lambda=0}^{j}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{m+j-2\lambda}\right],$$

и сворачивая суммы в квадратных скобках (3.10), получаем (3.5).

Для случая $j \geqslant L$ по аналогии с [4, 9, 10] можно записать для каждого временного отрезка $[t_n,t_{n+1}]$, $n=0,1,\dots,N-1$

$$\sum_{\lambda=0}^{L-1}\left[\sum_{m=\lambda}^{M_n-1}\frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!}t_n^{m+j-2\lambda}\hat{a}_{nm}^{(k)} + 2j\left(\sigma^{(k)}\right)^2\hat{a}_{nm}^{(k)}\right] = c_{nj}, \tag{3.11}$$

где $c_{nj} = \sum\limits_{\lambda=0}^{L-1} h_{\lambda n}^{(k)} \frac{j!}{(j-\lambda)!} t_n^{j-\lambda}$, $j = L, L+1, \ldots, M_n - 1$.

Раскрывая в (3.11) сумму по λ и выполняя преобразования, аналогичные (3.9), получаем

$$\begin{gathered}
\hat{a}_{n0}^{(k)} t_n^j + \hat{a}_{n1}^{(k)} \left[t_n^{j+1} + \frac{j!}{(j-1)!} t_n^{j-1} \right] + \\
+ \hat{a}_{n2}^{(k)} \left[t_n^{j+2} + 2\frac{j!}{(j-1)!} t_n^{j} + 2\frac{j!}{(j-2)!} t_n^{j-2} \right] + \cdots + \\
+ \hat{a}_{nL-1}^{(k)} \left[t_n^{L+j-1} + \frac{(L-1)!}{(L-2)!}\frac{j!}{(j-1)!} t_n^{L+j-3} + \ldots + \frac{(L-1)!}{0!} \right] + \\
+ \left[\sum_{m=L}^{M_n-1} t_n^{m+j} \hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=L}^{M_n-1} \frac{m!}{(m-1)!}\frac{j!}{(j-1)!} t_n^{m+j-2} \hat{a}_{nm}^{(k)} + \cdots + \right. \\
\left. + \sum_{m=L}^{M_n-1} \frac{m!}{(m-(L-1))!} t_n^{m+j-2(L-1)} \hat{a}_{nm}^{(k)} \right] + 2j \left(\sigma^{(k)}\right)^2 \hat{a}_{nj}^{(k)} = c_{nj}, \\
j = L, L+1, \ldots, M_n - 1.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Замечая, что

$$\begin{gathered}
\left[\sum_{m=L}^{M_n-1} t_n^{m+j} \hat{a}_{nm}^{(k)} + \sum_{m=L}^{M_n-1} \frac{m!}{(m-1)!}\frac{j!}{(j-1)!} t_n^{m+j-2} \hat{a}_{nm}^{(k)} + \cdots + \right. \\
\left. + \sum_{m=L}^{M_n-1} \frac{m!}{(m-(L-1))!} t_n^{m+j-2(L-1)} \hat{a}_{nm}^{(k)} \right] = \sum_{m=L}^{M_n-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{L-1} t_n^{m+j-2\lambda} \frac{m!}{(m-\lambda)!}\frac{j!}{(j-\lambda)!} \right], \\
j = L, L+1, \ldots, M_n - 1
\end{gathered}$$

и сворачивая суммы в квадратных скобках (3.12), получаем (3.6).

Таким образом, решая N систем уравнений (3.5), (3.6), каждая из которых – n имеет размерность M_n, можно определить $M_0 + M_1 + \ldots + M_{N-1}$ устойчивых оценок $\hat{a}_{n0,\alpha}^{(k)}, \hat{a}_{n1,\alpha}^{(k)}, \ldots, \hat{a}_{nM_n-1,\alpha}^{(k)}$, $n = \overline{0, N-1}$ идентифицируемых параметров модели (3.3). Доказательство закончено.

Рассмотрим теперь случай, когда элементы матрицы входных данных известны с ошибками, что практически всегда имеет место вследствие погрешностей округления и их накопления в процессе обработки информации.

