[3] Грунский И.С., Козловский В.А., Пономаренко Г.Г. Представления конечных автоматов фрагментами поведения. Киев: Наукова думка, 1990.

[4] Бородай С.Ю. Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов. Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. Саратов, 1997.

[5] Данеев А.В., Русанов В.А. К аксиоматической теории идентификации динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. №8. С. 126–135.

[6] Кэлли Дж. Общая топология / Пер. с англ. 20-е изд. М.: Наука, 1981.

[7] Строгалов А.С. Об ε-моделировании поведения конечных автоматов. Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. Саратов, 1985.

[8] Грунский И.С., Максименко И.И. Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний // Кибернетика и системный анализ. 1999. №4. С. 59–71.

[9] Максименко И.И. Эксперименты в классе реализации недетерминированных автоматов // Доклады НАН Украины. 1999. №7. С. 95–99.

О бесконечной ловушке для автоматов со следом

А.З. Насыров

Введение

Проблема обхода плоских лабиринтов конечными автоматами была поставлена К. Шенноном в начале шестидесятых годов. Л. Будахом было доказано [1], что не существует конечного автомата, который обходил бы произвольный шахматный лабиринт. Другие доказательства этого факта приведены в [2, 3].

Поиски положительного решения проблемы обхода лабиринтов автоматами велись в двух направлениях. Первое направление связано с рассмотрением более узких классов лабиринтов [5, 6], а второе – с усилением возможностей автоматов. Одно из допустимых усилений – предоставить автомату возможность оставлять отметки в вершинах лабиринта. В работе [7] рассмотрены автоматы, которые «принудительно» оставляют отметки (след) из множества $\{1,\dots,M\}$ в посещенных вершинах, причем номер отметки не убывает в процессе работы автомата, и построен автомат этого вида, обходящий произвольный n-связный плоский прямоугольный лабиринт, а количество видов отметок (число M), используемых этим автоматом, линейно зависит от n.

В данной работе доказывается, что для любого автомата такого вида (здесь они названы автоматами с k-следом) существует бесконечная плоская прямоугольная ловушка.

1. Основные понятия и формулировка результата

Основные понятия, касающиеся автоматов и лабиринтов взяты из [8]. Кроме того, некоторые определния в этом и следующем параграфах взяты из [3].

Пусть X – некоторое множество. Через $\mathbf{P}_0(X)$ обозначим множество всех непустых подмножеств множества X, а через $|X|$ – мощность множества X. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – некоторое индексированное семейство множеств. Тогда для любого $\alpha \in A$ через Пр_α обозначим отображение проектирования произведения $\prod\limits_{\beta\in A} X_\beta$ на его α-й сомножитель X_α. Если множество индексов A конечно, то будем полагать, что $A = \{1,\ldots,|A|\}$. Множество $\mathbf{Z}\cap[a;b]$ будем обозначать $\overline{a,b}$.

Пусть $L = (V,\Gamma)$ – связный ориентированный граф, не имеющий петель и кратных дуг; V – множество вершин, Γ – множество дуг графа L. Если в графе $L = (V,\Gamma)$ вместе с дугой (v_1,v_2) содержится дуга (v_2,v_1), то эту пару называем *ребром* и обозначаем $\langle v_1,v_2\rangle$. Граф $L = (V,\Gamma)$ называется *симметрическим*, если для любой дуги $(v_1;v_2)\in\Gamma$ имеет место $\langle v_1,v_2\rangle\subseteq\Gamma$.

Если всем дугам графа $L = (V,\Gamma)$ приписаны отметки из некоторого алфавита Σ таким образом, что разным дугам, исходящим из одной и той же вершины, приписаны разные отметки, то этот нагруженный граф называем *лабиринтом*. В этом определении и далее, если не оговорено иное, считается, что графы и лабиринты могут быть как конечными, так и бесконечными. Отметку дуги $\gamma\in\Gamma$ обозначим через $|\gamma|$, а через $[v]_L$ обозначим множество отметок дуг, выходящих из вершины v. Если из контекста ясно, о каком лабиринте идет речь, то вместо $[v]_L$ будем писать $[v]$. Лабиринт L с выделенными вершинами v_0 и v_e будем называть *инициальным* и обозначать L_{v_0,v_e}. В этом случае, v_0 назовем *начальной* вершиной (или *входом*), а v_e – *конечной* вершиной (или *выходом*) лабиринта L.

