Список литературы

[1] Поспелов Д.А., Осипов Г.С. Прикладная семиотика // Новости искусственного интеллекта. №1. 1999. С. 9–35.

[2] Аверкин А.Н., Федосеева И.Н. Параметрические логики в интеллектуальных системах управления. ISBN 5-101-14742-9. М.: ВЦ РАН, 2000.

[3] Беленький А.Г. Выбор шкал и операторов агрегирования при построении нечетких интеллектуальных информационно-управляющих систем // Сообщения по прикладной математике. М.: МЭИ, 1999.

[4] Аверкин А.Н., Тарасов В.Б. Нечеткое отношение моделирования и его применение в психологии и искусственном интеллекте // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 1986.

[5] Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.

Некоторые вопросы математико-компьютерного моделирования в теории пластичности

И.Н. Молодцов

Исследована возможность разрешения векторно линейных четырехчленных функциональных уравнений связи $\bar{\sigma} \sim \bar{\epsilon}$.

1. Введение

Вопросы введения в теорию механики деформируемого твердого тела определяющих соотношений являются самыми сложными – здесь всегда естественно было бы иметь в виду вопрос об адекватном отражении в модели физической сущности моделируемых процессов. Среди множества известных соотношений лишь немногие имеют происхождением конкретные физические источники, а основная часть является продуктом чистой математики и введена в теорию с целью обеспечения возможности тем или иным способом решить поставленную математическую задачу. При этом вопрос о физической достоверности полученного решения как правило не обсуждается – достаточно того, что предлагаемый новый класс определяющих соотношений содержит известные. Реализацией другого пути является идея А.А. Ильюшина о построении уравнений состояния как решений функциональных уравнений термодинамики.

В настоящей работе взят за основу именно этот путь. Хорошо изученными со всех сторон в теории пластичности являются процессы простого нагружения. Доказано, что эти процессы действительно возникают в материале при определенных технологически достижимых физических условиях. Естественно, что при других условиях уравнения состояния простого нагружения использовать нужно с осторожностью. Возможно поставить задачу определения такого класса процессов, которые математически являются приводимыми к «простым». Здесь и обсуждаются такие возможности. В качестве физического источника выступает основное термодинамическое тождество. Оно и определяет структуру функционального соотношения между термодинамическими силами и потоками. Можно надеяться, что при таком подходе в проблему не будет внесено ничего ей несвойственного, и физическая суть будет отражена верно. Несмотря на существенное физическое отличие рассматриваемых процессов от «простых», математические аспекты проблемы оказываются очень похожими и в одинаковой мере простыми. Это позволяет за счет незначительного видоизменения существующих программных продуктов сделать их эффективными для гораздо более широкого класса уравнений состояния.

В работе [1] была дана классификация соотношений между напряжениями и деформациями, основанная на предположении об аналитичности функционала $\sigma = \hat{F}\{\epsilon\}_{t;\bar{x}}$ и представлении его рядом по интегралам возрастающей кратности по пространству-времени. Позже в [2] были изучены некоторые классы функциональных уравнений, созвучные, но не тождественные с трехчленной формулой А.А. Ильюшина [3], которые удается представить в разрешенном относительно напряжений виде. Это достигается за счет перенормировки пятимерного евклидового пространства девиатора деформаций путем введения скалярной метрики, определяемой процессом деформации в исследуемой точке материала и ее окружении. При этом используется аппарат представления ядер интегральных соотношений в виде разложений в ряды по сингулярным функциям, позволяющий получать в первом приближении локальные (по пространству) уравнения состояния.

Пусть $\hat{\Sigma}$ – тензор напряжений Коши, а $\hat{\epsilon}$ – парная ему термодина-

мическая координата, далее используемая в качестве меры деформаций. Выражение элементарной работы сил внутренних напряжений запишем в виде $\delta A \equiv \hat{\Sigma} : \delta\hat{\epsilon} = p\delta e + \overline{\sigma}\delta\overline{\epsilon}$. Здесь произведено разделение тензоров напряжений и деформаций на шаровую $(p,\, e)$ и девиаторную $(\overline{\sigma},\, \overline{\epsilon})$ части.

