Эксперименты в метрических пространствах автоматов

И.И. Максименко

В работе введен и обоснован подход к исследованию контрольных и распознающих экспериментов на основе их представления сходящимися последовательностями окрестностей в метрических пространствах автоматов. Для произвольных автомата-эталона, класса автоматов и метрики найдены точные критерии существования и получены нормальные формы контрольных и распознающих экспериментов.

Введение

Одной из центральных задач теории конечных автоматов является задача распознавания тех или иных свойств исследуемого автомата в процессе эксперимента с ним. Экспериментом с автоматом называется процесс подачи на автомат входных воздействий, наблюдения соответствующих реакций и вывода заключений о свойствах автомата, основанных на этих наблюдениях и априорной информации об автомате [1].

В настоящей работе рассматриваются инициальные конечные автоматы Мили и два вида эксперимента: контрольный – определяющий, равен ли исследуемый автомат некоторому автомату-эталону или является другим автоматом из заданного класса $\mathcal{F}$, и распознающий – определяющий, каким именно автоматом из $\mathcal{F}$ является исследуемый. Известно [1, 2, 3], что условия существования и свойства экспериментов кардинально зависят от априорной информации об исследуемом автомате. Если заданный класс $\mathcal{F}$ конечен и экспериментатору известна верхняя оценка числа состояний автоматов из $\mathcal{F}$, то существуют хорошо известные [1, 2] алгоритмы проведения контрольного и распознающего эксперимента. В случае, когда $\mathcal{F}$ совпадает с классом $\mathcal{A}(U)$ всех автоматов в некотором вход-выходном алфавите U, то таких алгоритмов не существует [1].

Теория контрольных и распознающих экспериментов для конечных классов $\mathcal{F}$ развита достаточно хорошо [1, 2, 3], для бесконечных – находится в зачаточном состоянии. Эта ситуация, на наш взгляд, определяется тем, что развитие теории экспериментов сильно взаимосвязано с развитием целого ряда математических и технических дисциплин (технической диагностики, теории сетей ЭВМ и их протоколов, теории дискретных динамических систем, теории формальных языков и грамматик, теоретического программирования), а в них до последнего времени почти не возникала потребность изучения содержательных бесконечных классов автоматов. В настоящее время ситуация начинает меняться. Так для описания спецификаций различного вида алгоритмов, в частности, протоколов, используются недетерминированные автоматы, которые задают возможно бесконечный класс так называемых реализаций – детерминированных автоматов, поведение которых включается в поведение недетерминированного автомата – спецификации. Можно привести ряд других примеров содержательных финитно-определенных возможно бесконечных классов автоматов [3, 4].

Основной трудностью исследований бесконечных классов является этап вывода заключений, о котором почти ничего не известно [3]. Поэтому, в данной работе основное внимание уделяется именно этому этапу. Полученные в эксперименте вход-выходные слова, порожденные исследуемым автоматом, определяют некоторый класс автоматов. Ниже будет показано, что этот класс является окрестностью исследуемого автомата при некоторой естественно выбранной «бэровской» метрике. При этом процессы контроля и распознавания автоматов рассматриваются как процессы анализа окрестностей в соответствующих метриках безотносительно к способу получения

вход-выходных слов и поэтому называются обобщенными экспериментами.

Такой подход представляется плодотворным и позволяет получить ряд точных условий существования этих экспериментов, а также исследовать их построение. Представляется возможным использовать данный подход не только для конечных автоматов, но и для систем произвольной структуры, что косвенно подтверждается работой [5], в которой исследования контроля и диагностики непрерывных динамических систем проводятся топологическими методами.

Работа состоит из введения и трех разделов. Архитектура ее следующая: в первом разделе вводятся основные понятия и определения. Во втором – получен критерий существования контрольного эксперимента и его вариантов. В третьем разделе найден критерий существования обобщенного распознающего эксперимента, из которого при выборе бэровской метрики вытекает результат из [4].

1. Основные понятия и определения

Пусть $\mathbf{A} = (A, U, \delta, \lambda, a_0)$ – конечный инициальный детерминированный всюду определенный автомат Мили [2], где A – конечное множество состояний, $U = X \times Y$ – внешний алфавит, причем X, Y – входной и выходной алфавиты, $\delta : A \times X \to A, \lambda : A \times X \to Y$ – функции переходов и выходов, a_0 – начальное состояние. Через $\delta(a,p)$ обозначим состояние, в которое автомат переходит из состояния a под действием слова $p = x_1 \ldots x_k$, а через $\lambda(a,p) = q$ – соответствующее выходное слово $y_1 \ldots y_k$. Пару (p,q) назовем вход-выходным словом и отождествим со словом $w = (x_1, y_1) \ldots (x_k, y_k)$ в алфавите U. Запись $aw = b$ означает, что $\delta(a,p) = b$ и $\lambda(a,p) = q$.