С учетом (2.10)–(2.12), следуя рекомендациям [9, 10], запишем задачу оптимизации в виде

$$\begin{gathered}
J^{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}(\hat{A}^{(k)}, H^{(k)}, \Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)}) = \|H^{(k)} - \Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)} \hat{A}^{(k)}\|^2 + \\
+ \left(\alpha^{(k)} - \left(\mu^{(k)}\right)^2\right) \|\hat{A}^{(k)} - A_0^{(k)}\|^2 + 2\delta^{(k)}\mu^{(k)}\|\hat{A}^{(k)} - A_0^{(k)}\|
\end{gathered} \tag{3.13}$$

с определением $\alpha^{(k)}$ из условия

$$\|H^{(k)} - \Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)} \hat{A}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}^{(k)}\|^2 - \mu^{(k)}\|\hat{A}_{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}^{(k)} - A_0^{(k)}\| = \delta^{(k)}. \tag{3.14}$$

Для удобства дальнейших выкладок запишем функционал качества (3.13) в скалярном виде

$$\begin{gathered}
J^{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}(\hat{A}^{(k)}, H^{(k)}, \Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{L-1} \left[(\hat{v}_n^{(k)[\lambda]} - h_{\lambda n}^{(k)})^2 + \right.\right. \\
\left.\left. + \left(\left(\sigma^{(k)}\right)^2 - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^2\right) \sum_{m=0}^{M_n-1} (\hat{a}_{nm}^{(k)})^2 + \sigma^{(k)}\varepsilon^{(k)} \left(\sum_{m=0}^{M_n-1} (\hat{a}_{nm}^{(k)})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Полагаем, что ошибки задания входной матрицы $\Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)}$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией $\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 = \text{const}$.

По аналогии с [6, 9, 10] величину $\left(\mu^{(k)}\right)^2$ можно оценить как $LN\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2$. Полагая $A_0^{(k)} = 0$, с учетом (3.3) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Коэффициенты аппроксимирующего сплайн-полинома* $\hat{v}^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{M_n-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} t_n^m I(t \in [t_n, t_{n+1}])$, *оптимальные в смысле минимума критерия (3.13), находятся как решение следующих систем линейных алгебраических уравнений [12]:*

$$
\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{j} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{m} t_n^{m+j-2\lambda} \frac{m!}{(m-\lambda)!} \frac{j!}{(j-\lambda)!} \right] + \\
+ \sum_{m=j+1}^{M_n-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{j} t_n^{m+j-2\lambda} \frac{m!}{(m-\lambda)!} \frac{j!}{(j-\lambda)!} \right] + \\
+ j\hat{a}_{nj}^{(k)} \left[\left(\left(\sigma^{(k)}\right)^2 - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 \right) + \sigma^{(k)} \varepsilon^{(k)} \left(\sum_{m=0}^{M_n-1} (\hat{a}_{nm}^{(k)})^2 \right)^{1/2} \right] = \\
= \sum_{\lambda=0}^{j} t_n^{j-\lambda} \frac{j!}{(j-\lambda)!} h_{\lambda n}^{(k)},\ n = 0, 1, \ldots, N-1;\ j = 0, 1, \ldots, L-1,
\end{gathered} \tag{3.16}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{L-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{m} t_n^{m+j-2\lambda} \frac{m!}{(m-\lambda)!} \frac{j!}{(j-\lambda)!} \right] + \\
+ \sum_{m=L}^{M_n-1} \hat{a}_{nm}^{(k)} \left[\sum_{\lambda=0}^{L-1} t_n^{m+j-2\lambda} \frac{m!}{(m-\lambda)!} \frac{j!}{(j-\lambda)!} \right] + \\
+ j\hat{a}_{nj}^{(k)} \left[\left(\left(\sigma^{(k)}\right)^2 - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 \right) + \sigma^{(k)} \varepsilon^{(k)} \left(\sum_{m=0}^{M_n-1} (\hat{a}_{nm}^{(k)})^2 \right)^{1/2} \right] = \\
= \sum_{\lambda=0}^{j} t_n^{j-\lambda} \frac{j!}{(j-\lambda)!} h_{\lambda n}^{(k)},\ n = 0, 1, \ldots, N-1;\ j = 0, 1, \ldots, L-1.
\end{gathered} \tag{3.17}
$$

Доказательство. Приравнивая нулю частные производные от $J^{\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}(\hat{A}^{(k)}, H^{(k)}, \Psi_{\mu^{(k)}}^{(k)})$ по $\hat{a}_{nj}^{(k)}$, с учетом (3.7) для случая $j \leqslant L-1$ можно записать для каждого временного отрезка $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$

$$
\begin{gathered}
\sum_{\lambda=0}^{j} \left\{ \sum_{m=\lambda}^{M_n-1} \frac{m!}{(m-\lambda)!} \frac{j!}{(j-\lambda)!} t_n^{m+j-2\lambda} \hat{a}_{nm}^{(k)} + \right. \\
\left. + j\hat{a}_{nj}^{(k)} \left[\left(\left(\sigma^{(k)}\right)^2 - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 \right) + \sigma^{(k)} \varepsilon^{(k)} \left(\sum_{m=0}^{M_n-1} (\hat{a}_{nm}^{(k)})^2 \right)^{1/2} \right] \right\} = \\
= \sum_{\lambda=0}^{j} t_n^{j-\lambda} \frac{j!}{(j-\lambda)!} h_{\lambda n}^{(k)},\ j = 0, 1, \ldots, L-1.
\end{gathered}
$$

Выполняя преобразования, аналогичные (3.9)–(3.12), получаем формулы (3.16), (3.17). Так как схема доказательства теоремы 2

аналогична доказательству теоремы 1, то промежуточные выкладки можно опустить в целях сокращения записей. Доказательство закончено.