Обозначим через $\mathbf{D}$ множество $\{\mathbf{e},\mathbf{n},\mathbf{w},\mathbf{s}\}$, положим $\mathbf{e}^{-1} = \mathbf{w}$, $\mathbf{n}^{-1} = \mathbf{s}$, $\mathbf{w}^{-1} = \mathbf{e}$, $\mathbf{s}^{-1} = \mathbf{n}$. Лабиринт $L = (V,\Gamma)$ с множеством отметок дуг $\mathbf{D}$ называется *прямоугольным лабиринтом*, если

1) L – связный симметрический граф,

2) для любых $u,v\in V$, если $(u,v)\in\Gamma$, то $|(v,u)| = |(u,v)|^{-1}$.

Через $\deg_L(v)$ (или $\deg(v)$, если ясно, какой лабиринт имеется ввиду) будем обозначать количество ребер, входящих в вершину v прямоугольного лабиринта L.

Пусть M и N – некоторые точки плоскости, $M\neq N$, и $\overline{MN} = \alpha_1\vec{\imath}+\alpha_2\vec{\jmath}$, где $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ – единичные координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Будем говорить, что отрезок $\overline{MN}$ идет в направлении

1) $\mathbf{e}$, если $\alpha_1>0$ и $\alpha_2=0$,

2) $\mathbf{n}$, если $\alpha_1=0$ и $\alpha_2>0$,

3) $\mathbf{w}$, если $\alpha_1<0$ и $\alpha_2=0$,

4) $\mathbf{s}$, если $\alpha_1=0$ и $\alpha_2<0$.

Множество $\mathbf{T}$ отрезков на плоскости называется *конфигурацией*, если любые два отрезка из $\mathbf{T}$ имеют не более одной общей точки, причем, если она есть, то является концевой для обоих отрезков.

Прямоугольный лабиринт $L = (V,\Gamma)$, где $V\subset\mathbb{R}^2$, называется *плоским прямоугольным лабиринтом*, если

1) для любой дуги $(u,v)\in\Gamma$ отрезок $\overline{uv}$ идет в направлении $|(u,v)|$,

2) множество отрезков $\mathbf{T} = \{\overline{uv}\mid(u,v)\in\Gamma\}$ является конфигурацией.

Пусть $L = (V,\Gamma)$ – некоторый плоский прямоугольный лабиринт. Фигура $\overline{L} = \bigcup\limits_{(u,v)\in\Gamma}\overline{uv}$ в $\mathbb{R}^2$ называется *реализацией* лабиринта L. Плоский прямоугольный лабиринт L_{v_0,v_e} называется *правильным*, если существует бесконечный плоский прямоугольный лабиринт L_1 такой, что $\overline{L}\cap\overline{L}_1 = \{v_e\}$ и фигура $\overline{L}_1$ является неограниченной.

Пусть $L_{v_0,v_e} = (V,\Gamma)$ – некоторый прямоугольный лабиринт. Если существует изоморфный L плоский прямоугольный лабиринт $L'_{v'_0,v'_e} = (V',\Gamma')$, то говорим, что L *вложим*, а задаваемое этим изоморфизмом отображение $\mu: V\to V'$ называем *укладкой* лабиринта L. Если при этом лабиринт L' правильный, то L называем *правильно* *вложимым*, а μ – *правильной укладкой*. Ясно, что отображение μ однозначно задает L', поэтому, под укладкой будем иногда понимать L' или даже $\overline{L'}$.

Автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ называется *автоматом с k красками, оставляющим след* (или, короче, автоматом с k-следом), $k \in \mathbb{N}$, если $A = \{0, 1, \ldots, k\} \times \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$ – входной алфавит, $B = \{1, \ldots, k\} \times \mathbf{D}$ – выходной алфавит, φ и ψ – функции переходов и выходов, а множество состояний Q представимо в виде $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ при $i \neq j$, причем для любых $i, j \in \overline{1, k}$, $q \in Q$, $a \in A$ выполнено:

1) $\Pi\mathrm{p}_2(\psi(q, a)) \in \Pi\mathrm{p}_2(a)$,

2) если $q \in Q_i$ и $\varphi(q, a) \in Q_j$, то $i \leqslant j$ и $\Pi\mathrm{p}_1(\psi(q, a)) = j$.