С каждым состоянием a автомата $\mathbf{A}$ ассоциируется множество L_a всех вход-выходных слов, порождаемых этим состоянием. Поведением автомата $\mathbf{A}$ назовем множество $L_{\mathbf{A}} = L_{a_0}$. Через L_a^k обозначим множество всех вход-выходных слов длины, не превосходящей k, порождаемых состоянием a. Будем считать автоматы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентными и обозначать $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, если $L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{B}}$. Обозначим через

$\mathcal{A}(U)$ класс всех инициальных, приведенных, инициально связных детерминированных автоматов Мили [2] (в дальнейшем автоматов или ДА) в алфавите U.

Зафиксируем некоторую взаимно-однозначную эффективную нумерацию автоматов [1]. Далее под $\mathbf{A}$ будем понимать, в зависимости от контекста, автомат $\mathbf{A}$ или его номер в данной нумерации.

Пусть $\langle \mathcal{A}(U), \rho \rangle$ есть произвольное метрическое пространство автоматов, а $O_\varepsilon(\mathbf{A})$ – открытый шар (в дальнейшем, окрестность) с центром $\mathbf{A}$ и радиусом ε [6]. Обозначим через $\lim \mathcal{F}$ класс предельных автоматов класса $\mathcal{F}$, а через $\overline{\mathcal{F}}$ – его теоретико-множественное дополнение. Классы $]\mathcal{F}[$ и $[\mathcal{F}]$ суть открывание и замыкание класса $\mathcal{F}$ соответственно. Обычным образом введем расстояние от автомата $\mathbf{A}$ до класса $\mathcal{F}$: $\rho(\mathbf{A}, \mathcal{F}) = \inf\{\rho(A, B) \mid B \in \mathcal{F}\}$.

Уточним также понятие вычислимости. Пусть даны произвольные множества S, Q. Частичную функцию $\varphi : S \to Q$ назовем частично-вычислимой, если существует алгоритм вычисления $\varphi(x)$ для всех x, для которых значение $\varphi(x)$ определено, и вычислимой, если она всюду определена.

Метрику ρ назовем вычислимой, если для произвольных автоматов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ существует алгоритм вычисления $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Метрику в классе автоматов можно вводить различными способами [7], но особенно отметим вычислимую бэровскую метрику β, для которой положим $\beta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, если $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и $\beta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1/n$, если $L^n_{\mathbf{A}} \neq L^n_{\mathbf{B}}$ и $L^{n-1}_{\mathbf{A}} = L^{n-1}_{\mathbf{B}}$.

Неопределяемые здесь понятия могут быть найдены в [1, 2, 6].

Из определения метрики β следует, что для нее существует биекция окрестностей вида $O_{1/n}(\mathbf{A})$ на поведение $L^n_{\mathbf{A}}$. Следующее предложение, приводимое без доказательства, дает характеризацию этих окрестностей.

Предложение 1. *Любая окрестность является одновременно открытой и замкнутой. Две произвольные окрестности или не пересекаются или одна включается в другую.*

Аналогичный результат имеет место для бэровских пространств [6], что и дало нам основание метрику β назвать «бэровской» и пространство $\langle \mathcal{A}(U), \beta \rangle$ – бэровским пространством автоматов.

2. Обобщенные контрольные эксперименты

Пусть даны автомат $\mathbf{A}$ и класс $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(U)$. В [3] контрольным экспериментом с автоматом относительно автомата-эталона $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$ «неисправных» автоматов называется такое конечное множество W вход-выходных слов, что $W \subseteq L_{\mathbf{A}}$ и если $W \subseteq L_{\mathbf{B}}$, где $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$, то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Для бэровской метрики β и такого определения контрольных экспериментов справедлив следующий критерий существования контрольных экспериментов относительно $\mathbf{A}$ и $\mathcal{F}$:

Предложение 2. *Равносильны утверждения:*
1) существует контрольный эксперимент относительно $\mathbf{A}$ и $\mathcal{F}$;
2) множество $L^k_{\mathbf{A}}$ является контрольным экспериментом относительно $\mathbf{A}$ и $\mathcal{F}$ для некоторого k;
3) класс $O_{1/k}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\}$ для некоторого k;
4) класс $O_{1/k}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F}$ конечен для некоторого k;
5) $\mathbf{A} \notin \lim \mathcal{F}$.

