$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{m_0 m_1} \sum_{\tau\in\mathcal{M}} \sum_{u\in T_1} \sum_{v\in T_0} \prod_{i=1}^{n} (1 - \tau_i |t_i - u_i||u_i - v_i|),$$

аналогично $\Lambda_0(t)$. Преобразуем $\Lambda_1(t)$:

$$\Lambda_1(t) = \sum_{\substack{\beta \\ \beta\subset\{1,\ldots,n\}}} (-1)^{|\beta|} \Big(\sum_{\tau\in\mathcal{M}} \prod_{i\in\beta} \tau_i \Big) \Big(\frac{1}{m_1} \sum_{u\in T_1} \prod_{i\in\beta} |t_i - u_i| \Big(\frac{1}{m_0} \sum_{v\in T_0} |u_i - v_i| \Big) \Big).$$

Возьмем линейное приближение $\Lambda(t)$ относительно величин $|t_i - u_i|$ и $|t_i - v_i|$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Lambda^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i (S_{0i} - S_{1i}) + 2 \sum_{i=1}^{n} p_i (S_{1i} - S_{0i}) t_i,$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор информационных весов $\mathcal{M}$, $S_j = (S_{j1}, \ldots, S_{jn})$ – спектр T_j, $j = 0, 1$.

Предложение 2. *Линейное приближение алгоритма голосования с решающим правилом $\Lambda(t)$ совпадает с аналогичным линейным приближением алгоритма голосования.*

Список литературы

[1] Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б. Комбинаторно-логический подход к задачам прогноза рудоносности // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1976. Вып. 31. С. 5–33.

[2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. М.: Изд-во МГУ, 1996.

Дифференциальная компьютерная алгебра*

Е.В. Панкратьев

Компьютерная алгебра имеет дело с конструктивными методами в алгебраических структурах и их реализацией в виде программ для ЭВМ. Своим возникновением и развитием компьютерная алгебра обязана бурному развитию вычислительной техники и применению компьютеров в алгебраических исследованиях. Как отдельное направление компьютерная алгебра сформировалась во 2-й половине XX века. В течение достаточно долгого времени для алгоритмов компьютерной алгебры использовались такие термины, как «аналитические вычисления», «символьные вычисления», «аналитические преобразования» и т.д. В настоящее время имеется достаточно обширная литература по компьютерной алгебре, из которой выделим книги [9], [6], [3], [25].

Дифференциальная алгебра как область математики сформировалась в работах Дж. Ритта в первой половине XX столетия. Громадную роль в ее развитии сыграли работы Е. Колчина. И. Капланский в авторском предисловии к книге [8] пишет «Дифференциальную алгебру легко описать: она состоит (на 99% или более) из работ Ритта и Колчина». За полвека, прошедшие с момента публикации книги Капланского, ситуация существенно изменилась, хотя монографии [47] и [34] остаются самыми фундаментальными трудами по дифференциальной алгебре. Важным событием в дифференциальной алгебре стал доклад Колчина [33] на Московском Математическом Конгрессе в 1966 г. В нем Колчин фактически сформулировал программу

*Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 99-1222.

развития дифференциальной алгебры. В значительной степени благодаря этому докладу появились многочисленные публикации, посвященные отдельным вопросам дифференциальной алгебры, и обзоры, из которых назовем [12] и [48].

Дифференциальная алгебра имеет дело с алгебраическими структурами (в основном, кольцами и полями), в которых наряду с операциями сложения, вычитания, умножения и деления определена операция дифференцирования (одна или несколько). При этом дифференцирование кольца R определяется как отображение $d : R \to R$ такое, что

$$d(a+b) = d(a) + d(b), \tag{1}$$

$$d(ab) = a \cdot d(b) + d(a) \cdot b. \tag{2}$$

Ясно, что дифференцирование, используемое в дифференциальном исчислении, удовлетворяет этим условиям. Дифференциальное кольцо — это (коммутативное) кольцо с 1, на котором задано некоторое дифференцирование (если одно, то дифференциальное кольцо называется обыкновенным, если несколько коммутирующих между собой дифференцирований, то кольцо с частными производными). Если это кольцо к тому же является полем, то говорят о дифференциальном поле (обыкновенном или с частными производными).