Пусть функционал состояния дифференцируем по Фреше. Тогда в процессе нагружения:

$$\overline{\sigma}\delta\overline{\epsilon} = \overline{\sigma}\frac{\delta\overline{\epsilon}}{\delta\overline{\sigma}}\delta\overline{\sigma} \equiv \overline{\sigma}\hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma},$$

$\hat{P}$ – функционал процесса нагружения. Отсюда следует, что $\overline{\sigma}(\delta\overline{\epsilon} - \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma}) = 0$, и существуют классы эквивалентных процессов нагружения с общим представлением элементарной работы сил внутренних напряжений. Ясно, что если за основной процесс класса взять некоторый хорошо изученный процесс $\delta\overline{\epsilon} = \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma}$ с известным функционалом $\hat{P}$, то эквивалентными ему в классе процессов с квазилинейными дифференциальными соотношениями между напряжениями и деформациями первого порядка будут процессы с уравнениями состояния вида:

$$\delta\overline{\epsilon} = \hat{P}^{-1}\delta\overline{\sigma} + \alpha\hat{Q}_\sigma\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right) + \beta\hat{Q}_\epsilon\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right) + $$
$$+\nu Q\left(\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right).$$

Здесь α, β, ν – скаляры, а $\hat{Q}_\epsilon, \hat{Q}_\sigma, \hat{Q}$ – десятипараметрические ортогональные матрицы пятого порядка – вращения/отражения вокруг оси, совпадающей с направлением вектора напряжений.

Изучим более подробно изотропное приближение, в котором $\hat{Q}_\sigma = \hat{E}$, $\hat{Q}_\epsilon = 0$, $\hat{Q} = 0$, $\hat{P}^{-1} \equiv P^{-1}\hat{E}$. Получим:

$$\delta\overline{\epsilon} = P^{-1}\delta\overline{\sigma} + \alpha\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma}\right).$$

Считаем, что эти дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями должны удовлетворяться точно на простом процессе. Поэтому, подставляя в последнее соотношение $\overline{\epsilon} = \epsilon\overline{\sigma}/\sigma$, получим равенства, которые в процессе простого нагружения определяют скалярный функционал P и параметр α :

$$\alpha = \frac{1}{N} - \frac{1}{P},\ N = \frac{\sigma}{\epsilon},\ P = \frac{\delta\sigma}{\delta\epsilon}.$$

Естественно и в произвольном процессе положить $\alpha \equiv 1/N_\sigma - 1/P$. В этом случае получим известную трехчленную формулу [3]:

$$\delta\overline{\epsilon} = \frac{1}{N_\sigma}\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N_\sigma}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma} \tag{1}$$

и формулу, обратную к ней:

$$\delta\overline{\sigma} = N_\sigma\delta\overline{\epsilon} + (P - N_\sigma)\,\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma}. \tag{1'}$$

Таким образом, в уравнения состояния простого процесса А.А. Ильюшиным добавлено с произвольным параметром α гироскопическое слагаемое, не совершающее механической работы, то есть обобщенная гироскопическая стабилизирующая термодинамическая сила. Параметр выбран из условия, что уравнения состояния простого процесса точно удовлетворяют получившемуся соотношению.

Отметим, что в процессе нагружения при векторно линейной формулировке уравнений состояния возможны три вида независимых гироскопических сил:

$$\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})\overline{\sigma}}{\sigma^2},\ \delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2},\ \overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma}, \epsilon)\overline{\sigma}}{\sigma^2},$$

позволяющих строить аналогичные (1), (1′) соотношения.

В процессе деформаций $\overline{\sigma}\delta\overline{\epsilon} = \delta(\overline{\sigma\epsilon}) - \overline{\epsilon}\delta\overline{\sigma} = \delta(\overline{\sigma\epsilon}) - \overline{\epsilon}\hat{P}\delta\overline{\epsilon}$ аналогично получаются соотношения изотропного приближения:

$$\delta\overline{\sigma} = N_\epsilon\delta\overline{\epsilon} + (P - N_\epsilon)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2}\overline{\epsilon}, \tag{2}$$

$$\delta\overline{\epsilon} = \frac{1}{N_\epsilon}\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma})}{\epsilon^2}\overline{\epsilon}, \tag{2'}$$

и другие, в которых роль гироскопических обобщенных сил играют:

$$\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})\epsilon}{\epsilon^2},\ \delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma})\epsilon}{\epsilon^2},\ \overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \overline{\epsilon})\epsilon}{\epsilon^2}.$$