Доказательство. Действительно, если W – контрольный эксперимент для $\mathbf{A}$ и $\mathcal{F}$, то таковым является и $L^k_{\mathbf{A}}$, содержащий W. Если $L^k_{\mathbf{A}}$ – контрольный эксперимент, то класс $O_{1/k}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F}$ пуст или состоит из $\mathbf{A}$. Утверждение 3 очевидно влечет 4. Пусть теперь класс $O_{1/k}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F}$ конечен. Любая пара автоматов из этого класса различается по реакции на некоторое входное слово длины $2t$, где t – верхняя оценка числа состояний автоматов из этого класса. Поэтому $L^{k+2t}_{\mathbf{A}}$ является контрольным экспериментом. Из утверждения 4 следует 5 по определению предельного автомата. Также из утверждения 5 с очевидностью следует 3. Предложение 2 доказано.

Этот результат показывает, что в бэровской метрике β процесс вывода заключений в эксперименте сводится к проверке условия 3.

Принимая аналогичное условие за определение контрольного эксперимента исследуем условия существования такого эксперимента в произвольных метриках. В дальнейшем абстрагируемся от процесса подачи входных слов на черный ящик и наблюдения выходных реакций и будем интересоваться только этапом вывода заключений.

Заметим также, что в бэровской метрике β множество вход-выходных слов $L^n_{\mathbf{A}}$ определяет окрестность $O_{1/n}(\mathbf{A})$, то есть процесс вывода заключений сводится к изучению этой окрестности.

Поэтому в метрическом пространстве $\langle \mathcal{A}(U), \rho\rangle$ автоматов окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{A})$ назовем обобщенным контрольным экспериментом относительно автомата-эталона $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$, если выполнено $O_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\}$. Далее обобщенный контрольный эксперимент в метрике β будем называть контрольным экспериментом.

Зафиксируем произвольную метрику ρ. Следующая приводимая без доказательства теорема является топологическим критерием существования обобщенного контрольного эксперимента:

Теорема 1. *Равносильны утверждения:*

1) Существует обобщенный контрольный эксперимент относительно автомата-эталона $\mathbf{A}$ *и класса* $\mathcal{F}$.

2) Автомат $\mathbf{A}$ *не является предельным автоматом класса* $\mathcal{F}$ *в метрике* ρ.

Данный результат подтверждает правомерность топологического подхода к экспериментам и является первым результатом в этом направлении.

Следствие 1. *Обобщенный контрольный эксперимент относительно автомата* $\mathbf{A} \in]\mathcal{F}[$ *и класса* $\mathcal{F}$ *всегда существует.*

Из этого утверждения вытекает существование обобщенного контрольного эксперимента относительно произвольного автомата $\mathbf{A}$ и конечного класса $\mathcal{F}$, так как в этом случае $\mathcal{F} \cup \{\mathbf{A}\} =]\mathcal{F} \cup \{\mathbf{A}\}[$ в произвольной метрике.

Введем теперь понятие «обобщенный черный ящик». Как известно [1], черный ящик в пошаговом эксперименте играет роль источника неубывающей последовательности множеств вход-выходных слов, то есть источника последовательности окрестностей с вычислимыми центром и радиусом в бэровской метрике β.

Поэтому обобщенный черный ящик естественно определить как последовательность окрестностей:

$$O_{\psi(1)}(\varphi(1)) \supseteq \ldots \supseteq O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \supseteq \ldots, \qquad (1)$$

где $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{A}(U)$ и $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ – вычислимые функции, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^+$ – соответственно множества натуральных и неотрицательных действительных чисел, и выполнены условия:

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\psi(n) \leqslant \varepsilon$;

2) существует автомат $\mathbf{B}$, принадлежащий пересечению всех окрестностей из (1).

Будем говорить, что автомат $\mathbf{B}$ ассоциирован с обобщенным черным ящиком (1).

Отметим, что в классе $\mathcal{A}(U)$ пересечение бесконечной невозрастающей последовательности классов может не содержать конечный автомат, а содержать только автомат с бесконечным числом состояний, чем и обусловлена необходимость введения условия 2 в определение обобщенного черного ящика. Единственность такого автомата $\mathbf{B}$ вытекает из теоремы о вложенных шарах [6].

Нас будут интересовать не только условия существования обобщенных контрольных экспериментов, но и алгоритмы вычисления их параметров. В соответствие с этим введем понятия «эффективная отделимость» и «эффективный контрольный эксперимент».

