Вероятностный полиномиальный алгоритм, решающий одну из двух NP-полных задач

В.Н. Лебедев

В работе рассматриваются следующие задачи о структурных разбиениях в графах.

Задача 1. *Задан двудольный ориентированный граф $G(A,B;E)$ без тупиков (A,B – доли графа; E – ориентированные ребра графа).*
Вопрос: Существует ли нетривиальное эргодическое разбиение V_1V_2 такое, что
$V_1 \neq \varnothing$, $V_2 \neq \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = V$;
$G(V_1)$, $G(V_2)$ – *не тупиковые;*
$E(V_{1A}, V_2) = \varnothing$; $E(V_{2B}, V_1) = \varnothing$?

Здесь $G(V_1)$ – граф, порожденный множеством вершин V_1; $V_{1A} = V_1 \cap A$, $E(V_{1A}, V_2)$ – ребра с началом в множестве V_{1A} и концом в V_2.

В [5, 6] показана NP-полнота *задачи 1* сведением задачи «монотонная 3-выполнимость» к данной.

Задача 2. *Задан двудольный ориентированный граф $G(A,B;E)$ без тупиков.*
Вопрос: Существует ли нетривиальное 1-регулярное эргодическое разбиение V_1, V_2, то есть эргодическое разбиение V_1, V_2, обладающее свойством: $G(V_1)$, $G(V_2)$ – регулярные графы со степенью исхода, равной 1 (то есть в любой вершине графа $G(V_1)$ или $G(V_2)$ имеется ровно одно ребро, исходящее из этой вершины с концом опять в V_1, и, соответственно, в V_2)?

Доказательство NP-полноты *задачи 2.*

Сведем к данной задаче известную NP-полную задачу «3-выполнимости при одном истинном литерале» ([7, стр. 333]).

Задача 3. *Задано множество переменных U и множество дизъюнкций над U такое, что $|c| = 3$ для каждой дизъюнкции $c \in C$ и каждая дизъюнкция не содержит отрицаний переменных.*
Вопрос: Существует ли такой выполняющий набор, что для каждой дизъюнкции в C имеется в точности одна переменная, равная 1, в выполняющем наборе?

Пусть имеется некоторая индивидуальная *задача 3.* Построим по ней индивидуальную *задачу 2* следующим образом:

Каждой переменной $x \in U$ поставим в соответствие цикл на двух вершинах $x \in B$ и $x' \in A$.

Каждой дизъюнкции $x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee x_{i_3}$ поставим в соответствие белую вершину $d \in A$ и проведем ребра из вершины d в черные вершины циклов соответствующих переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$.

Например, для *задачи 3*: $C: x_1 \vee x_2 \vee x_4;\ x_2 \vee x_3 \vee x_4;\ x_1 \vee x_2 \vee x_3$, соответствующая *задача 2* выглядит так, как показано на рис. 1.

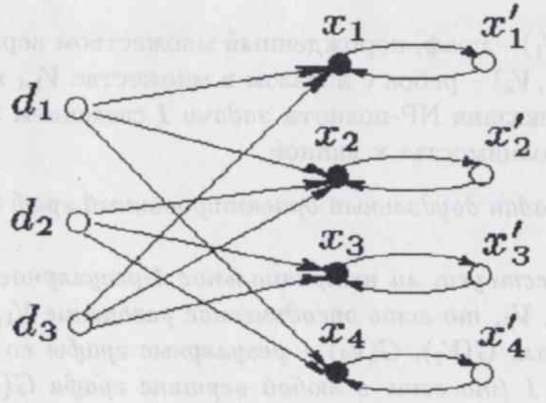

Рис. 1.

Утверждение 1. *Задача 3 имеет требуемый выполняющий набор, тогда и только тогда, когда задача 2 имеет 1-регулярное эргодическое разбиение.*

Доказательство. Пусть задача 3 имеет требуемый выполняющий набор такой, что для каждой тройки переменных дизъюнкций ровно одна переменная равна единице.

Тогда рассмотрим следующее разбиение вершин графа задачи 2: вершины $d \in A$, соответствующие дизъюнкциям, отнесем в множество V_2; в это множество отнесем также пары вершин, которые соответствуют переменным равным единице в выполняющем наборе *задачи 3.* Остальные пары вершин отнесем в множество V_1. Графы $G(V_1)$, $G(V_2)$ – не тупиковые, так как для каждой $d \in V_2$ существует ребро (dx) в вершину x, которой соответствует единица в выполняющем наборе.