Пусть $\mathfrak{A}_{q_0}$ – инициальный автомат с k-следом, L_{v_0, v_e} – инициальный плоский прямоугольный лабиринт, вершины которого могут быть помечены символами из множества $\overline{0, k}$. Функционирование автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_0, v_e} понимаем следующим образом. В начальный момент времени автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ помещается в вершину v_0 в состоянии q_0, отметки всех вершин изначально равны 0 (вершины неокрашены). Автомат перемещается по лабиринту, оставляя в вершинах лабиринта отметки из множества $\overline{1, k}$ (след). Пусть в момент времени t автомат находился в вершине v в состоянии $q \in Q_i$. Тогда входной буквой автомата в этот момент времени будет пара $a = (\omega, [v])$, где ω – отметка вершины v. Если $\psi(q, a) = (j, e)$, то автомат ставит отметку j в вершину v, переходит в состояние $\varphi(q, a) \in Q_j$ и перемещается в вершину, в которую из v ведет дуга с отметкой e. Таким образом, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$, переходя в состояние из Q_j, «запоминает» отметку, поставленную в предыдущий момент времени. Поэтому, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ ставит в каждую пройденную вершину ненулевую отметку (окрашивает вершину), и, поскольку $i \leqslant j$, с течением времени отметки, оставляемые автоматом, (номер краски) не убывают, а могут лишь возрастать, не превышая числа k.

Конфигурацией инициального автомата $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ с k-следом в плоском прямоугольном лабиринте $L_{v_0, v_e} = (V, \Gamma)$ называется тройка $K = (q, v, \Omega)$, где $q \in Q$, $v \in V$, а $\Omega : V \to \{0, 1 \ldots, k\}$

– разметка лабиринта, то есть $\Omega(v)$ – отметка вершины v. Говорят, что конфигурация (q', v', Ω') *следует* за конфигурацией (q, v, Ω) и обозначают $(q, v, \Omega) \vdash (q', v', \Omega')$, если

$$q' = \varphi(q, a), \quad (v; v') \in \Gamma, \quad |(v; v')| = \Pi\mathrm{p}_2(\psi(q, a)),$$

$$\Omega'(u) = \begin{cases} \Pi\mathrm{p}_1(\psi(q, a)), & \text{если } u = v, \\ \Omega(u), & \text{если } u \neq v, \end{cases}$$

где $a = (\Omega(v), [v])$. Конфигурация (q_0, v_0, Ω_0), где $\Omega_0 \equiv 0$, называется *начальной*.

Аналогичные понятия можно ввести и для автоматов, не обладающих возможностью ставить отметки в вершинах лабиринта.

Автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ называется *автоматом без печати*, если $A = \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$, $B = \mathbf{D} \cup \{\lambda\}$ и $\psi(q, a) \in a \cup \{\lambda\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in A$. Конфигурацией автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ без печати в плоском прямоугольном лабиринте L_{v_o, v_e} называется пара (q, v), где $q \in Q$, $v \in V$. Конфигурация (q', v') следует за конфигурацией (q, v) ($(q, v) \vdash (q', v')$) в двух случаях: 1) если $\psi(q, [v]) = \lambda$, то $v' = v$; 2) если $\psi(q, [v]) \neq \lambda$, то $(v; v') \in \Gamma$, причем $|(v; v')| = \psi(q, [v])$; и в обоих случаях $q' = \varphi(q, [v])$. Конфигурация (q_0, v_0) называется начальной.

Остальные определения в этом параграфе будут общими для автоматов с k-следом и автоматов без печати.

Поведением автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ *в лабиринте* $L_{v_o, v_e} = (V, \Gamma)$ называется последовательность $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0, v_e})$ конфигураций $K_0, K_1, K_2, \ldots$ таких, что K_0 – начальная конфигурация и $K_i \vdash K_{i+1}$ для всех $i \geqslant 0$. *Траекторией* автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте L_{v_o, v_e} назовем последовательность $Tr(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_o, v_e}) = v_0, v_1, v_2, \ldots$, где $v_i = \Pi\mathrm{p}_2(K_i)$. Пусть $V_1 \subseteq V$, тогда *V_1-траекторией* назовем подпоследовательность $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots$ траектории $Tr(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_o, v_e})$, которая получается из $Tr(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_o, v_e})$ удалением вершин, не принадлежащих V_1.

Автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ *выходит* из лабиринта L_{v_0, v_e}, если v_e встречается в последовательности $Tr(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_o, v_e})$. В противном случае говорят, что L_{v_0, v_e} является *ловушкой* для автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$.