Будем говорить, что автомат $\mathbf{A}$ эффективно отделим от класса $\mathcal{F}$, если существует частично-вычислимый предикат $P_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon) = (\varepsilon < \rho(\mathbf{A}, \mathcal{F} - \{\mathbf{A}\}))$, принимающий значение «истина» на некотором $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Классы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ назовем эффективно отделимыми, если произвольный автомат одного из классов эффективно отделим от другого класса.

Эффективным контрольным экспериментом относительно автомата-эталона $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$ назовем пару $\langle (O_\varepsilon(\mathbf{A}), Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}} \rangle$, где $Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon) = (O_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\})$ – частично-вычислимый предикат, принимающий на данном ε значение «истина».

Выше уже упоминалось о существовании различных подходов к определению контрольного эксперимента в теории автоматов. Общим, на наш взгляд, в этих подходах является построение некоторой «окрестности» исследуемого автомата, различия же заключаются в способах и сложности ее построения. Для произвольных метрик будет показано, что эффективный контрольный эксперимент можно рассматривать как пошаговый алгоритм контроля.

Далее по аналогии с хорошо известным итеративным алгоритмом Барздиня [1] введем итеративный алгоритм контроля для произвольных метрических пространств $\langle \mathcal{A}(U), \rho \rangle$.

Итеративным алгоритмом контроля относительно автомата $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$ назовем пошаговый алгоритм, который исследует произвольный обобщенный черный ящик, ассоциированный с некоторым $\mathbf{B} \in \mathcal{F} \cup \{\mathbf{A}\}$, и на i-ом шаге, $i \geqslant 1$, на основании $\mathbf{A}$ и окрестности $O_{\psi(n)}(\varphi(n))$, причем $n = 1$ для $i = 1$, делает заключение:
а) алгоритм останавливается и выдает информацию:
1) $\langle \mathbf{B} = \mathbf{A}, \psi(n) \rangle$, если $\mathbf{A} \in O_{\psi(n)}(\varphi(n))$;
2) $\langle \mathbf{B} \neq \mathbf{A}, \psi(n) \rangle$, если $\mathbf{A} \notin O_{\psi(n)}(\varphi(n))$;
б) алгоритм выбирает следующий номер n окрестности (1) и переходит к следующему шагу.

При этом для любого обобщенного черного ящика, ассоциированного с автоматом из $\mathcal{F}$, алгоритм останавливается через конечное число шагов.

Следующая теорема показывает равносильность различных подходов к определению обобщенного контрольного эксперимента и его связь с топологическим свойством эффективной отделимости.

Теорема 2. *Для произвольной вычислимой метрики ρ равносильны утверждения:*
1) Автомат $\mathbf{A}$ эффективно отделим от класса $\mathcal{F}$;
2) Существует эффективный контрольный эксперимент для автомата-эталона $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$;
3) Существует итеративный алгоритм контроля автомата $\mathbf{A}$ относительно $\mathcal{F} \cup \{\mathbf{A}\}$.

Доказательство. Покажем, что утверждение 2 теоремы влечет 1. Пусть $\langle (O_\varepsilon(\mathbf{A}), Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}} \rangle$ – обобщенный контрольный эксперимент. Нетрудно видеть, что предикат $P_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon) = (\varepsilon < \rho(\mathbf{A}, \mathcal{F} - \{\mathbf{A}\}))$ принимает значение «истина» точно тогда, когда это значение принимает $Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon)$. Поэтому существует такое ε, что $P_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon)$ принимает значение «истина». Таким образом показано, что автомат $\mathbf{A}$ эффективно отделим от класса $\mathcal{F}$.

Обратно: пусть автомат $\mathbf{A}$ эффективно отделим от класса $\mathcal{F}$, то есть некоторый частично-вычислимый предикат $P_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon) = (\varepsilon < \rho(\mathbf{A}, \mathcal{F} - \{\mathbf{A}\}))$ принимает значение «истина» на некотором $\tau \in \mathbb{R}^+$. Но в этом случае выполнено $O_\tau(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\}$. Полагаем, что $Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}}(\varepsilon)$ принимает значение «истина» для всех $\varepsilon < \tau$. Пара $\langle (O_\tau(\mathbf{A}), Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}} \rangle$ является искомым эффективным контрольным экспериментом. Таким образом, утверждения 1 и 2 равносильны.