Теория дифференциальных уравнений, дифференциальная алгебра и дифференциальная геометрия на одни и те же объекты смотрят несколько с разных точек зрения и описывают их «на разных языках». Эту особенность отметил, в частности, Ю.И. Манин [11]. Так, в дифференциальной алгебре, если элементы f и g некоторого обыкновенного дифференциального поля связаны между собой соотношениями $d(g) = g \cdot d(f)$, то говорят, что g — экспонента f, а f — логарифм g, и пишут $g = \exp(f)$, $f = \ln(g)$.

Важным объектом дифференциальной алгебры является поле $\mathcal{E}$ элементарных функций. Поле элементарных функций является дифференциальным полем, содержащим поле рациональных функций от одной переменной (с рациональными коэффициентами) с «естественным дифференцированием». Оно алгебраически замкнуто и замкнуто относительно присоединения экспонент и логарифмов. Хотя это

определение, кажется, накладывает очень сильные ограничения на функции, называемые элементарными, в действительности элементарными является большинство функций, рассматриваемых в курсе математического анализа, в частности, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические, как показывают следующие соотношения.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \qquad \arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2}),$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \arccos x = -i \ln(x + i\sqrt{1 - x^2}),$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2i} \qquad \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Первые применения компьютеров в дифференциальной алгебре были связаны с программами дифференцирования функций. Таблицы дифференцирования «базисных» функций, вместе с правилами (1), (2) и правилом дифференцирования сложной функции делают эту задачу несложной для реализации на компьютере.

Совсем по другому обстоит дело с символьным интегрированием или интегрированием в замкнутом виде. Задача состоит в том, чтобы для функции f из некоторого класса $\mathcal{A}$ найти функцию g в некотором классе $\mathcal{B}$ такую, что $d(g) = f$, или доказать, что в классе $\mathcal{B}$ такой функции не существует. Эта задача легко решается, если в качестве $\mathcal{A}$ берется множество полиномиальных или рациональных функций. Однако, обычно в качестве $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ берется поле элементарных функций. Долгое время считалось, что задача интегрирования в замкнутом виде алгоритмически неразрешима ни для какого сколько-нибудь широкого класса функций. Заметим, что частным случаем этой проблемы является вопрос о том, когда интеграл, представляющийся на первый взгляд эллиптическим, может быть в действительности выражен через элементарные выражения. Эту задачу долго считали неразрешимой, и Харди сформулировал классическую точку зрения следующим образом:

«Не было придумано метода, с помощью которого мы всегда могли бы определить за конечное число шагов, является ли данный эллиптический интеграл псевдоэллиптическим и проинтегрировать его в этом случае; есть основания думать, что такого метода и нельзя дать» [29].

Бурное развитие теории интегрирования в замкнутом виде началось в конце 60-х годов, когда Риш сформулировал алгоритм интегрирования трансцендентных функций [46]. Дж. Дэвенпортом [7] получены алгоритмы интегрирования алгебраических функций. Среди многочисленных исследователей, разработавших теорию интегрирования алгебраических и смешанных функций следует выделить М. Бронштейна [17], [19]. В настоящее время алгоритмы символьного интегрирования реализованы во всех значительных системах компьютерной алгебры, однако, наряду с современными алгоритмами они широко используют различные эвристические методы, связанные с таблицами интегралов и преобразованиями, поскольку сложность алгоритмических методов очень высока. Наряду с совершенствованием алгоритмов интегрирования элементарных функций эта область дифференциальной алгебры развивается за счет рассмотрения класса $\mathcal{B}$, допускающего присоединение других функций (интеграл вероятности ошибки, логарифмический интеграл).