$E(V_{1A}, V_2) = \varnothing$, так как единственное ребро из любой вершины V_{1A} ведет в соответствующую V_{1B}. $E(V_{2B}, V_2) = \varnothing$, так как единственное ребро из любой вершины V_{2B} ведет в соответствующую вершину V_{2A}.

Графы $G(V_1)$ и $G(V_2)$ 1-регулярные. Для $G(V_1)$ это следует из того, что $G(V_1)$ – есть объединение пар. Для $G(V_2)$ для любой вершины d имеется ровно одно ребро в некоторую вершину $x \in V_2$ соответствующей тройки, остальные вершины тройки попадут в множество V_1. Для парных вершин $G(V_2)$ условие 1-регулярности выполнено.
Пример. Для представленной задачи выполняющий набор $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда построенное разбиение имеет вид: и это есть требуемое 1-регулярное эргодическое разбиение.

Пусть, наоборот, имеется 1-регулярное эргодическое разбиение в индивидуальной *задаче 2*: V_1, V_2.

Пусть X_2 – вершины $x \in B$, попавшие в множество V_2, а X_1 – вершины $x \in B$, попавшие в множество V_1. Покажем, что набор

$$\begin{cases} x = 1, & \text{если вершина } x \in X_2 \\ x = 0, & \text{если вершина } x \in X_1 \end{cases}$$

требуемый выполняющий набор для *задачи 3.*

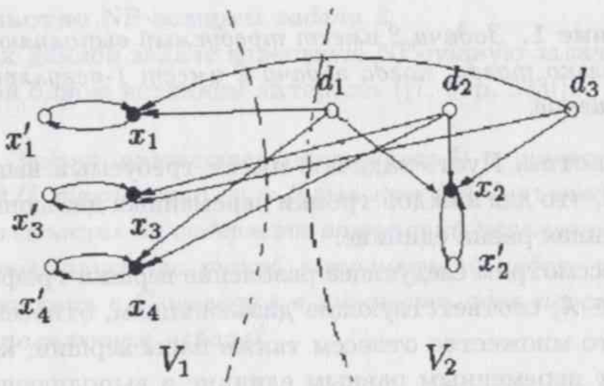

Рис. 2.

Все вершины $d \in A$ принадлежат множеству V_2, так как в противном случае некоторая вершина $d \in V_1$, что означало бы, что все три вершины $x_1, x_2, x_3 \in B$, соответствующие пременным дизъюнкции d, должны лежать в множестве V_1 (чтобы было выполнено $E(V_{1A}, V_2) = \varnothing$), но тогда нарушается условие 1-регулярности графа $G(V_1)$.

Таким образом, все вершины d принадлежат множеству V_2. Поэтому в каждой тройке вершин $x \in B$ имеется ровно одна, принадлежащая множеству V_2 (в противном случае две или три вершины попали в V_2 – противоречие с 1-регулярностью $G(V_2)$, все три вершины попали в V_1 – противоречие с эргодичностью разбиения, то есть граф $G(V_2)$ тупиковый). Поэтому каждая тройка вершин дизъюнкций пересекается с множеством X_2 ровно по одной вершине, то есть представленный набор требуемый в *задаче 3*.

Вероятностный полиномиальный алгоритм для решения задач

Задача 4. *Пусть задан двудольный ориентированный граф $G(A, B; E)$ без тупиков. Вопрос: Существует ли нетривиальное эргодическое разбиение V_1, V_2 или существует ли 1-регулярное эргодическое разбиение V_1, V_2?*

Следующий вероятностный алгоритм либо найдет нетривиальное эргодическое разбиение V_1, V_2, и, тем самым, будет определенно получен ответ на первый вопрос, либо даст отрицательный ответ на второй вопрос, то есть, что 1-регулярного эргодического разбиения в графе нет. Во втором случае вероятность ошибки не будет превосходить $\frac{15}{16}$.

Примечание: повторяя алгоритм несколько раз, за полиномиальное время можно получить или абсолютно верный ответ на первый вопрос или с вероятностью ошибки сколь угодно малой отрицательный ответ на второй вопрос задачи.

Алгоритм: Строим случайное назначение ребрам графа G весов $[1, -1]$ (с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждое ребро получает вес 1 и с вероятностью $\frac{1}{2}$ вес -1). Вес ребра (vw) обозначим $c(v, w)$.