2. Моделирование поведения упрочняющихся материалов

Предположим, что экспериментально изучен некоторый основной процесс $\delta\overline{\epsilon} = P^{-1}\delta\overline{\sigma}$, $\delta\overline{\sigma} = P\delta\overline{\epsilon}$ и функционал P построен. Основное термодинамическое тождество в любой из своих форм является функциональным уравнением, решение которого определяет уравнение состояния рассматриваемого материала:

$$\overline{\sigma}\delta\overline{\epsilon} + p\delta e + TdS = dU + \delta D,\ -\overline{\epsilon}\delta\overline{\sigma} - e\delta p + TdS = dU + \delta\left(D - (\overline{\sigma}, \overline{\epsilon}) - pe\right).$$

Рассмотрим процессы следующего вида:

$$\delta\overline{\epsilon} = P^{-1}\delta\overline{\sigma} + \alpha\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right) + \beta\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right),$$

$$\delta\overline{\sigma} = P\delta\overline{\epsilon} + \gamma\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right) + \mu\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right).$$

Добавленные слагаемые не совершают механической работы на процессе. Если рассматриваемые процессы отличаются от основного процесса только векторными свойствами, то их функциональные уравнения совпадают с уравнениями основного процесса и оба процесса (различающиеся между собой) являются термодинамически эквивалентными одному основному процессу. Подстановка первого соотношения во второе дает условие совпадения процессов. После преобразований оно приводит к четырехчленной формуле:

$$\begin{aligned}(P\alpha + \gamma)\delta\overline{\sigma} - \frac{P}{\sigma^2}\left(\alpha(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma}) + \beta(\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon})\right)\overline{\sigma} &= \\ = -(P\beta + \mu)\delta\overline{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2}\left(\gamma(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma}) + \mu(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})\right)\overline{\epsilon}, &\qquad (A)\end{aligned}$$

содержащей три независимых и произвольных параметра, которую возможно рассматривать как функциональное уравнение, определяющее зависимость между параметрами состояния в процессах и нагружений и деформаций. Отметим, что это соотношение нельзя считать в полной мере согласованным с прямым и обратным термодинамическими уравнениями.

Четырехчленные соотношения дифференциального типа:

$$\delta\overline{\epsilon} + \left(\frac{P}{N_\epsilon} - 1\right)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2}\overline{\epsilon} = \frac{P}{N_\sigma N_\epsilon}\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{N_\epsilon} - \frac{P}{N_\sigma N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\overline{\sigma}, \tag{3}$$

определяемые тремя функционалами P, N_ϵ, N_σ и являющиеся квазилинейными дифференциальными соотношениями связи между напряжениями и деформациями для изотропно упрочняющихся материалов, в которых использованы созвучные классическим, [3], обозначения для функционалов пластичности, следуют из рассмотренных выше.

Аналогично можно взять соотношения:

$$\delta\overline{\epsilon} + \left(\frac{P}{N_\sigma} - 1\right)\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon})}{\sigma^2}\overline{\sigma} = \frac{P}{N_\sigma N_\epsilon}\delta\overline{\sigma} + \left(\frac{1}{N_\sigma} - \frac{P}{N_\sigma N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma})}{\epsilon^2}\overline{\epsilon} \tag{4}$$

и любые другие варианты полученной выше из термодинамических соображений четырехчленной изотропной теории. Альтернативой этому является прямое построение соотношений путем добавления к соотношениям основного процесса гироскопических слагаемых строго соответствующего типа. При этом уравнение обратного процесса может оказаться термодинамически не эквивалентным обратным уравнениям основного процесса, то есть не будет отличаться от него гироскопическими слагаемыми другого типа. Несмотря на отмеченные недостатки, простые соотношения (3),(4) могут оказаться полезными.

Соотношение (3) является функциональным уравнением, определяющим любую из зависимостей $\overline{\sigma} \sim \overline{\epsilon}$ или $\overline{\epsilon} \sim \overline{\sigma}$. Нашей целью является решение функционального уравнения (3).