Покажем, что утверждение 3 влечет 2. Пусть дан некоторый обобщенный черный ящик, ассоциированный с автоматом-эталоном $\mathbf{A}$. Результатом работы итеративного алгоритма контроля является такое натуральное n, что $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\}$.

Обозначим через $\tau = (\psi(n) - \rho(\mathbf{A}, \varphi(n)))/2$. Пусть также $O_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}\}$ – частично-вычислимый предикат, принимающий значение «истина» для всех $\varepsilon \leqslant \tau$, а для остальных ε его значение не определено. Пара $\langle (O_\tau(\mathbf{A}), Q_{\mathbf{A},\mathcal{F}} \rangle$ является искомым эффективным контрольным экспериментом относительно автомата $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$.

Покажем теперь, что из утверждения 2 следует 3. Пусть для всякого автомата $\mathbf{A}_n \in \mathcal{F}$ дан некоторый эффективный контрольный эксперимент $\langle (O_{\varepsilon_n}(\mathbf{A}_n), Q_{n,\mathbf{A}_n,\mathcal{F}} \rangle$ и произвольный обобщенный черный ящик (1).

Возможен один из вариантов:
1) для некоторого натурального r выполнено $\mathbf{A}_n \notin O_{\psi(r)}(\varphi(r))$;
2) существует такое натуральное m, что $\mathbf{A}_n \in O_{\psi(m)}(\varphi(m))$ и $\psi(m) \leqslant \varepsilon_n/2$.

Так как метрика ρ вычислима, то существует алгоритм проверки выполнения вариантов 1 и 2.

Для варианта 1 обобщенный черный ящик ассоциируется с некоторым $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$, что $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}_n$. Покажем, что для варианта 2 выполнено включение: $O_{\psi(m)}(\varphi(m)) \subseteq O_{\varepsilon_n}(\mathbf{A}_n)$. Для любого автомата $C \in O_{\psi(m)}(\varphi(m))$ из аксиомы треугольника следует: $\rho(\mathbf{A}_n, C) \leqslant \rho(\mathbf{A}_n, \varphi(m)) + \rho(\varphi(m), C) < 2\psi(m) \leqslant \varepsilon_n$, то есть доказано, что $O_{\psi(m)}(\varphi(m)) \subseteq O_{\varepsilon_n}(\mathbf{A}_n)$.

С учетом включения $O_{\varepsilon_n}(\mathbf{A}_n) \cap \mathcal{F} \subseteq \{A_n\}$ следует сделать вывод, что обобщенный черный ящик (1) ассоциирован с автоматом $\mathbf{A}_n$.

Итеративный алгоритм контроля представим в виде:

Шаг 1. Пусть $m = 1$.
Шаг 2. Проверяем выполнение вариантов 1 и 2. Если выполнен вариант 1, то переходим к шагу 4, если вариант 2 – к шагу 5.
Шаг 3. Пусть $m = m + 1$ и переход к шагу 2.
Шаг 4. Результат работы алгоритма: $\langle \mathbf{B} \neq \mathbf{A}_n, \psi(m) \rangle$. Останов.
Шаг 5. Результат работы алгоритма: $\langle \mathbf{B} = \mathbf{A}_n, \psi(m) \rangle$. Останов.

Теорема 2 доказана.

Из вышеприведенной теоремы видно, что итеративные алгоритмы контроля имеют те же контрольные возможности, что и эффективные контрольные эксперименты. Следовательно, итеративные алгоритмы контроля могут использоваться в качестве стандартной формы алгоритма проведения контрольного эксперимента. Пункт 1 этой теоремы является топологическим эквивалентом условия существования алгоритма контроля.

3. Обобщенные распознающие эксперименты

По аналогии с понятиями обобщенного черного ящика и обобщенного контрольного эксперимента введем понятие обобщенного распознающего эксперимента.

Предварительно определим понятие распознающего эксперимента в бэровской метрике β. Через $\mathcal{F}(I)$ обозначим класс автоматов, удовлетворяющих совокупности I эффективно проверяемых свойств, называемых априорной информацией. Априорную информацию I назовем достоверной для $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(I)$ и точной при $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I)$.

По аналогии с [1] алгоритмом распознавания автоматов из $\mathcal{F}$ при априорной достоверной для $\mathcal{F}$ информации I назовем алгоритм, который для произвольного черного ящика из $\mathcal{F}$ выполняет по шагам следующие действия: на каждом i-м шаге, $i \geqslant 1$, черный ящик опрашивается конечным множеством P_i входных слов, регистрируется множество соответствующих реакций и на основании априорной информации и полученных вход-выходных слов, порождаемых черным ящиком на всех шагах алгоритма, включая i-й , делается заключение: алгоритм завершен и выдается номер черного ящика в выбранной нумерации или алгоритм незавершен и порождается P_{i+1} для опроса на следующем шаге. При этом для каждого черного ящика из класса $\mathcal{F}$ алгоритм завершается через конечное число шагов.