Теперь решаем задачу определения знаков цен циклической игры со средним платежом по циклу [4]. Цену игры в вершине v обозначим $p(v)$. Следующая процедура динамического программирования позволяет определить выполнение одного из условий $p(v) < 0$ или $p(v) \geqslant 0$ сразу для всех вершин v.

Определение условий основано на аппроксимации величин $p(v)$ величинами $p(v, t)$, которые определяются, как цены игры, начинающейся в вершине v, длящейся t шагов, и платеж первого игрока B второму A, определяется, как средний платеж всей траектории из t ребер (так как игра конечная и с полной информацией, то величины $p(v, t)$ заведомо существуют).

Для определения величин $p(v, t)$ имеется процедура динамического программирования:

$$p(v,1) = \max_{u\in V(v)} c(v,u), \qquad v \in A,$$
$$p(v,1) = \min_{u\in V(v)} c(v,u), \qquad v \in B,$$
$$\ldots$$
$$p(v,t) = \max_{u\in V(v)} \Big(c(v,u) + (t-1)\, p(u,t-1)\Big)/t, \quad v \in A,\ t = 2,\ldots$$
$$p(v,t) = \min_{u\in V(v)} \Big(c(v,u) + (t-1)\, p(u,t-1)\Big)/t, \quad v \in B,\ t = 2,\ldots$$

Примечание. $p(v) = \lim_{t\to\infty} p(v,t)$. Справедливо следующее аппроксимационное утверждение (использованы работы [2, 3, 4]).

Утверждение 2. *Для любой вершины v графа со стоимостями $1,-1$ и любого $t = 1,\ldots$ справедливо соотношение:*

$$|p(v,t) - p(v)| \leqslant \frac{2n}{t}.$$

Здесь n – общее число вершин в графе.

Утверждение 3. [4] *Существует пара таких стационарных стратегий S_1 и S_2 первого и второго игроков, что все циклы, достижимые из вершины v в графе $(V; S_1, E(A))$ имеют среднее значение меньшее либо равное p, а все циклы, достижимые из вершины v в графе $(V; E(B), S_2)$ имеют среднее значение большее либо равное p для некоторого рационального p.*

Здесь $(V; S_1, E(A))$ – подграф начального графа с тем же множеством вершин V и множеством ребер S_1 (по одному исходящему из каждой вершины доли B), а $E(A)$ – все ребра, исходящие из доли A.

Нетрудно видеть, что $p = p(v)$, то есть p – цена игры на бесконечности.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим оптимальное поведение второго игрока против стационарного S_1 поведения первого в игре, длящейся t шагов. Тогда, так как поведение второго игрока оптимально, то $p(v,t) \leqslant p(v,t,S_1)$, где $p(v,t,S_1)$ – среднее значение возникшей траектории игры из начальной вершины v при оптимальной игре второго и S_1 поведении первого.

Траекторию игры можно разбить на циклы $c_1 \ldots c_k$, состоящие, соответственно, из $l_1 \ldots l_k$ ребер. Тогда имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} p(v,t,S_1) &= (c(c_1) + \ldots + c(c_k) + c(r))/t = \\ &= (c'(c_1) * l_1 + \ldots + c'(c_k) * l_k)/t + c(r)/t \leqslant \\ &\leqslant p(v) * (l_1 \ldots + l_k)/t + c(r)/t = p(v) * (t-r)/t + c(r)/t \leqslant \\ &\leqslant p(v) + \tfrac{n}{t} + \tfrac{n}{t} = p(v) + \tfrac{2n}{t}. \end{aligned}$$

Здесь $c(T)$ – длина траектории T, $c'(T)$ – средняя длина траектории T.

Первое неравенство справедливо в силу *утверждения 3*, второе неравенство справедливо в силу того, что $p(v) \geqslant -1$ и $r \leqslant n$.

Точно так же, рассматривая оптимальное поведение первого игрока против стационарного поведения S_2 второго игрока, имеем:

$$p(v,t,S_2) \leqslant p(v,t),$$
$$p(v,t,S_2) \geqslant p(v) - \tfrac{2n}{t}.$$

Тогда из отмеченных неравенств следует:

$$p(v) - \frac{2n}{t} \leqslant p(v,t) \leqslant p(v) + \frac{2n}{t}.$$

Утверждение доказано.