Отсюда следует, что решая N систем уравнений (3.16), (3.17), каждая из которых – n имеет размерность M_n, можно определить оценки $\hat{a}_{n0,\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}^{(k)}, \hat{a}_{n1,\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}^{(k)}, \ldots, \hat{a}_{nM_n-1,\alpha^{(k)}\mu^{(k)}}^{(k)}$, $n = \overline{0, N-1}$ идентифицируемых параметров, устойчивые к погрешности измерений и неточностям задания входной матрицы данных.

Для качественного анализа полученных регуляризованных оценок идентифицируемых параметров по аналогии с [9]–[11] запишем функцию правдоподобия (для случая равноточных измерений)

$$
\begin{gathered}
P(A^{(k)}, H^{(k)}) = \mathrm{const} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^{(k)2}} [H^{(k)} - \Psi^{(k)} A^{(k)}]^T \times \right. \\
\left. \times [H^{(k)} - \Psi^{(k)} A^{(k)}] \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2\alpha^{(k)}} [A^{(k)} - A_0^{(k)}] \right\}.
\end{gathered} \tag{3.18}
$$

При записи (3.18) предполагалось, что функционал качества формируемых оценок имеет вид (3.1). С учетом (3.1), (3.18) оптимальная оценка вектора параметров $\hat{A}^{(k)}$ определяется формулой

$$
\hat{A}^{(k)} = \left({\Psi^{(k)}}^T \Psi^{(k)} + \alpha^{(k)} I \right)^{-1} \left({\Psi^{(k)}}^T H^{(k)} + \alpha^{(k)} A_0^{(k)} \right), \tag{3.19}
$$

а ковариационная матрица $\hat{B}^{(k)}$ оценки (3.19) имеет вид

$$
B^{(k)} = \left(\sigma^{(k)}\right)^2 \left({\Psi^{(k)}}^T \Psi^{(k)} + \alpha^{(k)} I \right)^{-1} {\Psi^{(k)}}^T \Psi^{(k)} \left({\Psi^{(k)}}^T \Psi^{(k)} + \alpha^{(k)} I \right)^{-1}, \tag{3.20}
$$

что согласуется с общетеоретическими оценками [9, 11].

Анализ выражений (3.19), (3.20) показывает, что полученные оценки являются смещенными. Именно отказ от требования несмещенности, как и в [9], приводит к регуляризованным решениям, обладающим гораздо большей устойчивостью к погрешностям входных данных.

Отметим, что методические результаты данного параграфа можно использовать для кусочно-полиномиальных сплайн-интерполяций битовых скорости и ускорения передаваемой информации k-ой службы ШЦСИО [12].

4. Заключение

Разработан метод параметрической устойчивой идентификации динамического битового трафика в ШЦСИО. Для кусочно-полиномиальной гладкой сплайн-интерполяции динамической функции количества передаваемой битовой информации как функции времени, в рамках доказанных теорем, получены аналитические выражения для идентификации текущих параметров полипачечного трафика ШЦСИО как динамической системы, позволяющие строить алгоритмы, устойчивые к погрешностям наблюдений и неточностям задания исходных данных. Проанализированы свойства полученных решений. Полученные результаты применимы для сплайн-интерполяций битовых скорости и ускорения передаваемой информации k-ой службы.

Список литературы

[1] Назаров А.Н., Симонов М.В. АТМ: технология высокоскоростных сетей. М.: Эко-Трендз, 1997.

[2] Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: ГИФМЛ, 1962.

[3] Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.

[4] Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Оптимальное оценивание параметров нормальной регрессии для случая расширенной модели наблюдений // Проблемы передачи информации. 1993. Т. 29. №3. С. 31–41.

[5] Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.

[6] Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов экспериментов. М.: Изд-во МГУ, 1988.

[7] Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977.

[8] Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Системный подход к моделированию сложных динамических систем в задачах оптимизации с прогнозирующей моделью // Автоматика и телемеханика. 1996. №3. С. 34–46.

[9] Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Метод параметрической идентификации систем управления при неточном задании исходных данных // Автоматика и телемеханика. 1997. №11. С. 56–65.

[10] Бурлай И.В. Параметрическая идентификация управляемых систем на базе расширенной модели наблюдений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. №4. С. 29–34.

[11] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.

[12] Назаров А.Н. О новом подходе к идентификации битового трафика в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания // СПб. Совет безопасности Российской Федерации, Межрегиональная конференция «Информационная безопасность регионов России», 13–15 октября 1999. Тезисы докладов.