Задачу интегрирования можно рассматривать как задачу нахождения решений дифференциального уравнения $y' = f$. Класс, в котором должна лежать правая часть этого уравнения, определяет класс дифференциальных уравнений. Можно в качестве класса $\mathcal{A}$ выбирать другое множество дифференциальных уравнений и искать их решения в классе $\mathcal{B}$. Например, $\mathcal{A}$ — множество линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами (выбор класса $\mathcal{B}$ в этом случае не имеет большого значения). Алгоритмы решения таких уравнений хорошо известны. Значительно более сложный случай — обыкновенные линейные дифференциальные уравнения над полем рациональных функций. В качестве $\mathcal{B}$ можно взять поле рациональных функций, тогда получаем задачу нахождения рациональных решений линейного дифференциального уравнения, которая активно исследуется в последние десятилетия, в частности, С.А. Абрамовым [1, 2] и М. Бронштейном [18]. Впечатляющие результаты были получены по нахождению элементарных решений линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Ковасик [38] решил эту задачу для уравнений второго порядка, а Сингер [49] — для уравнений произвольного порядка. Алгоритм Ковасика реализован во многих системах компьютерной алгебры, в то время как сложность алгоритма Сингера очень высокая, и мало надежд на его реализацию для уравнений более высокого порядка, чем 3.

В действительности алгоритмы Ковасика и Сингера работают для более широкого класса, чем класс элементарных функций, для так называемых лиувиллевых функций, когда в качестве элементарных расширений рассматриваются алгебраические, а также присоединения интегралов (решений уравнения $y' = f$) и экспонент интегралов (решений уравнения $y' = fy$). Лиувиллевы расширения тесно связаны с дифференциальной теорией Галуа, которая изучает расширения дифференциальных полей и их группы дифференциальных автоморфизмов. Наиболее последовательно дифференциальная теория Галуа изложена в монографии Колчина [34]. Основной объект этой теории — расширения Пикара–Вессио, которые получаются присоединением к основному дифференциальному полю фундаментальной системы решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения. Дифференциальная группа Галуа такого расширения — алгебраическая матричная группа над полем констант. Связная компонента этой группы разрешима тогда и только тогда, когда расширение лиувиллево, то есть может быть получено с помощью конечного числа расширений, каждое из которых является либо алгебраическим, либо присоединением интеграла, либо присоединением экспоненты интеграла. Для расширения, получающегося присоединением интеграла, дифференциальная группа Галуа совпадает с аддитивной группой поля констант, а присоединению экспоненты интеграла соответствует мультипликативная группа поля констант. В монографии Колчина имеется обобщение теории Пикара–Вессио на случай так называемых сильно нормальных расширений, для которых дифференциальные группы Галуа являются алгебраическими группами (не обязательно линейными) над полем констант. В дифференциальной теории Галуа выделяют прямую задачу, когда для данного дифференциального расширения $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ требуется найти его дифференциальную группу Галуа $\mathrm{Gal}(\mathcal{G}/\mathcal{F})$, и обратную, когда для данного дифференциального поля $\mathcal{F}$ и алгебраической группы G требуется найти дифференциальное расширение $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ такое, что $\mathrm{Gal}(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = G$. Наиболее значительные результаты по прямой и обратной задачам дифференциальной теории Галуа принадлежат Ковасику [36, 37], Рами [44], Мичи и Сингеру [40, 41].

Иной подход к построению дифференциальной теории Галуа, основанный на теории Драха–Вессио, предложен Поммаре [43].

К сожалению, далеко не всегда для дифференциального уравнения удается найти решение в замкнутом виде. Поэтому приобретают большое значение исследования дифференциальных уравнений, связанные с их численным решением, в частности, можно выделить локальный анализ, то есть решение дифференциальных уравнений в виде степенных рядов [23, 50, 4]. Другое направление – факторизация дифференциальных операторов, когда дифференциальный оператор представляется в виде композиции дифференциальных операторов меньшего порядка. Исследования в этом направлении ведутся, в частности, Д. Григорьевым [28] и С.П. Царевым [52].

Широко применяются аналитико-численные вычисления, когда аналитические вычисления, системы компьютерной алгебры применяются для преобразования дифференциальных уравнений аналитическими методами, с последующим применением численных.

Более подробно хочу остановиться на исследовании уравнений в частных производных.

Как известно, исследование систем нелинейных алгебраических уравнений с алгебраической точки зрения сводится к изучению идеалов в кольцах многочленов. Конструктивные методы в таких кольцах основаны на применении теории базисов Гребнера. Понятие базиса Гребнера было введено Бухбергером [20] (хотя аналогичные базисы использовались и ранее) и исследовано многочисленными авторами [15]. В последние годы в коммутативной и дифференциальной алгебре активно развивается также исследование инволютивных базисов. Понятие инволютивного базиса было введено Жарковым, Гердтом и Блинковым [53, 27, 26]. При этом они использовали

идеи математиков начала XX века, в частности, Жане [30] и Рикье [45]. Исследование связи между инволютивными базисами и базисами Гребнера проводилось Апелем [14] и другими авторами [5]. Инволютивные базисы представляют собой частный случай базисов Гребнера, как правило, неминимальных. При этом алгоритм вычисления инволютивных базисов отличается от стандартного алгоритма вычисления базисов Гребнера, поэтому представляет интерес сравнение времени их работы.