Теорема 1. *Не существует автомата с k-следом, который выходит из любого бесконечного плоского прямоугольного лабиринта.*

2. Лемма о возвращающем лабиринте

Конечный прямоугольный лабиринт $L = (V, \Gamma; v', v'')$ с выделенными вершинами v' и v'' назовем *горизонтальным*, если

1) $[v'] = \{\mathbf{e}\}$, $\quad [v''] = \{\mathbf{w}\}$;

2) существует такая укладка μ для L, что для любых $u', u'' \in V$, $\{u', u''\} \neq \{v', v''\}$

$$\Pi\mathrm{p}_2(\mu(v')) = \Pi\mathrm{p}_2(\mu(v'')) \qquad \text{и}$$
$$|\Pi\mathrm{p}_1(\mu(u')) - \Pi\mathrm{p}_1(\mu(u''))| < |\Pi\mathrm{p}_1(\mu(v')) - \Pi\mathrm{p}_1(\mu(v''))|.$$

Лабиринт, получающийся в результате такой укладки, можно заключить внутри прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, за пределы которого выходят только вершины $\mu(v')$ и $\mu(v'')$, см. рис. 1 (при изображении лабиринтов мы не будем указывать отметки дуг, считая, что координатные оси расположены обычным образом: ось Ox направлена вправо, а ось Oy – вверх).

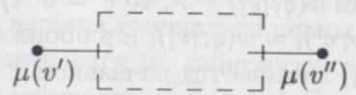

Рис. 1.

Очевидно, что выбирая различные укладки, можно получить прямоугольник сколь угодно малой высоты. Ребро $\langle u, v\rangle$ лабиринта L назовем *горизонтальным*, если $\{|(u,v)|, |(v,u)|\} = \{\mathbf{e}, \mathbf{w}\}$.

Пусть $L_1 = (V_1, \Gamma_1; v', v'')$ – горизонтальный лабиринт, $L = (V, \Gamma)$ – конечный прямоугольный лабиринт, $\langle u, w\rangle$ – горизонтальное ребро лабиринта L и $|(u,w)| = \mathbf{e}$. Возьмем произвольный изоморфный L_1 лабиринт $\widetilde{L}_1 = (\widetilde{V}_1, \widetilde{\Gamma}_1; \widetilde{v}', \widetilde{v}'')$ такой, что $V \cap \widetilde{V}_1 = \varnothing$. Очевидно, что $\widetilde{L}_1$ также будет горизонтальным. Рассмотрим нагруженный граф G с множеством вершин $V \cup \widetilde{V}_1$ и множеством дуг $\Gamma \cup \widetilde{\Gamma}_1$ (объединение графов L и $\widetilde{L}_1$). Через $L \overset{u,w}{+} L_1$ обозначим лабиринт, полученный из графа G удалением ребра $\langle u, w\rangle$ и отождествлением вершин u и $\widetilde{v}'$, а также w и $\widetilde{v}''$. Легко видеть, что, если лабиринт L вложим, то $L \overset{u,w}{+} L_1$ тоже вложим, а, если L – правильно вложим, то и $L \overset{u,w}{+} L_1$ правильно вложим. На содержательном уровне, описанная операция состоит в том, что в граф L вместо горизонтального ребра $\langle u, w\rangle$ вставляется горизонтальный граф L_1.

Перенумеруем горизонтальные ребра лабиринта L: $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$. Пусть $\rho_i = \langle u_i, v_i\rangle$ и $|(u_i, v_i)| = \mathbf{e}$, $i \in \overline{1,m}$. Через $\Delta(L, L_1)$ обозначим лабиринт $L \overset{u_1,v_1}{+} L_1 \overset{u_2,v_2}{+} \cdots \overset{u_m,v_m}{+} L_1$. Как и ранее, если лабиринт L вложим, то $\Delta(L, L_1)$ тоже вложим, а, если L – правильно вложим, то и $\Delta(L, L_1)$ правильно вложим.

Для любого $a = \{d_1, \ldots, d_s\} \in \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$, где $1 \leqslant s \leqslant 4$, через $L(a) = (V(a), \Gamma(a))$ обозначим лабиринт, у которого $V(a) = \{v_0, v_{d_1}, \ldots, v_{d_s}\}$, $\Gamma(a) = \{(v_0, v_{d_1}), (v_{d_1}, v_0), \ldots, (v_0, v_{d_s}), (v_{d_s}, v_0)\}$ и $|(v_0, v_{d_i})| = d_i$, $|(v_{d_i}, v_0)| = d_i^{-1}$ для всех $i \in \overline{1,s}$.

