Список литературы

[1] Глезер В.Д. Зрение и мышление. СПб.: Наука, 1993.

[2] Козлов В.Н. О распознавании аффинно разных дискретных изображений // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 95–122.

[3] Козлов В.Н. О зрительном образе, математических подходах к определению этого понятия и о распознавании изображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39. №11. С. 1919–1936.

[4] Козлов В.Н. Об одной мере близости плоских изображений, инвариантной относительно подобия // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4. Вып. 1–2. С. 101–124.

[5] Козлов В.Н. Способ оценки похожести изображений, основанный на преобразованиях подобия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №5. С. 800–812.

[6] Kozlov V.N. Visual Pattern and Geometric Transformations of Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. Vol. 10. №3. P. 321–342.

Автоматная сложность вычисления формул

А.А. Кудрин

Данная проблема относится к современному направлению теории управляющих систем и связана со сложностными оценками в теории автоматов [2]. В данной задаче продолжается изучение перечислительных свойств конечных автоматов. Подобные задачи возникают, когда входная информация считывается некоторым анализатором, вообще говоря, без запоминания и без возможности ее полного восстановления в дальнейшем, но при необходимости принятия решения этим анализатором. Простейшими примерами подобных анализаторов могут служить: функция подсчета скобочного баланса в компиляторе компьютерных программ (которые, как правило, имеют линейную относительно длины программы сложность и ограниченную возможность запоминания); анализаторы речи.

Общая формулировка задачи может быть описана следующим образом. Зафиксируем некоторое конечное множество F (называемое базисом) формул в операторной форме над множеством всех двуместных булевских операций. При этом в рамках данной задачи мы будем дополнительно считать, что заданная запись каждой формулы из базисного множества F предполагает не более чем однократное вхождение символа одной и той же переменной (так называемые бесповторные формулы). Далее будем строить над этим множеством термы в смысле суперпозиции [1]. Однако, мы не будем предполагать в термах переменных, а только константы 0 и 1. Совокупность этих выражений обозначим через $\Phi(F)$, элементы этого множества (далее просто термы) и будут являться объектами нашего рассмотрения.

Элементы множества $\Phi(F)$ можно также интерпретировать как слова над некоторым конкретным алфавитом V. Например, если все формулы из F заданы в операторной форме, то этот алфавит будет иметь вид $V_{op} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, (,), 0, 1\}$, где символы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть значки булевских операторов.

Пусть теперь у нас есть элемент $\psi \in \Phi(F)$. Число символов соответствующего алфавита V, содержащихся в слове ψ, назовем его длиной и обозначим через $|\psi|$.

Множество термов над F, чья длина не превышает некоторой константы n обозначим через $\Phi_n(F) = \{\psi \in \Phi(F), |\psi| \leqslant n\}$. Произвольный терм из множества $\Phi_n(F)$ подается на вход конечного инициального автомата $\mathcal{A}$ без выхода, $\mathcal{A} = (V, Q, \varphi, q_0)$, который должен вычислить значение функции, реализуемой данным термом (здесь символами V, Q, φ, q_0 обозначены входной алфавит, алфавит состояний, функция переходов и начальное состояние соответственно). Под термином «вычислить» мы подразумеваем следующее: автомат $\mathcal{A}$ вычисляет $\Phi_n(F)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists q_0, q_1 \in Q : \forall \alpha \in \Phi_n(F), \vec{\varphi}(q_0, \alpha) = \begin{cases} q^0, & \text{если } \alpha = 0 \\ q^1, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases}$$

Здесь под метаобозначением $\alpha = \mathrm{const}$ подразумевается тот факт, что значение функции, реализуемой термом α равняется указанной константе.

Требуется оценить минимально возможное число состояний автомата $\mathcal{A}$ вычисляющего $\Phi_n(F)$ как функцию параметров F и n. Данную оценку будем проводить по порядку при помощи величины $S_F(n) = \min\{\log_2 |Q| : \mathcal{A} \text{ вычисляет } \Phi_n(F)\}$.

Поставленная таким образом задача корректна в том смысле, что, если на вход изучаемого автомата $\mathcal{A}$ подается терм из множества $\Phi_n(F)$, то автомат вычисляет (в указанном смысле) значение функции, реализуемой данным термом.

Один из первых результатов в данной области был получен А.Е. Андреевым и А.А. Часовских [3]. Ими был рассмотрен случай, когда базисы F могли состоять из операторных формул длины не более чем 5 (что соответствует двуместным булевским операциям, а также префиксной и суффиксной формам отрицания; множество таких формул обозначим через Ω^2). Сформулируем этот результат в немного упрощенной форме, т.к. он потребуется для дальнейшего изложения.