Аналогично, исследование алгебраических уравнений в частных производных сводится к исследованию дифференциальных идеалов в кольце дифференциальных многочленов, которое устроено значительно более сложно, чем кольцо обычных (алгебраических) многочленов. С алгебраической точки зрения кольцо дифференциальных многочленов от конечного числа дифференциальных переменных представляет собой кольцо многочленов от счетного числа переменных, которыми являются данные дифференциальные переменные и все их производные. Очевидно, что это кольцо не является нетеровым. Более того, оно не является дифференциально нетеровым, то есть в нем существуют бесконечные возрастающие цепочки дифференциальных идеалов или, что равносильно, дифференциальные идеалы, не имеющие конечного числа дифференциальных образующих. Как показано в работе [24], проблема принадлежности дифференциального многочлена дифференциальному идеалу алгоритмически неразрешима в кольце дифференциальных многочленов. Однако теорема Ритта–Роденбаша утверждает, что в нем выполняется условие нетеровости для совершенных (радикальных) дифференциальных идеалов. Следовательно, в кольце дифференциальных многочленов над дифференциальным полем нулевой характеристики любой совершенный дифференциальный идеал может быть представлен как радикал некоторого конечно порожденного дифференциального идеала.

Как известно, алгебраическое исследование систем нелинейных алгебраических (недифференциальных) уравнений сводится к исследованию соответствующих идеалов в кольце многочленов. Если система имеет конечное число решений над алгебраически замкнутым полем, то найти все ее решения — значит представить идеал как пересечение конечного числа идеалов вида $(x_i - \xi_i,\ i = 1, \ldots, n)$. Как правило, этого сделать не удается, и рассматриваются частные задачи. Если множество решений бесконечно, то его можно представить как объединение неприводимых компонент. Этому представлению множества решений соответствует представление соответствующего идеала в виде пересечения примарных идеалов. Аналогично, любой совершенный дифференциальный идеал может быть представлен как пересечение конечного числа простых дифференциальных идеалов, но к настоящему времени нет алгоритма нахождения такого представления. Однако, в статье [16] предложен алгоритм Розенфельда–Гребнера, вычисляющий представление совершенного дифференциального идеала в виде пересечения идеалов некоторого специального вида, которые во многих случаях могут оказаться простыми.

С другой стороны, можно поставить задачу определения размерности множества решений (алгебраического многообразия). В коммутативной алгебре известно несколько эквивалентных определений понятия размерности. В частности, размерность многообразия может быть определена как степень так называемого многочлена Гильберта, дающего более тонкую информацию о размерностных свойствах многообразия.

В дифференциальной алгебре аналогом многочлена Гильберта является дифференциальный размерностный многочлен. Для его вычисления применяются методы, аналогичные тем, которые используются в коммутативной алгебре для вычисления многочлена Гильберта, но в дифференциальной алгебре они работают не всегда. Предшественником дифференциального размерностного многочлена было понятие «жесткости» системы дифференциальных уравнений, введенное А. Эйнштейном в 1952 году [13] следующим образом:

«... систему уравнений поля следует выбирать так, чтобы полевые величины определялись этой системой как можно более жестким образом. Чтобы применять этот принцип, нам нужен метод, который позволял бы дать меру жесткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные поля вблизи точки P в ряд Тейлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные элементов поля в точке P, распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, получаемых из них путем дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество «свободных» коэффициентов в каждой группе непосредственно дает меру «слабости» системы уравнений и, таким образом, определяет «жесткость» системы.»

Затем Эйнштейн вычисляет «жесткость» некоторых систем уравнений в частных производных. В следующей своей работе он отмечает, что вычисления в одном из этих примеров ошибочны, производит вычисления другим методом и получает другой ответ.