Пусть $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ – автомат без печати, а L_1 – горизонтальный лабиринт. Определим автомат $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1) = (A, Q, B, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, q_0)$ (множества состояний $\mathfrak{A}_{q_0}$ и $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1)$ совпадают) следующим образом. Пусть $a = \{d_1, \ldots, d_s\} \in \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$, $1 \leqslant s \leqslant 4$ и $q \in Q$. Поместим автомат $\mathfrak{A}$ в состоянии q в вершину v_0 лабиринта $L^a = \Delta(L(a), L_1)$. Если, перемещаясь по лабиринту L^a, автомат в какой-то момент времени, отличный от начального, попадет в одну из вершин $v_0, v_{d_1}, \ldots, v_{d_s}$, то обозначим через u ту вершину, в которую он попадет раньше других, а через q' – то состояние, в котором он окажется в этот момент времени. Если $u = v_0$, то полагаем $\widetilde{\varphi}(q, a) = q'$ и $\widetilde{\psi}(q, a) = \lambda$. Если же $u = d_i$ для некоторого $i \in \overline{1,s}$, то полагаем $\widetilde{\varphi}(q, a) = q'$ и $\widetilde{\psi}(q, a) = d_i$. Наконец, если автомат $\mathfrak{A}_q$, перемещаясь по лабиринту L^a, не попадает ни в одну из вершин $v_0, v_{d_1}, \ldots, v_{d_s}$, то полагаем $\widetilde{\varphi}(q, a) = q$ и $\widetilde{\psi}(q, a) = \lambda$.

Отметим следующее свойство автомата $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1)$. Если сравнить поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1)$ в некотором плоском прямоугольном лабиринте $L_{v_0, v_e} = (V, \Gamma)$ и V-поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте $\Delta(L_{v_0, v_e}, L_1)$, помещенных в начальный момент времени в вершину v_0 этих лабиринтов, то эти поведения совпадут. Исключением будет лишь тот случай, когда V-поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ «обрывается», то есть с некоторого момента автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ перестает попадать в вершины из множества V. В этом случае поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1)$ с момента «обрыва» V-поведения $\mathfrak{A}_{q_0}$ будет заключаться в бесконечном повторении последней конфигурации. Это свойство можно еще описать как то, что автомат $\mathfrak{A}_{q_0}(L_1)$ в лабиринте L «моделирует» V-поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте $\Delta(L_{v_o,v_e}, L_1)$.

Пусть $L^u_{v_o,v_e} = (V,\Gamma)$ – правильный плоский прямоугольный лабиринт с выделенной вершиной $u \in V$ такой, что $\deg(u) = 1$ и $\langle u, v_0\rangle \subset \Gamma$, $\mathfrak{A}_{q_0}$ – автомат без печати, а $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L^u_{v_o,v_e}) = (q_0,v_0),(q_1,v_1),(q_2,v_2),\ldots$ – поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в $L^u_{v_o,v_e}$. Лабиринт $L^u_{v_o,v_e}$ называется *возвращающим* для автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$, если $\forall i((v_i = v_e) \Rightarrow (\exists j < i(v_j = v_0 \vee v_j = u)))$ (вершина v_e может встретиться в последовательности $v_1, v_2, \ldots$ не ранее, чем одна из вершин v_0 или u).

Лемма 1. *Для любого конечного набора инициальных автоматов без печати* $\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^n$ *найдется конечный лабиринт, являющийся возвращающим для каждого из этих автоматов.*

Доказательство. Возьмем произвольный автомат без печати $\mathfrak{A}^0$ с начальным состоянием q_0 и функцией выходов ψ^0 такой, что $\psi^0(q_0,\{n,s\}) = s$. Докажем индукцией по n, что для набора автоматов $\mathfrak{A}^0,\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^n$ существует возвращающий лабиринт. Очевидно, что лабиринт, изображенный на рис. 2 является возвращающим для $\mathfrak{A}^0$.

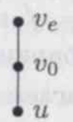

Рис. 2.