Далее распространим понятие «алгоритм распознавания» на случай произвольной метрики. Обобщенным алгоритмом $T(\mathcal{F})$ распознавания автоматов из класса $\mathcal{F}$ назовем алгоритм, который для произвольного обобщенного черного ящика, ассоциированного с некоторым $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, выполняет следующую пошаговую процедуру: на i-м шаге, $i \geqslant 1$, выбирается некоторая окрестность $O_{\psi(n)}(\varphi(n))$ из (1), причем $n = 1$ для $i = 1$, и делается заключение: алгоритм останавливается и выдается номер автомата $\mathbf{A}$ в выбранной нумерации, если $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \cap \mathcal{F} = \{\mathbf{A}\}$ или алгоритм продолжается и выбирается номер окрестности из (1) для анализа на следующем шаге. Для каждого автомата из $\mathcal{F}$ алгоритм завершается за конечное число шагов. Класс $\mathcal{F}$ назовем финитно-распознаваемым, если для него существует некоторый алгоритм распознавания $T(\mathcal{F})$. Пустой класс считается финитно-распознаваемым.

Зафиксируем произвольную вычислимую метрику ρ. Пусть дан конечный класс $\mathcal{F}$. Для произвольного обобщенного черного ящика (1), ассоциированного с некоторым автоматом $\mathbf{A}_r \in \mathcal{F}$, перебором по всем окрестностям (1) и автоматам из $\mathcal{F}$ найдем такие натуральные

n, r, для которых $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \cap \mathcal{F} = \{\mathbf{A}_r\}$. Таким образом показано, что конечный класс финитно-распознаваем в метрике ρ.

Рассмотрим бесконечный класс $\mathcal{F}$, содержащий хотя бы один автомат $\mathbf{B} \in \lim \mathcal{F}$ в метрике ρ. Так как во всякой окрестности любого обобщенного черного ящика, ассоциированного с $\mathbf{B}$, содержится отличный от $\mathbf{B}$ автомат из $\mathcal{F}$, то класс $\mathcal{F}$ не является финитно-распознаваемым в рассматриваемой метрике.

Из вышесказанного следует, что отбрасывание класса предельных автоматов исследуемого класса $\mathcal{F}$ является необходимым условием его финитной распознаваемости. Интересно найти условия, когда открывание класса является еще и достаточным для финитной распознаваемости.

Используя конструкцию, предложенную в [4], приведем пример открытого, но не финитно-распознаваемого класса.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – частично вычислимая функция с неразрешимой проблемой применимости. Рассмотрение будем проводить в классе автономных автоматов [2] с выходным алфавитом $Y = \{0, 1\}$.

Пусть класс $\mathcal{F}$ автоматов включает следующие автоматы: $\mathbf{A}_n = 0^n1^*$, если f не применима к числу n, и $\mathbf{A}_n = 0^n1^{f(n)}0^*$ – в противном случае.

По определению класса $\mathcal{F}$, если у автоматов $\mathbf{A}_r$ и $\mathbf{A}_s$ начальные отрезки 0^r1 и 0^s1 совпадают, то $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_s$. Пусть теперь некоторый автомат (для определенности, $\mathbf{A}_r = 0^r1^*$) является предельным. Тогда существует отличный от $\mathbf{A}_r$ автомат $\mathbf{A}_p$ с отрезком поведения 0^r1, что противоречит способу определения класса. Таким образом показано, что класс $\mathcal{F}$ открыт.

Предположим, что класс $\mathcal{F}$ финитно-распознаваем. Тогда существует алгоритм распознавания $T(\mathcal{F})$, который за конечное число шагов для каждого $\mathbf{A}_r \in \mathcal{F}$ определяет, применима ли функция f к числу r (в этом случае $\mathbf{A}_r = 0^r1^{f(r)}0^*$ или нет, то есть $\mathbf{A}_r = 0^r1^*$), что противоречит выбору функции f. Полученное противоречие завершает построение открытого, не финитно-распознаваемого класса $\mathcal{F}$.