В 1964 г. Е. Колчин [32] ввел понятие дифференциального размерностного многочлена, который, по существу, формализует понятие «жесткости» по Эйнштейну (хотя в работах Колчина не встречается упоминания о работе Эйнштейна). В докладе на Московском Математическом Конгрессе в 1966 г. Колчин [33] формулирует задачу исследования дифференциального размерностного многочлена в качестве одной из основных задач дифференциальной алгебры и указывает на ее связь с такими классическими математическими проблемами, как задача о границе Якоби, гипотеза Жане и т.д.

В коммутативной алгебре можно дать много эквивалентных определений понятия базиса Гребнера полиномиального идеала. Эти определения допускают обобщения на случай дифференциальных идеалов в кольце дифференциальных многочленов, но работают не в полной общности и не являются эквивалентными. В частности, минимальный базис Гребнера можно определить как авторедуцированное подмножество минимального ранга в данном идеале. Аналогичное понятие использовалось в дифференциальной алгебре задолго до того, как Бухбергер ввел понятие базиса Гребнера. Однако в дифференциальной алгебре минимальные авторедуцированные множества рассматриваются только в простых дифференциальных идеалах и называются характеристическими множествами этих идеалов (в терминологии, введенной Колчиным; до этого Ритт их называл цепями). К сожалению, алгоритм пополнения, используемый в коммутативной алгебре для нахождения базисов Гребнера, не всегда дает в дифференциальной алгебре характеристическое множество соответствующего простого идеала. Кроме того, следует отметить, что сама задача нахождения простых компонент дифференциального идеала значительно сложнее аналогичной задачи для полиномиальных идеалов. В частности, дифференциальный идеал, порожденный одним неприводимым дифференциальным многочленом, может не быть простым. Попытки введения понятия дифференциального базиса Гребнера предпринимались в последнее десятилетие различными авторами, среди них Карра-Ферро [21, 22], Мансфилд [39], Олливье [42]. Однако, к настоящему времени не выработано четкого представления, что же такое дифференциальный базис Гребнера и можно ли такое понятие корректно определить.

Ситуация значительно упрощается, если ограничиться рассмотрением только линейных систем уравнений в частных производных. В действительности, для описания таких систем удобно пользоваться не теорией дифференциальных идеалов в кольце дифференциальных многочленов, а теорией дифференциальных модулей над кольцом дифференциальных операторов (некоторые авторы называют это кольцо также кольцом дифференциальных многочленов, так что имеется некоторая путаница в определениях). Кольцо дифференциальных операторов представляет собой кольцо некоммутативных многочленов (дифференциального типа) над некоторым дифференциальным полем. Теория базисов Гребнера допускает непосредственное обобщение на случай модулей над этим кольцом. В действительности, переход от расширения дифференциальных полей к модулю дифференциалов сводит, в некотором смысле, рассмотрение нелинейных систем дифференциальных уравнений к линейному случаю, однако при этом все проблемы, связанные с конструктивными методами, остаются, поскольку коэффициенты получающейся системы принадлежат расширению исходного дифференциального поля.

В коммутативной алгебре и алгебраической геометрии базисы Гребнера полиномиальных идеалов применяются для нахождения многочленов Гильберта соответствующего идеала или многообразия. Вычисление многочлена Гильберта при известном базисе Гребнера сводится к решению некоторой комбинаторной задачи. Та же самая задача решается при вычислении дифференциального размерностного многочлена по известному характеристическому множеству простого дифференциального идеала или по базису Гребнера дифференциального модуля. Более того, Дж. Джонсон доказал, что дифференциальный размерностный многочлен является многочленом Гильберта некоторого градуированного модуля над кольцом многочленов с коэффициентами из некоторого дифференциального поля [31]. Однако в дифференциальном случае имеется существенное отличие. Многочлен Гильберта полиномиального идеала является его инвариантом, то есть не зависит от выбора системы образующих этого идеала. Дифференциальный размерностный многочлен не является дифференциальным инвариантом, он зависит от выбора системы образующих. При этом множество размерностных многочленов естественным образом упорядочено. Как показал Сит [51], среди размерностных многочленов, соответствующих различному выбору образующих одного и того же дифференциального идеала, имеется минимальный, который является, таким образом, дифференциальным инвариантом этого идеала. Описание множества минимальных дифференциальных размерностных многочленов получено М.В. Кондратьевой [10]. Однако о минимальном дифференциальном размерностном многочлене известно достаточно мало. В частности, известно, что размерностный многочлен является минимальным, если характеристическое множество (или соответствующий базис Гребнера) состоит из одного элемента. В связи с этим представляет интерес конструктивная версия теоремы о примитивном элементе. При некоторых достаточно простых ограничениях дифференциальное расширение поля или дифференциальный модуль может быть порожден одним элементом. Однако, нахождение этого элемента, а особенно, системы уравнений, которым удовлетворяет этот элемент, наталкивается на значительные трудности. Наиболее полно результаты о дифференциальном размерностном многочлене представлены в монографии [35].