Предположим, что для автоматов $\mathfrak{A}^0,\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^k$, $k \geqslant 0$, существует конечный возвращающий лабиринт $L^u_{v_o,v_e} = (V,\Gamma)$ и докажем, что существует возвращающий лабиринт для $\mathfrak{A}^0,\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^{k+1}$. Пусть

$L_1 = (V_1,\Gamma_1)$ – плоский прямоугольный лабиринт, являющийся деревом, $\overline{L}\cap\overline{L}_1 = \{v_e\}$ и $v_e \in V_1$. Рассмотрим лабиринт $L_2 = L\cup L_1$ с множеством вершин $V\cup V_1$ и множеством дуг $\Gamma\cup\Gamma_1$. Заметим, что, если в качестве конечной вершины лабиринта L_2 взять любую вершину v' из V_1, то $(L_2)^u_{v_o,v'}$ будет возвращающим для автоматов $\mathfrak{A}^0,\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^k$. Действительно, попасть в вершину v' из v_0 можно только пройдя через v_e, поэтому в поведении этих автоматов вершина v' встретится позже, чем v_0 или u. Лабиринт L конечен, значит, можно указать прямоугольник $R = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, содержащий этот лабиринт ($\overline{L} \subset R$). Из правильности лабиринта L следует, что прямоугольник R и лабиринт L_1 можно выбрать таким образом, что $\overline{L}\cup\overline{L}_1 \subset R$, и на верхней стороне прямоугольника лежит одна вершина из множества V_1. Взяв эту вершину в качестве конечной, мы получим возвращающий лабиринт для $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}^1,\ldots$, $\mathfrak{A}^k$, лежащий внутри прямоугольника R с конечной вершиной на верхней границе R. Поэтому можно считать, что $L^u_{v_o,v_e}$ изначально обладает этим свойством, то есть L лежит внутри некоторого прямоугольника R, а вершина v_e расположена на верхней границе R. Добавим к лабиринту L три вершины x, y и z ($x,y,z \notin V$) и три ребра так, как показано на рис. 3 и полученный лабиринт обозначим через H.

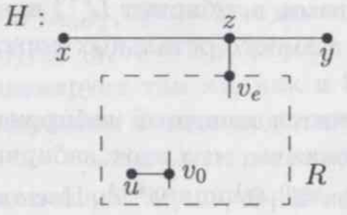

Рис. 3.

Пусть q^{k+1} – начальное состояние автомата $\mathfrak{A}^{k+1}$. Поместим автомат $\mathfrak{A}^{k+1}$ в состоянии q^{k+1} в вершину v_0. Если $\mathfrak{A}^{k+1}$, перемещаясь по лабиринту H, не попадет в вершину x или y, либо окажется в одной из вершин v_0 или u раньше, чем в x или y, то $H^u_{v_0,x}$ является возвращающим для автоматов $\mathfrak{A}^0,\mathfrak{A}^1,\ldots,\mathfrak{A}^{k+1}$ и, значит, $H^u_{v_0,x}$ –

искомый лабиринт. В противном случае, обозначим через w ту из вершин x или y, в которую $\mathfrak{A}^{k+1}$ попадет раньше, а через $\overline{q}$ – состояние, в которое он перейдет, попав в вершину w. Обозначим через H_1 лабиринт, получающийся из H удалением вершины u и ребра $\langle u, v_0\rangle$. Очевидно, что H_1 – горизонтальный лабиринт.

Рассмотрим автомат $\mathfrak{A}^{k+1}_{\overline{q}}(H_1)$ с начальным состоянием $\overline{q}$. В [2] доказано, что для любого автомата без печати существует конечная правильная ловушка, более того в начальную вершину ловушки, которая строится в этом доказательстве, входит ровно четыре ребра. Пусть $L^{k+1}_{\alpha,\beta}$ – конечная правильная ловушка для автомата $\mathfrak{A}^{k+1}_{\overline{q}}(H_1)$ с начальной вершиной α и конечной вершиной β, $\deg(\alpha) = 4$. Если $w = x$, то через δ обозначим вершину лабиринта $L^{k+1}_{\alpha,\beta}$, в которую из α ведет дуга с отметкой **e**, а, если $w = y$, то через δ обозначим вершину, в которую из α ведет дуга с отметкой **w**.

Рассмотрим лабиринт $\Delta(L^{k+1}_{\alpha,\beta}, H_1)$. Конечной вершиной этого лабиринта будем считать вершину β, а в качестве начальной возьмем вершину, соответствующую вершине v_0 той «копии» лабиринта H_1, что была вставлена вместо ребра $\langle\alpha, \delta\rangle$. Эту вершину мы опять обозначим через v_0. Теперь добавим вершину u и ребро $\langle u, v_0\rangle$ в эту «копию» лабиринта H_1 так, чтобы эта «копия» стала изоморфной лабиринту H (иными словами, в лабиринт $L^{k+1}_{\alpha,\beta}$ вместо ребра $\langle\alpha, \delta\rangle$ был вставлен лабиринт H, а вместо остальных горизонтальных ребер – лабиринт H_1).