Для определения одного из условий $p(v) < 0, p(v) \geqslant 0$ достаточно определить величину $p(v, 4n^2)$.

Действительно, из утверждения следует, что $p(v,4n^2) - \frac{1}{2n} \leqslant p(v) \leqslant p(v,4n^2) + \frac{1}{2n}$.

Если $p(v,4n^2) - \frac{1}{2n} > 0$, то $p(v) > 0$, если $p(v,4n^2) + \frac{1}{2n} < 0$, то $p(v) < 0$, в противном случае $-\frac{1}{n} \leqslant p(v) \leqslant \frac{1}{n}$, и тогда $p(v) = 0$. Так как $p(v)$ значение некоторого среднего цикла (наименьший положительный средний цикл больше, либо равен $\frac{2}{n}$, а наибольший отрицательный средний цикл меньше, либо равен $-\frac{2}{n}$).

Сложность построенного алгоритма определения знаков цен $4n^2 O(|E|)$, то есть $O(|V|^2|E|)$, то есть полином от размера входа.

После определения знаков цен $p(v)$, все вершины $v : p(v) < 0$ отнесем в множество V_1, а все вершины $v : p(v) \geqslant 0$ отнесем в множество V_2. Если оба множества V_1 и V_2 не пусты, то V_1, V_2 – нетривиальное эргодическое разбиение [4], и тогда имеем абсолютно верный ответ на первый вопрос.

Если одно из множеств V_1 или V_2 пусто, алгоритм выдает, что 1-регулярного разбиения в начальном графе нет. Покажем, что вероятность ошибки в этом случае не превосходит $\frac{15}{16}$. Допустим, что в графе 1-регулярное эргодическое V_1, V_2 существует, но алгоритм определил, что во всех вершинах v цены имеют одинаковые знаки. Чтобы определить вероятность этого события, оценим снизу вероятность дополнительного события, что алгоритм определил различные знаки цен. Для этого рассмотрим по паре вершин $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ из 1-регулярных блоков $G(V_1)$ и $G(V_2)$. Пусть c_1 и c_2 – циклы, достижимые из вершин v_1 и v_2 в графах $G(V_1)$ и $G(V_2)$ соответственно. Эти циклы единственны в силу 1-регулярности графов $G(V_1)$ и $G(V_2)$. Теперь вероятность p события, что в графе найдется пара вершин различных знаков, оценивается следующим образом:

$$p \geqslant p(c(c_1) < 0 \text{ и } c(c_2) \geqslant 0) =$$

$$p(c(c_1) < 0)p(c(c_2) \geqslant 0) \geqslant p(c(c_1) < 0)p(c(c_2) > 0) \geqslant \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Действительно, используя известные комбинаторные соотношения [1], нетрудно получить, что вероятность того, что длина цикла равна нулю $p(c(c_1) = 0) = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}$ монотонно убывает с ростом числа ребер, и тогда $p(c(c_1) = 0) \leqslant \frac{1}{2}$, тогда $p(c(c_1) < 0) \geqslant \frac{1}{4}$; $p(c(c_2) > 0) \geqslant \frac{1}{4}$.

И в этом случае множества V_1 и V_2 не пусты и по сформулированному выше утверждению 3 алгоритм получит эргодическое разбиение V_1, V_2. Тогда вероятность ошибки не превосходит величины $\leqslant 1 - p$, для чего имеем оценку $-p \leqslant -\frac{1}{16}$, и тогда вероятность ошибки не более, чем $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Автор приносит благодарность В.Б. Кудрявцеву за постоянное внимание к работе. Результаты получены при поддержке гранта РФФИ 98-01-00846.

Список литературы

[1] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

[2] Кифер Ю.И. Оптимальное поведение в играх с неограниченной последовательностью ходов // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14. №2.

[3] Federgruen A., Schweitzer P.J. Contraction mappings underlying undiscounted marcov decision problems // Journal of mathematical analysis and applications. 1978. V. 65. P. 711–730.

[4] Гурвич В.А., Карзанов А.В., Хачиян Л.Г. Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 28 (9). 1989. 1407–1417.

[5] Лебедев В.Н. Алгоритмы оптимизации стационарных управлений в дискретных динамических системах. Дисс. к.ф.-м.н. М.: МФТИ, 1990.

[6] Гурвич В.А., Лебедев В.Н. Критерий и проверка эргодичности игровых форм // УМН. 1989. Т. 265 №1. С. 193–194.

[7] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.