Вычисление размерностного многочлена по инволютивному базису производится значительно проще, чем по минимальному базису Гребнера.

Дифференциальная компьютерная алгебра далеко не исчерпывается перечисленными выше задачами. О других ее аспектах можно прочитать в различных обзорах, например, в обзоре Зайлера [48].

Список литературы

[1] Абрамов С.А. Рациональные решения дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Журн. Выч. Мат. Мат. Физ. 29. 1989. № 11. С. 1611–1620.

[2] Абрамов С.А. Алгоритм построения квазирациональных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Вестник МГУ. Сер. XV, Выч. Мат. Кибер. 1991. № 1. С. 43–48.

[3] Акритас А. Компьютерная алгебра с приложениями. М.: Мир, 1994.

[4] Астрелин А.В. Собственные многочлены дифференциального оператора первого порядка над кольцом многочленов от двух переменных. Дисс. к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1992.

[5] Астрелин А.В., Голубицкий О.Д., Панкратьев Е.В. Инволютивные базисы идеалов в кольце многочленов // Программирование. 2000. № 2. С. 46–52.

[6] Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. М.: Мир, 1991.

[7] Дэвенпорт Дж. Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985.

[8] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: ИЛ, 1959.

[9] Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. М.: Мир, 1994.

[10] Кондратьева М.В. Описание множества минимальных дифференциальных размерностных многочленов // Вестник МГУ. Сер. I. 1988. № 1. С. 35–39.

[11] Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–152.

[12] Михалев А.В., Панкратьев Е.В. Дифференциальная и разностная алгебра // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 25. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 67–139.

[13] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 2. Работы по теории относительности. 1921–1955. М.: Наука, 1966. С. 777–786.

[14] Apel Joachim. A Gröbner approach to involutive bases // J. Symbolic Comput. 19. 1995. No. 5. P. 441–457.

[15] Becker T., Weispfenning V. Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra. New York: Springer-Verlag, 1993.

[16] Boulier F., Lazard D., Ollivier F., Petitot M. Representation for the radical of a finitely generated differential ideal // Proceedings of ISSAC 1995. ACM Press, 1995. P. 158–166.

[17] Bronstein, Manuel. Integration of elementary functions // J. Symbolic Comput. 9. 1990. No. 2. P. 117–173.

[18] Bronstein, Manuel. On solution of linear ordinary differential equations in their coefficient field // J. Symbolic Comput. 13. 1992. P. 413–439.

[19] Bronstein Manuel. Symbolic Integration I: Transcendental Functions // Algorithms and Computation in Mathematics. Berlin: Springer, 1997.

[20] Buchberger B. Ein Algorithmus zum zuffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Ph. Thesis. Univ. Innsbruck, 1965.

[21] Carra-Ferro Giuseppa. Gröbner bases and differential algebra // Lect. Notes Comput. Sci. 356. 1989. P. 129–140.

[22] Carra-Ferro Giuseppa. Differential Gröbner bases in one variable and in the partial case. Algorithms and software for symbolic analysis of nonlinear systems // Math. Comput. Modelling. 25. 1997. No. 8–9. P. 1–10.

[23] Denef J., Lipshitz L. Power series solutions of algebraic differential equations // Math. Ann. 267. 1984. P. 213–238.

[24] Gallo G., Mishra B., Ollivier F. Some constructions in rings of differential polynomials // Lect. Notes Comput. Sci. 539. 1991. P. 171–182.