В результате получится конечный лабиринт, который мы обозначим через $L^u_{v_o,\beta}$. Покажем, что этот лабиринт является возвращающим для автоматов $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1, \ldots, \mathfrak{A}^{k+1}$. Поскольку лабиринт $L^{k+1}_{\alpha,\beta}$ является правильным, то и $L^u_{v_o,\beta}$ будет правильным. Из того, что лабиринт $L^u_{v_o,\beta}$ содержит в себе лабиринт H, а тот, в свою очередь, содержит в себе лабиринт $L^u_{v_o,v_e}$, очевидно, что $L^u_{v_o,\beta}$ является возвращающим для автоматов $\mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}^1, \ldots, \mathfrak{A}^k$. Ребро $\langle\alpha, \delta\rangle$ было выбрано так, чтобы вершина w лабиринта H, вставленного вместо этого ребра, совпала с вершиной α. Поэтому, автомат $\mathfrak{A}^{k+1}$, если его поместить в начальном состоянии q^{k+1} в вершину v_0 лабиринта $L^u_{v_o,\beta}$, через некоторое время окажется в вершине α в состоянии $\overline{q}$.

Поскольку лабиринты $\Delta(L^{k+1}_{\alpha,\beta}, H_1)$ и $L^u_{v_o,\beta}$ отличаются только наличием в $L^u_{v_o,\beta}$ дополнительного ребра $\langle u, v_0\rangle$, то в дальнейшем поведение автомата $\mathfrak{A}^{k+1}$ в лабиринте $L^u_{v_o,\beta}$ будет таким же, как и в лабиринте $\Delta(L^{k+1}_{\alpha,\beta}, H_1)$, до тех пор, пока $\mathfrak{A}^{k+1}$ не попадет в вершину v_0. Лабиринт $L^{k+1}_{\alpha,\beta}$ является ловушкой для $\mathfrak{A}^{k+1}_{\overline{q}}(H_1)$. Поэтому, автомат $\mathfrak{A}^{k+1}$, если его поместить в состоянии $\overline{q}$ в вершину α лабиринта $\Delta(L^{k+1}_{\alpha,\beta}, H_1)$, никогда не попадет в вершину β. Следовательно, попасть в вершину β лабиринта $L^u_{v_o,\beta}$ автомат $\mathfrak{A}^{k+1}$ сможет, только если вернется в вершину v_0, то есть $L^u_{v_o,\beta}$ является возвращающим для $\mathfrak{A}^{k+1}$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть существует автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ с k-следом, который выходит из любого бесконечного плоского прямоугольного лабиринта. Пусть $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Зададим для каждого $\omega \in \overline{1,k}$ автомат $\mathfrak{A}^\omega = (A^\omega, Q^\omega, B^\omega, \varphi^\omega, \psi^\omega)$ без печати следующим образом. Полагаем $A^\omega = \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$, $B^\omega = \mathbf{D} \cup \{\lambda\}$, $Q^\omega = Q$ и для любых $q \in Q$, $a \in \mathbf{P}_0(\mathbf{D})$, $\varphi^\omega(q, a) = \varphi(q, (\omega, a))$, $\psi^\omega(q, a) = \text{Пр}_2(\psi(q, (\omega, a)))$. Легко видеть, что автомат $\mathfrak{A}^\omega$ функционирует так же, как и $\mathfrak{A}_{q_0}$, если на вход $\mathfrak{A}_{q_0}$ в качестве отметки вершины всегда подается ω. Через $\mathfrak{A}^\omega_i$, $i \in \overline{0,n}$, обозначим автомат $\mathfrak{A}^\omega$ с начальным состоянием q_i.