Определим следующие подмножества операций:
$K_0 = \{(x \& y)\}, D_0 = \{(x \vee y)\}, L_0 = \{(x \sim y), (x \oplus y)\}$,
$P_0 = \{(x \& y), (x \vee y), (x < y), (x \to y)\}$,
$R_0 = \{(x \leftarrow y), (x > y), (x \downarrow y), (x | y)\}$.

Сформулируем теперь теорему, которая позволяет оценить порядок величины $S_F(n)$ в зависимости от различных видов множества F.

Теорема 1. *Пусть $F \subseteq \Omega^2, F \neq \varnothing$.*
1. Если $F = K_0$ или $F = D_0$ или $F \subseteq L_0$, то $(\forall n)\, S_F(n) = 1$.
2. Если не выполняются условия пункта 1 и $F \subseteq P_0$ (или $F \subseteq R_0$), то $S_F(n) = \log_2 n$ (здесь равенство понимается по порядку).
3. Во всех остальных случаях $S_F(n) = n$ (здесь равенство понимается по порядку).

Естественным продолжением этой задачи является увеличение длины формул, входящих в множество F. Теперь будем рассматривать операторные формулы, длина записи которых равна 9. То есть формулы вида $((x \circ y) * z)$ и $(x \circ (y * z))$, где символы $\circ$ и $*$ – есть значки булевых операторов.

Сформулируем результат, полученный в этом случае [4], при дополнительном условии $|F| = 1$ (т.е. в множестве F содержится ровно одна формула). Здесь как обычно через $[F]$ будем множество функций, которые могут быть получены в виде суперпозиции из множества F.

Теорема 2. *Пусть $|F| = 1$ и $F = \{((x \circ y) * z)\}$ или $F = \{(x \circ (y * z))\}$, тогда*
1. Если $F \subseteq [D_0]$ или $F \subseteq [K_0]$ или $F \subseteq [L_0]$, то $(\forall n)\, S_F(n) = 1$.

2. Если не выполняются условия пункта 1 и операции $(x \circ y)$, $(x * y) \in P_0 \cup R_0$, *то* $S_F(n) = \log_2 n$ *(здесь равенство понимается по порядку).*
3. Во всех остальных случаях $S_F(n) = n$ *(здесь равенство понимается по порядку).*

Был также получен результат, позволяющий провести классификацию базисов (произвольной мощности), состоящих из бесповторных операторных формул длины 9, с точки зрения оценки $S_F(n)$. Однако этот результат описывает не все возможные варианты таких базисов, а только 95 процентов. При доказательстве данной теоремы были получены свидетельства того, что при увеличении максимально возможной длины формул, входящих в базис, число базисов, для которых справедлива оценка $S_F(n) = n$ (здесь равенство понимается по порядку), растет.

Введем дополнительные обозначения. Пусть дана операторная формула f и пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k$ – все символы бинарных булевских операторов, использованные в этой записи (вообще говоря, с повторениями), выписанные в порядке их появления в записи (если читать операторную запись данной функции как слово слева направо). Тогда введем метаобозначение для указанной операторной формулы – $f_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$.

Пусть задан базис $F = \{f_{\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,k_1}}, \ldots, f_{\alpha_{s,1}, \ldots, \alpha_{s,k_s}}\}$, где $(x\alpha_{i,j}y) \in P_0 \cup R_0 \cup L_0$, $N_F = \max\{k_1, \ldots, k_s\}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, N_F\}$.

Тогда обозначим через B_r число базисов F указанного типа, для которых справедливо неравенство $N_F \leqslant r$.

Далее пусть $B_r^{\max}$ обозначает число базисов F указанного типа, для которых справедливо неравенство $N_F \leqslant r$ и справедлива оценка $S_F(n) = n$ (здесь равенство понимается по порядку).

Теорема 3.

$$\lim_{r \to \infty} \frac{B_r^{\max}}{B_r} = 1.$$

Таким образом, оказалось, что при увеличении максимально допустимой длины формул, входящих в базис F, отношение числа базисов, для которых справедлива указанная оценка, к общему числу допустимых базисов стремится к 1.

Далее была изучена задача, когда вместо операторной рассматривалась префиксная запись формул из базиса, содержащего формулы в префиксном виде длины не более чем 5. Для этого случая были получены результаты аналогичные Теореме 1.

При этом при изучении данной задачи встал вопрос о возможности построения базиса F, для которого функция $S_F(n)$ принимала бы значение (по порядку) отличное от 1, $\log n$, n. Подобный пример был построен для случая счетнозначной логики, где был сконструирован базис F, где $S_F(n) = \log\log n$ (здесь равенство понимается по порядку). Соответствующие базисы были построены для префиксных формул.