Делаем подстановки в (3): $\overline{\epsilon} = M_\epsilon(\overline{\epsilon}/M_\epsilon)$, $\overline{\sigma} = M_\sigma(\overline{\sigma}/M_\sigma)$, означающие перенормировку векторных пространств девиаторов напряжений и деформаций в процессе деформирования данной физической частицы вещества. Скалярные метрики-функционалы процесса деформаций/нагружений отражают изменение первоначальной евклидовой метрики. В начале деформирования $M_\epsilon = M_\sigma = 1$. Результатом подстановки является соотношение, которое при специальном выборе метрик M_ϵ, M_σ приводится к простому виду:

$$M_\epsilon\delta\frac{\overline{\epsilon}}{M_\epsilon} = \frac{M_\sigma P}{N_\epsilon N_\sigma}\delta\frac{\overline{\sigma}}{M_\sigma}, \tag{5}$$

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2}, \quad \frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = \left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}.$$

Удобно записать уравнения в вариациях для метрик в виде:

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2},$$

$$\frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = \frac{N_\epsilon}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\left((\overline{\sigma}, \delta\overline{\epsilon}) - \left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \overline{\epsilon})(\overline{\epsilon}, \delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2}\right), \tag{6}$$

если процесс ведется по деформациям, а в случае процесса нагружения –

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \frac{1}{N_\sigma\epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\left((\overline{\epsilon}, \delta\overline{\sigma}) - \left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \overline{\epsilon})(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = \left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\frac{(\overline{\sigma}, \delta\overline{\sigma})}{\sigma^2}. \tag{7}$$

Выбор метрик M_ϵ, M_σ, согласно уравнениям (6) или (7), приводит к соотношению (5), которое может быть проинтегрировано, соответственно, вдоль траектории деформации или нагружения:

$$\overline{\sigma} = \frac{N_\epsilon N_\sigma}{P}\overline{\epsilon} - M_\sigma\int\limits_{\overline{\epsilon}}\frac{\overline{\epsilon}}{M_\epsilon}\delta\left(\frac{N_\epsilon N_\sigma M_\epsilon}{M_\sigma P}\right), \tag{6'}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{P}{N_\epsilon N_\sigma}\bar{\sigma} - M_\epsilon \int_{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}}{M_\sigma}\delta\left(\frac{M_\sigma P}{N_\epsilon N_\sigma M_\epsilon}\right). \qquad (7')$$

Вдоль траектории деформации метрики M_ϵ и M_σ изменяются по законам

$$M_\epsilon = M_{\epsilon 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\frac{\delta\epsilon}{\epsilon},$$

$$M_\sigma = M_{\sigma 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{N_\epsilon}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\left((\bar{\sigma},\delta\bar{\epsilon}) - \left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\frac{(\bar{\sigma},\bar{\epsilon})\delta\epsilon}{\epsilon}\right),$$

соответственно, вдоль траектории нагружения имеем:

$$M_\sigma = M_{\sigma 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\frac{\delta\sigma}{\sigma}$$

$$M_\epsilon = M_{\epsilon 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{1}{N_\sigma \epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\left((\bar{\epsilon},\delta\bar{\sigma}) - \left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\frac{(\bar{\sigma},\bar{\epsilon})\delta\sigma}{\sigma}\right),$$

неопределенные функции координат (но не процесса деформации/нагружения) $M_{\epsilon 0}$, $M_{\sigma 0}$ являются значениями метрик в момент $t_s(\bar{x})$ начала процесса развития пластичности в точке $\bar{x}$.

При помощи той же, что и выше, перенормировки пространств девиаторов решается функциональное уравнение (4). Результатом снова является соотношение (5) и уравнения в вариациях для метрик:

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\left((\bar{\epsilon},\delta\bar{\epsilon}) - \left(1 - \frac{P}{N_\sigma}\right)\frac{(\bar{\epsilon},\bar{\sigma})(\bar{\sigma},\delta\bar{\epsilon})}{\sigma^2}\right),$$

$$\frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = \frac{N_\epsilon}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)(\bar{\sigma},\delta\bar{\epsilon}), \qquad (8)$$

если процесс ведется по деформациям, а в процессе нагружения –

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \frac{1}{N_\sigma \epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)(\bar{\epsilon},\delta\bar{\sigma}),$$

$$\frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\left((\bar{\sigma},\delta\bar{\sigma}) - \left(1 - \frac{N_\epsilon}{P}\right)\frac{(\bar{\epsilon},\bar{\sigma})(\bar{\epsilon},\delta\bar{\sigma})}{\epsilon^2}\right). \qquad (9)$$