По лемме, для набора инициальных автоматов без печати $\{\mathfrak{A}^\omega_i \mid \omega \in \overline{1,k}, i \in \overline{0,n}\}$ существует конечный возвращающий лабиринт $L^u_{v_0,v_e} = (V, \Gamma)$. Пусть $L_1 = (V_1, \Gamma_1)$ и $L_2 = (V_2, \Gamma_2)$ – бесконечные плоские прямоугольные лабиринты такие, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cap V = \{u\}$, $V_2 \cap V = \{v_e\}$, для любой вершины $v \in (V_1 \setminus \{u\}) \cup (V_2 \setminus \{v_e\})$ выполнено $\deg(v) = 2$, $\deg_{L_1}(u) = 1$ и $\deg_{L_2}(v_e) = 1$. Таким образом, лабиринты L_1 и L_2 представляют из себя бесконечные цепочки ребер, начинающиеся с вершин u и v_e соответственно. Обозначим через G_{v_0} лабиринт с множеством вершин $V_1 \cup V \cup V_2$, множеством дуг $\Gamma_1 \cup \Gamma \cup \Gamma_2$ и начальной вершиной v_0 (G получается «соединением» лабиринта $L^u_{v_0,v_e}$ с лабиринтами L_1 и L_2 в вершинах u и v_e). Так как лабиринт $L^u_{v_0,v_e}$ правильный, и в вершину u в этом лабиринте входит только одно ребро, то лабиринты L_1 и L_2 можно выбрать таким образом, что лабиринт G – вложим. Поэтому, можно считать, что G плоский.

По предположению, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ должен выходить из G_{v_0} при любом выборе конечной вершины. Значит, траектория $\mathfrak{A}_{q_0}$ в G_{v_0} содержит все вершины лабиринта G. Поместим $\mathfrak{A}_{q_0}$ в состоянии q_0 в вершину v_0 лабиринта G_{v_0}. Множество вершин V конечно, а отметки, оставляемые $\mathfrak{A}_{q_0}$ в вершинах, не убывают. Поэтому, наступит момент времени T, начиная с которого отметки вершин из V перестанут меняться. Так как лабиринты L_1 и L_2 бесконечны, то на момент времени T еще останутся вершины как из V_1, так и из V_2, в которых автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ еще не побывал. Последнее утверждение верно для любого конечного момента времени и, значит, учитывая, что из L_1 в L_2 и обратно можно попасть только пройдя через v_0, вершина v_0 встречается в траектории автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ бесконечное число раз. Начиная с момента времени T отметка вершины $v_0 \in V$ меняться не будет. Поэтому, с этого момента времени отметка, оставляемая $\mathfrak{A}_{q_0}$ в вершинах, не меняется и совпадает с отметкой вершины v_0. Обозначим эту отметку через ω. Пусть $T_1 \geqslant T$ – очередной момент времени, в который автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ оказался в вершине v_0. Убедимся, что начиная с этого момента времени, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ больше не попадет в вершину v_e. Предположим, что это не так. Пусть $T_2 \geqslant T_1$ – последний момент времени, в который автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ пришел в v_0 перед тем, как попасть в вершину v_e, и пусть q_i – то состояние, в котором он находился в этот момент. Заметим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте $L^u_{v_0,v_e}$, за исключением вершин u и v_e, будет вести себя также, как и $\mathfrak{A}^{\omega}_i$. Действительно, отметки вершин лабиринта $L^u_{v_0,v_e}$ больше не меняются и, значит, отметки вершин, в которые попадает $\mathfrak{A}_{q_0}$, равны ω. Лабиринт $L^u_{v_0,v_e}$ является возвращающим для автомата $\mathfrak{A}^{\omega}_i$. Следовательно, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$, прежде чем попадет в v_e, вернется в одну из вершин v_0 или u. Но это противоречит выбору момента T_2, что означает неверность последнего предположения. Итак, начиная с момента времени T_1, автомат $\mathfrak{A}_{q_0}$ больше не попадет в вершину v_e, а, значит, не попадет и в те вершины из V_2, в которых он не успел побывать до этого момента. Взяв одну из таких вершин в качестве конечной вершины v' для лабиринта G_{v_0}, приходим к заключению, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ не выходит из лабиринта $G_{v_0,v'}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Список литературы

[1] Budach L. Automata and labyrinths // Math. Nachrichten. 86. 1978. P. 195–282.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 135–146.

[4] Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 72–79.

[5] Зыричев А.Н. О синтезе автомата, обходящего плоские лабиринты с ограниченными дырами // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 1. С. 105–113.

[6] Золотых А.А. Обход лабиринтов с ограниченными в фиксированных направлениях дырами // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 1. С. 59–69.

[7] Голованов А.В. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 193–212.

[8] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 1992. Т. 4. Вып. 3. С. 3–28.