Рассмотрим множество префиксных формул $F = \{f_2(x), f_3(x), \ldots, f_s(x), \ldots\}$, где формула $f_i(x)$ реализует в счетнозначной логике следующую частичную функцию (содержательно функция f_k проверяет свойство делимости числа x на 2^k).

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2^k, \quad x = c * 2^{[\log k]} \\ 1, & x \geqslant 2^k, \quad x \neq c * 2^{[\log k]} \end{cases}; \qquad x, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \geqslant 2.$$

В дальнейшем мы будем кодировать натуральные числа наборами из нулей и единиц, представляющих собой их инвертированную двоичную запись (например, число 6 будет закодировано набором 011). В этом случае определение функции, реализованной формулой $f_k(x)$ будет выглядеть следующим образом ($x_i \in \{0, 1\}$):

$$f_k(x_1 \ldots x_s) = \begin{cases} \overbrace{0 \ldots 0}^{s}, & s \geqslant k, x_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant [\log k] \\ \overbrace{10 \ldots 0}^{s}, & s \geqslant k, \exists j, x_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant [\log k] \end{cases}; \quad k \geqslant 2.$$

При этом мы можем считать (ввиду особенности конструкции), что автомат A_n, вычисляющий множество $\Phi_n(F)$, определен над конечным алфавитом $V_n = \{0; 1; (;); f_2; \ldots; f_k\}$ (где $n = k + 3$, $2^m < k \leqslant 2^{m+1}$). Далее доказывается, что $S_F(n) = \log\log n$ (здесь равенство понимается по порядку).

В рамках рассматриваемой задачи возник вопрос о связи различных замкнутых классов Поста со сложностью автоматов, вычисляющих значения функций, реализованных формулами из этого класса. Здесь мы также будем рассматривать префиксные бесповторные формулы, для которых справедливы результаты, аналогичные Теореме 1.

Для этой цели введем дополнительные сложностные характеристики. Пусть K – замкнутый класс, далее пусть F – некоторое множество префиксных формул, реализующих функциональный базис в этом классе (при этом как обычно в рамках данной задачи будем предполагать, что заданная префиксная запись каждой формулы из базиса F предполагает не более чем однократное вхождение символа одной и той же переменной). Тогда назовем сложностью автоматной реализации класса K величину $S^K(n) = \min S_F(n)$, где минимум берется по всевозможным множествам формул F, реализующих функциональный базис в классе K.

Изучим вначале классы, состоящие из одноместных функций (в обозначениях Поста O_i, $i = 1, \ldots, 9$). В этом случае, для любого базиса F справедлива оценка $(\forall n) S_F(n) = 1$ и тогда $S^K(n) = 1$.

Теперь рассмотрим классы, состоящие из логических сумм и функций 0 и 1 (у Поста классы S_1, S_3, S_5, S_6). В этом случае имеем $(\forall n) S^K(n) = 1$.

Аналогичные рассуждения можно применить для классов, состоящих из логических произведений и функций 0 и 1 (у Поста классы P_1, P_3, P_5, P_6). Здесь получаем, что $(\forall n) S^K(n) = 1$.

Для классов, состоящих из линейных функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами (классы $L_i, i = 1, \ldots, 5$), $(\forall n) S^K(n) = 1$.

Для любого иного замкнутого класса Поста K оказывается справедливым соотношение $S^K = \log n$ (здесь равенство понимается по порядку).

При этом также представляет интерес проведение оценки величины $S^K_{\max}(n) = \max S_F(n)$, где максимум берется по всевозможным базисам F класса K (очевидно, что значение данной величины не может превосходить n).

Для классов S_i, P_i, $i = 1, 3, 5, 6$; L_j, $j = 1, \ldots, 4$; O_k, $k = 1, \ldots, 8$; величина $S^K_{\max}(n)$ очевидно равняется 1 (ввиду того, что в данном случае автоматы должны проверять условия наличия в записи формулы 0, 1, четности 0 или 1, четности вхождений функции отрицания соответственно, для чего требуется константное число состояний, не зависящее от длины формулы). Для всех же остальных замкнутых классов оказывается верным соотношение $S^K_{\max}(n) = n$ (здесь равенство понимается по порядку).

Список литературы

[1] Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Андреев А.Е., Часовских А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения формул // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. №4. 1996. С. 36–42.

[4] Кудрин А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения функций, заданных в префиксном виде // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. №1. 1998. С. 62–63.