Соотношение (5), как и раньше, интегрируется вдоль траектории деформации или нагружения, приводя к соотношениям (6′), (7′). Изменения вдоль траектории деформации метрик M_ϵ, M_σ подчиняются законам:

$$M_\epsilon = M_{\epsilon 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{1}{\epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)\left(\epsilon\delta\epsilon - \left(1 - \frac{P}{N_\sigma}\right)\frac{(\bar{\epsilon},\bar{\sigma})(\bar{\sigma},\delta\bar{\epsilon})}{\sigma^2}\right),$$

$$M_\sigma = M_{\sigma 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{N_\epsilon}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)(\bar{\sigma},\delta\bar{\epsilon}),$$

а в процессе нагружения –

$$M_\epsilon = M_{\epsilon 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{1}{N_\sigma \epsilon^2}\left(1 - \frac{P}{N_\epsilon}\right)(\bar{\epsilon},\delta\bar{\sigma}),$$

$$M_\sigma = M_{\sigma 0}(t,\bar{x}) exp \int_{t_s(\bar{x})}^{t} \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N_\sigma}{P}\right)\left(\sigma\delta\sigma - \left(1 - \frac{N_\epsilon}{P}\right)\frac{(\bar{\epsilon},\bar{\sigma})(\bar{\epsilon},\delta\bar{\sigma})}{\epsilon^2}\right)$$

Аналогично и функциональные уравнения (A) при соответствующем выборе метрик приводятся к уравнениям основного (простого) процесса, типа (5).

Наиболее интересным с точки зрения термодинамики является построение изотропного приближения общих функциональных уравнений, термодинамически согласованных с уравнениями состояния основного процесса.

Найдем такое функциональное уравнение, которое описывает процесс нагружения и отличается от уравнения основного процесса гироскопическими членами, не совершающими работы в процессе нагружений, которое описывает и обратный процесс, отличающийся от уравнений основного процесса гироскопическими членами, не совершающими работы, но уже в процессе деформаций. В этом случае уравнения прямого (процесса нагружения) и обратного процесса (процесса деформаций) будут совпадать, и с помощью этого функционального уравнения, полученного гироскопической стабилизацией уравнения основного процесса, можно описывать более широкий класс процессов, чем при использовании уравнения основного класса.

Рассмотрим прямое и обратное векторно линейные уравнения состояния, полученные гироскопическим возмущением уравнений основного процесса и поэтому ему термодинамически эквивалентные:

$$\delta\overline{\sigma} = P\delta\overline{\epsilon} + A\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right) + B\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right) +$$

$$+\left(C_1(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) + C_2(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon}) + C_3(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma}) + C_4(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})\right)\left(\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right),$$

$$\delta\overline{\epsilon} = \frac{1}{P}\delta\overline{\sigma} + K\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right) + L\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right) +$$

$$+\left(M_1(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) + M_2(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon}) + M_3(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma}) + M_4(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})\right)\left(\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})\overline{\sigma}}{\sigma^2}\right).$$

Условие совпадения этих уравнений приводит к нелинейной системе 9 уравнений для 12 величин:

$$\frac{P+B}{A-1} = \frac{PL-P}{1+PK},\ A = \left(\frac{\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2}{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}\right)C_3,\ B = \left(\frac{\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2}{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}\right)C_4,$$

$$\frac{PK}{1+PK} = \frac{C_1}{(A-1)\epsilon^2}\left(\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2\right),$$

$$\frac{PL}{1+PK} = -\frac{C_2}{(A-1)\epsilon^2}\left(\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2\right),$$

$$\frac{M_3P(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{1+PK} = \frac{C_3\sigma^2}{A-1},\ \frac{M_4P(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{1+PK} = \frac{C_4\sigma^2}{A-1}$$

$$,\ \frac{M_1P}{1+PK} = -\frac{C_1(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{(A-1)\epsilon^2},\ \frac{M_2P}{1+PK} = -\frac{C_2(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{(A-1)\epsilon^2},$$

из которой все величины определяются через любые три. В результате получается функциональное уравнение:

$$\delta\overline{\sigma} = P\delta\overline{\epsilon} + C_3\frac{\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2}{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}\left(\delta\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right) +$$

$$+C_4\frac{\epsilon^2\sigma^2 - (\overline{\sigma},\overline{\epsilon})^2}{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}\left(\delta\overline{\epsilon} - \frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right) +$$

$$+\left(C_1(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) + C_2(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon}) + C_3(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma}) + C_4(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})\right)\left(\overline{\sigma} - \frac{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})\overline{\epsilon}}{\epsilon^2}\right), \quad (AA)$$