На данном примере видно, что получение только топологическо-

го критерия финитной распознаваемости в общем случае затруднено, что связано с проблемами алгоритмического характера. Удалось получить результат, который для случая метрики β аналогичен теореме 1.2.9 [4]:

Теорема 3. *Для произвольной вычислимой метрики ρ равносильны утверждения:*

1) Класс $\mathcal{F}$ является финитно-распознаваемым;

2) Класс $\mathcal{F}$ есть подкласс рекурсивно перечислимого финитно-распознаваемого класса;

3) Для любого $\mathbf{A}$ из $\mathcal{F}$ существует эффективный контрольный эксперимент относительно автомата-эталона $\mathbf{A}$ и класса $\mathcal{F}$.

Доказательство. Из утверждения 2 с очевидностью вытекает 1. Покажем, что из утверждения 1 следует 2. Пусть $T(\mathcal{F})$ – некоторый обобщенный алгоритм распознавания. На его основе построим алгоритм T, который для всякого автомата $\mathbf{A}$ производит одно из следующих действий:

1) алгоритм останавливается и выдает номер автомата $\mathbf{A}$, если $T(\mathcal{F})$ останавливается и выдает номер автомата $\mathbf{A}$;

2) алгоритм не останавливается, если $T(\mathcal{F})$ не останавливается или выдает результат, отличный от $\mathbf{A}$.

Алгоритму T соответствует некоторая частично-вычислимая функция φ, область определения которой рекурсивно перечислима и совпадает с классом всех автоматов, расшифровываемых алгоритмом $T(\mathcal{F})$, и, следовательно, включает $\mathcal{F}$. Поэтому утверждение 1 влечет 2, то есть они равносильны.

Докажем, что утверждение 1 влечет 3. Действительно, результатом работы алгоритма $T(\mathcal{F})$ над произвольным черным ящиком (1), ассоциированным с некоторым $\mathbf{A}_r \in \mathcal{F}$, является такое натуральное n, для которого $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}_r\}$.

Обозначим через $\tau = (\psi(n) - \rho(\mathbf{A}_r, \varphi(n)))/2$.

Пусть $Q_{\mathbf{A}_r,\mathcal{F}}(\varepsilon) = (O_\varepsilon(\mathbf{A}_r) \cap \mathcal{F} \subseteq \{\mathbf{A}_r\})$ – частично-вычислимый предикат, принимающий значение «истина» для всех $\varepsilon \leqslant \tau$, а для остальных ε его значение не определено.

Нетрудно видеть, что пара $\langle O_\tau(\mathbf{A}_r), Q_{\mathbf{A}_r,\mathcal{F}}\rangle$ является искомым эффективным контрольным экспериментом относительно автомата $\mathbf{A}_r$ и класса $\mathcal{F}$.

Покажем обратное: из утверждения 3 следует 1. Так как утверждения 1 и 2 равносильны, то полагаем, что класс $\mathcal{F}$ – рекурсивно перечислим. Пусть для всякого $\mathbf{A}_r \in \mathcal{F}$ существует эффективный контрольный эксперимент $\langle O_{\varepsilon_r}(\mathbf{A}_r), Q_{r,\mathbf{A}_r,\mathcal{F}}\rangle$ и некоторый обобщенный черный ящик (1), который ассоциирован с автоматом из класса $\mathcal{F}$.

Предварительно докажем, что существует единственный автомат $\mathbf{A}_p \in \mathcal{F}$, удовлетворяющий для некоторого натурального n условиям:
1) $\mathbf{A}_p \in O_{\psi(n)}(\varphi(n))$;
2) $\psi(n) \leqslant \varepsilon_p/2$, где ε_p – диаметр эффективного контрольного эксперимента относительно $\mathbf{A}_p$ и $\mathcal{F}$.

Существование такого автомата следует из того, что с ним ассоциирован обобщенный черный ящик (1), и в последовательности $\{\psi(k)\}$, $k \geqslant 0$ существует сколь угодно малая величина. Покажем теперь, что $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \subseteq O_{\varepsilon_p}$.

Для любого автомата $\mathbf{C} \in O_{\psi(n)}(\varphi(n))$ из аксиомы треугольника следует, что $\rho(\mathbf{A}_p, \mathbf{C}) \leqslant \rho(\mathbf{A}_p, \varphi(n)) + \rho(\varphi(n), \mathbf{C}) < 2\psi(n) \leqslant \varepsilon_p$, то есть доказано, что $O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \subseteq O_{\varepsilon_p}(\mathbf{A}_p)$.