[25] Geddes K.O., Czapor St.R., Labahn G. Algorithms for Computer Algebra. Dordrecht: Kluwer, 1992.

[26] Gerdt V.P., Blinkov Y.A. Minimal Involutive Bases. Preprint JINR. E5-97-4. Dubna, 1997.

[27] Gerdt V.P. Involutive Division Technique: Some Generalizations and Optimizations. Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. E5-98-151. Dubna, 1998.

[28] Grigoriev D. NC solving of a system of linear ordinary differential equations in several unknowns // Theoretical Computer Sci. 157. 1996. P. 79–90.

[29] Hardy G.H. The Integration of Functions of a Single Variable. 2nd ed. Cambridge Tract 2. C.U.P. 1916.

[30] Janet M. Leçons sur le Systèmes d'Équations aux Derivées Partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

[31] Johnson Joseph L. Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules // Amer. J. Math. 91. 1969. P. 239–248.

[32] Kolchin E.R. The notion of dimension in the theory of algebraic differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 70. 1964. P. 570–573.

[33] Kolchin E.R. Some problems in differential algebra // Proceeding of Moscow International Congress of Mathematics. Moscow, 1968. P. 269–276.

[34] Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York – London: Academic Press, 1973.

[35] Kondratieva M.V., Levin A.B., Mikhalev A.V., Pankratiev E.V. Differential and Difference Dimension Polynomials. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[36] Kovacic Jerald. The inverse problem in the Galois theory of differential fields // Ann. of Math. 89. 1969. P. 583–608.

[37] Kovacic Jerald. On the inverse problem in the Galois theory of differential fields // Ann. of Math. 93. 1971. P. 269–284.

[38] Kovačic J.J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symb. Comp. 2. 1986. P. 3–43.

[39] Mansfield E. Differential Gröbner bases. Ph. D. Thesis. University of Sidney, 1991.

[40] Mitschi C., Singer M. Connected linear groups as differential Galois groups // J. Algebra. 184. 1996. No. 1. P. 333–361.

[41] Mitschi C., Singer M. On Ramis' solution of the local inverse problem of differential Galois theory // J. Pure Appl. Algebra. 110. 1996. No. 2. P. 185–194.

[42] Ollivier François. Standard bases of differential ideals // Lect. Notes Comput. Sci. 508. 1991. P. 304–321.

[43] Pommaret J.F. Differential Galois Theory. London: Gordon & Breach, 1983.

[44] Ramis J.P. About the solution of some inverse problems in differential Galois theory by Hamburger equations // Differential Equations, Dynamical Systems, and Control Science. A Festschrift in Honor of Lawrence Markus / Eds. K.D. Elworthy, L. Markus. Lect. Notes Pure Appl. Math. 152. New York: Marcel Dekker, 1994. P. 277–299.

[45] Riquier F. Les Systèmes d'Équations aux Derivées Partielles. Paris: Gauthier–Villars, 1910.

[46] Risch R.H. The problem of integration in finite terms // Trans. A.M.S. 139. 1969. P. 167–189.

[47] Ritt J.F. Differential Algebra // Amer. Math. Soc. Coll. Pub. No. 33. New York, 1950.

[48] Seiler W.M. Computer Algebra and Differential Equations. An Overview // MathPAD. 7/1. 1997. P. 34–49.

[49] Singer M.F. Liouvillian solutions of n-th order homogeneous linear differential equations // Am. J. Math. 103. 1981. P. 661–682.

[50] Singer M.F. Formal solutions of differential equations // J. Symb. Comp. 10. 1990. P. 59–94.

[51] Sit W. Well ordering of certain numerical polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 212. 1975. No. 1. P. 37–45.

[52] Tsarev S.P. An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator // Proceedings of the 1996 international symposium on symbolic and algebraic computation / Lakshman Y.N. (ed.). ISSAC '96. Zuerich, Switzerland, July 24-26, 1996. New York, NY: ACM Press, 1996. P. 226–231.

[53] Zharkov A.Yu., Blinkov Yu.A. Involutive Approach to Investigating Polynomial Systems // Proceedings of «SC 93», International IMACS Symposium on Symbolic Computation: New Trends and Develpments (Lille, June 14–17, 1993). Math. Comp. Simul. 42. 1996. P. 323–332.