в котором величины C_1, C_2, C_3, C_4 связаны одним условием

$$C_1 + \frac{C_2}{P} + \frac{\epsilon^2}{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}C_3 + \frac{\epsilon^2}{P(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}C_4 = 0.$$

Нетрудно видеть, что простой процесс удовлетворяет этому функциональному уравнению при любых значениях параметров и единственной характеристикой простого процесса является функционал P. Из уравнения (AA) следует, что $(\overline{\epsilon},\delta\overline{\sigma}) = P(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})$, $P(\overline{\sigma},\delta\overline{\epsilon}) = (\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})$. Поэтому в процессе деформаций его можно привести к виду:

$$(1-\Phi Q)\,\delta\overline{\sigma} = P\,(1+\Phi R)\,\delta\overline{\epsilon} +$$

$$+\left((\overline{n}_\epsilon,\delta\overline{\epsilon}) - \frac{(\overline{n}_\sigma,\delta\overline{\epsilon})}{(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)}\right)P(Q+R)\overline{n}_\sigma +$$

$$+\left((\overline{n}_\sigma,\delta\overline{\epsilon}) - \frac{(\overline{n}_\epsilon,\delta\overline{\epsilon})}{(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)}\right)P(Q+R)\overline{n}_\epsilon,$$

где $\overline{n}_\sigma$, $\overline{n}_\epsilon$ – обозначают направляющие векторы напряжений и деформаций,

$$\Phi \equiv \frac{1}{(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)} - (\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)$$

и так же, как это было сделано выше в двух примерах, при помощи специального выбора зависящих от процесса метрик привести к уравнениям простого процесса и проинтегрировать вдоль траектории процесса деформаций.

Аналогичные результаты получаются для процесса нагружения. В этом случае получим:

$$(1-Q\Phi)\delta\overline{\sigma} = P(1+R\Phi)\delta\overline{\epsilon} + \left((\overline{n}_\epsilon,\delta\overline{\sigma}) - \frac{(\overline{n}_\sigma,\delta\overline{\sigma})}{(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)}\right)(Q+R)\overline{n}_\sigma +$$

$$+\left((\overline{n}_\sigma,\delta\overline{\sigma}) - \frac{(\overline{n}_\epsilon,\delta\overline{\sigma})}{(\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\epsilon)}\right)(Q+R)\overline{n}_\epsilon.$$

Для иллюстрации полученных уравнений состояния и определения роли входящих в него функционалов произведем в последнем соотношении разделение деформаций на упругие и пластические $\overline{\epsilon} = \overline{\sigma}/2G + \overline{\epsilon}_P$, G – модуль сдвига. Получим соотношение, которое можно представить в следующем виде:

$$\frac{P}{Q+R}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{2G}-\Phi\left(\frac{Q}{P}+\frac{R}{2G}\right)\right)\delta\overline{\sigma} = \frac{P}{Q+R}(1+R\Phi)\delta\overline{\epsilon}_P - \frac{\Phi}{\sigma^2}\overline{\sigma}(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) -$$

$$-\frac{\sigma c^2}{\epsilon(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})h}\left(\frac{1}{hc^2}\right)\left(\overline{\sigma}(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) - h\overline{\sigma}(\overline{\epsilon}_P,\delta\overline{\sigma}) - h\overline{\epsilon}_P(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) + h^2\overline{\epsilon}_P(\overline{\epsilon}_P,\delta\overline{\sigma})\right),$$

$$\frac{1}{h} \equiv \left(\frac{(\overline{\sigma},\overline{\epsilon})}{\sigma^2} - \frac{1}{2G}\right).$$