Предположим, что существует отличный от $\mathbf{A}_p$ автомат $\mathbf{A}_r \in \mathcal{F}$, удовлетворяющий условиям 1 и 2 одновременно. Но тогда $O_{\varepsilon_p}(\mathbf{A}_p)$ не является эффективным контрольным экспериментом относительно $\mathbf{A}_p$ и $\mathcal{F}$ в силу того, что $\mathbf{A}_r \in O_{\psi(n)}(\varphi(n)) \cap O_{\varepsilon_p}(\mathbf{A}_p)$. Полученное противоречие доказывает единственность такого $\mathbf{A}_p \in \mathcal{F}$.

Обобщенный алгоритм распознавания $T(\mathcal{F})$ имеет вид:
Шаг 1. Пусть $p = 1$.
Шаг 2. Пусть $n = 1$.
Шаг 3. Проверка одновременного выполнения условий 1 и 2. Если условия выполнены, то переходим к шагу 6.
Шаг 4. Положить $n = n + 1$ и перейти к шагу 3.
Шаг 5. Положить $p = p + 1$ и перейти к шагу 3.

Шаг 6. Выдать номер искомого автомата $\mathbf{A}_p$. Останов.

Очевидно, что за конечное число шагов будет получен номер искомого автомата, так как для некоторых n, p условия 1 и 2 обязательно выполняются. Теорема 3 доказана.

Полученная теорема позволяет считать рекурсивно перечислимую последовательность эффективных контрольных экспериментов нормальной формой обобщенного алгоритма распознавания.

Из нее также следует критерий существования восстанавливающих алгоритмов-экспериментаторов из [4] для случая бэровской метрики. Кроме того, из рассмотренного выше примера открытого, не финитно-распознаваемого класса $\mathcal{F}$, и вышеприведенной теоремы вытекает существование автомата $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, для которого есть обобщенный контрольный эксперимент относительно $\mathbf{A}$ и $\mathcal{F}$, но нет эффективных контрольных экспериментов.

Следующее предложение описывает топологическую структуру открытого финитно-распознаваемого класса:

Предложение 3. *Пусть дан класс $\mathcal{F}$ в произвольной вычислимой метрике ρ. Открывание класса $\mathcal{F}$ финитно-распознаваемо тогда и только тогда, когда всякий автомат из исследуемого класса эффективно отделим от него.*

Полученные в работе результаты применены к исследованию классов, заданных финитными средствами [8, 9].

Автор выражает глубокую благодарность И.С. Грунскому за постановку задачи и полезные замечания, в результате которых работа приняла настоящий вид.

Список литературы

[1] Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Грунский И.С., Козловский В.А., Пономаренко Г.Г. Представления конечных автоматов фрагментами поведения. Киев: Наукова думка, 1990.

[4] Бородай С.Ю. Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов. Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. Саратов, 1997.

[5] Данеев А.В., Русанов В.А. К аксиоматической теории идентификации динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. №8. С. 126–135.

[6] Кэлли Дж. Общая топология / Пер. с англ. 20-е изд. М.: Наука, 1981.

[7] Строгалов А.С. Об ε-моделировании поведения конечных автоматов. Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ. Саратов, 1985.

[8] Грунский И.С., Максименко И.И. Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний // Кибернетика и системный анализ. 1999. №4. С. 59–71.

[9] Максименко И.И. Эксперименты в классе реализации недетерминированных автоматов // Доклады НАН Украины. 1999. №7. С. 95–99.

О бесконечной ловушке для автоматов со следом

А.З. Насыров

Введение

Проблема обхода плоских лабиринтов конечными автоматами была поставлена К. Шенноном в начале шестидесятых годов. Л. Будахом было доказано [1], что не существует конечного автомата, который обходил бы произвольный шахматный лабиринт. Другие доказательства этого факта приведены в [2, 3].

Поиски положительного решения проблемы обхода лабиринтов автоматами велись в двух направлениях. Первое направление связано с рассмотрением более узких классов лабиринтов [5, 6], а второе – с усилением возможностей автоматов. Одно из допустимых усилений – предоставить автомату возможность оставлять отметки в вершинах лабиринта. В работе [7] рассмотрены автоматы, которые «принудительно» оставляют отметки (след) из множества $\{1, \ldots, M\}$ в посещенных вершинах, причем номер отметки не убывает в процессе работы автомата, и построен автомат этого вида, обходящий произвольный n-связный плоский прямоугольный лабиринт, а количество видов отметок (число M), используемых этим автоматом, линейно зависит от n.

В данной работе доказывается, что для любого автомата такого вида (здесь они названы автоматами с k-следом) существует бесконечная плоская прямоугольная ловушка.