В этом соотношении слагаемые сгруппированы так, чтобы члены, соответствующие моделям течения с трансляционным и изотропным упрочнениями, были выделены. Если дополнительно определить параметр c соотношением:

$$\frac{\sigma^2 c^2}{\epsilon(\sigma,\epsilon)h} = \frac{P}{Q+R}(1+R\Phi),$$

то получится трактовка рассматриваемых уравнений состояния в виде следующего принципа «суперпозиции» пластических деформаций:

$$\delta\overline{\epsilon}_P^{(1)} \equiv \frac{1}{hc^2}\left(\overline{\sigma}(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) - h\overline{\sigma}(\overline{\epsilon}_P,\delta\overline{\sigma}) - h\overline{\epsilon}_P(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma}) + h^2\overline{\epsilon}_P(\overline{\epsilon}_P,\delta\overline{\sigma})\right),$$

$$\delta\overline{\epsilon}_P^{(2)} \equiv \frac{\Phi}{1+R\Phi}(Q+R)\frac{\overline{\sigma}(\overline{\sigma},\delta\overline{\sigma})}{P\sigma^2},$$

$$(1+R\Phi)\delta\overline{\epsilon}_P^{(3)} \equiv \left(\frac{1}{P}-\frac{1}{2G}-\Phi\left(\frac{Q}{P}+\frac{R}{2G}\right)\right)\delta\overline{\sigma},$$

$$\delta\overline{\epsilon}_P = \delta\overline{\epsilon}_P^{(1)} + \delta\overline{\epsilon}_P^{(2)} + \delta\overline{\epsilon}_P^{(3)}.$$

3. Другая модель поведения трансляционно-упрочняющихся материалов

Рассмотрим соотношение связи между напряжениями и деформациями дифференциального типа, предполагающее трансляционно-изотропное упрочнение материала при пластической деформации, и пусть задан процесс деформации:

$$\delta\overline{\epsilon} = \frac{1}{N}\delta(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0) + \left(\frac{1}{P}-\frac{1}{N}\right)\frac{(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0,\delta(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0))}{(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0)^2}(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0),$$

$$\delta\overline{\sigma}_0 = N_1\delta\overline{\epsilon} + (P_1-N_1)\frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2}\overline{\epsilon}. \qquad (10)$$

Покажем, что и в этом случае уравнения (10) также могут быть проинтегрированы вдоль траектории деформации. Возьмем второе соотношение (10) и в нем проведем масштабирование, как это было сделано выше. При специальном выборе метрики M_ϵ это соотношение упростится:

$$\frac{\delta M_\epsilon}{M_\epsilon} = \left(1-\frac{P_1}{N_1}\right)\frac{(\overline{\epsilon},\delta\overline{\epsilon})}{\epsilon^2},\ \delta\overline{\sigma}_0 = N_1 M_\epsilon \delta\left(\frac{\overline{\epsilon}}{M_\epsilon}\right). \qquad (11)$$

При заданном процессе деформаций уравнения (11) определяют центр поверхности нагружений. Далее проводим перенормировку пространства напряжений: $\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0 = M_\sigma\left((\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0)/M_\sigma\right)$. При соответствующем выборе метрики M_σ первое уравнение (10) упростится:

$$\frac{\delta M_\sigma}{M_\sigma} = (P-N)\frac{(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0,\delta\overline{\epsilon})}{(\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0)^2},\ \delta\left(\frac{\overline{\sigma}-\overline{\sigma}_0}{M_\sigma}\right) = \frac{N}{M_\sigma}\delta\overline{\epsilon}. \qquad (12)$$

Таким образом, формулы (11) и (12) определяют функционал $\overline{\sigma} \sim \overline{\epsilon}$, заданный системой уравнений в вариациях (10) и могут быть проинтегрированы вдоль траектории деформаций.

Список литературы

[1] Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н. Нелокальная теория структурированных композитных материалов // Механ. композит. материалов. 1984. №3. С. 408–416.

[2] Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н. Динамическая калибровка диссипации в композитных нелокальных средах // Механ. композит. материалов. 1985. №2. С. 217–224.

[3] Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 272.

Метод параметрической устойчивой идентификации динамического битового трафика в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания

А.Н. Назаров

1. Введение

Разработка механизмов управления ресурсами и защиты от перегрузок в сетях широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания (ШЦСИО) на технологии АТМ представляет собой сложную и многоплановую задачу.

Новые подходы и методы ее решения обусловлены следующими особенностями сетей АТМ [1]:

– необходимостью удовлетворения требований пользователей к полосе пропускания (необходимой пропускной способности линий связи) и качеству обслуживания, выраженному в вероятностно-временных характеристиках процессов доставки информации для очень широкого диапазона применений;

– в отличие от традиционных пакетных сетей узким местом в высокоскоростных сетях АТМ является не время передачи по каналу, а скорость обработки пакетов в узлах коммутации и время распространения сигналов, которое полностью характеризуется битовой скоростью передачи информации пользователя.