

ва α , что $a_{r_j+1} = 1$ и $\bar{\phi}(a_1 \dots a_{r_j}, j) = 1$. Точнее это должно быть выполнено для всех $j \in Q_2$, кроме быть может одного. Положим $\phi'(S, 0) = \phi(S, 0)$ $\phi'(S, 1) = \phi(S \setminus \{1\}, 1)$, где $S \subset Q$ $\alpha \in A^*$, то есть при идентификации состояния мощность множества возможных состояний уменьшается на 1. До начала эксперимента имеем: $S = Q_2$, а в конце эксперимента $S \rightarrow S' = \{q\}$, где q – некоторое состояние. Заметим, что в течении всего эксперимента множество S возможных состояний всегда можно покрыть некоторым отрезком длины k . Это легко проверить по индукции. Разобьем слово α на блоки следующим образом:

$$\alpha = \underbrace{00 \dots 0}_O \underbrace{11 \dots 1}_I \underbrace{00 \dots 0}_O \dots$$

Моменты, в которые происходит уменьшение мощности множества S , совпадают с моментами идентификации состояний, так как множество S всегда находится в некотором отрезке длины k . При этом мощность S уменьшается ровно на 1. Пусть t_1, t_2, \dots, t_{k-1} – все моменты идентификации. Нетрудно видеть, что для любого i $1 \leq i \leq k-2$, $t_{i+1} - t_i \geq k+1$. Отсюда:

$$L(\mathcal{A}, Q_2) \geq k+1 + (k-2)(k+2) = k^2 + k - 3.$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Кудрявцеву В.Б. и Подколзину А.С. за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [2] Хиббард Т. Точные верхние границы для минимальных экспериментов, определяющих заключительное состояние, для двух классов последовательных машин // Кибернетический сборник. Вып. 2. М.: Мир, 1966.
- [3] Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы М.: ИЛ, 1956. С. 179–210.
- [4] Карацуба А.А. Решение одной задачи из теории конечных автоматов. М.: УМН, 1960. Т. 15, Вып. 3. С. 157–159.

О выделении существенного при распознавании изображений

В.Н. Козлов

Введение

Зрительное восприятие занимает особое место в ряду других органов чувств человека. По некоторым оценкам биологов до 90% сенсорной (то есть от органов чувств) информации составляет зрительная информация [1]. В немалой мере и собственно мышление, можно предполагать, имеет в основе своей оперирование со зрительной информацией из окружающей среды и из памяти.

Столь же очевидно значима визуальная информация и для работы технических устройств: роботов, компьютеров, систем наведения на цели, и пр.

Одна из особенностей зрительной информации – ее огромные объемы. Глаз человека содержит около 130 миллионов светочувствительных элементов (палочек и колбочек). Вместе с тем распознавание изображений осуществляется иногда лишь за доли секунды. Вряд ли это можно сделать, используя целиком всю информацию на сетчатке глаза. Должно существовать некоторое «сито» и для изображений из среды, и для визуальной информации из памяти при оперировании с ними. Парадокс, однако, состоит в том, что попытке до собственно распознавания выделить на изображениях «опорные точки», «важные детали», и пр. есть тоже распознавание, то есть возникает до некоторой степени замкнутый круг, со всеми вытекающими из этого сложностями.

Трудно рассчитывать эту задачу – построение «сита» для изображений – решить неким единовременным усилием. В настоящей

работе предлагается некоторый шаг в ее решении в рамках модели, строящейся здесь и в предшествующих работах [2]–[6].

Говоря об изображениях и их распознавании, имеет смысл как можно яснее определить, во-первых, с тем, что понимается под изображением, во-вторых, с тем, как сравниваются изображения, как оценивается то, что называется их «похожестью», «близостью по форме», совпадением «в основных чертах», и пр.

В этой работе под изображением понимается конечное (непустое) множество точек на плоскости. Содержательным обоснованием этому может служить то, что любое реальное (нецветное) изображение можно аппроксимировать изображением из точек, причем в нужной мере можно передать все градации «серого цвета» разной плотностью точек в разных частях изображения. Такое представление не закрывает дорогу и к рассмотрению цветных изображений, поскольку, как известно, цветное изображение можно представить тремя нецветными. Наконец, все, что мы видим, мы видим посредством глаз. Изображение из среды проецируется на сетчатку глаз, что приводит к возбуждению части рецепторных клеток, то есть, в конечном счете, к формированию на сетчатке аналога составленного из точек изображения.

Сравнение «на похожесть» двух изображений предлагается осуществлять таким их наложением одного на другое, при котором соответствующие точки на двух изображениях оказываются как можно более близко друг от друга. Такое расположение изображений называем искомым. Подчеркнем, при этом нельзя заранее считать известным, какие точки на двух изображениях соответствуют друг другу, ибо установление этого соответствия – это часть задачи распознавания. Ясно, что в частном случае, когда оба изображения одинаковы, эти соответствующие точки при таком наложении просто совпадут.

Наложение изображений друг на друга осуществляем движениями, то есть геометрическими преобразованиями. Ранее [2, 3, 6] представлены процедуры, позволяющие найти искомое положение изображений. У этих процедур есть недостатки, причем существенные, если основывать на них реальное распознавание: сравниваемые

бражения предполагаются состоящими из одинакового числа n точек, и при сравнении изображений нужно исследовать $n!$ вариантов соответствия точек друг другу. Ясно, что с ростом n такая процедура становится неприемлемой из-за вычислительных трудностей. В первом разделе устраняются эти недостатки, и зависимость числа вариантов сравнения от числа точек в каждом из изображений становится полиномиальной.

Однако в случае, когда точек в изображениях много (а реальное изображение, например, изображение на телевизионном экране – это сотни тысяч точек), даже полиномиальная зависимость от числа точек неприемлема, или, как минимум, нежелательна. Поэтому в разделе 2 сравнение изображений как таковых заменяется рассмотрением того, что можно назвать их набросками, эскизами, или приближениями. Эти эскизы могут состоять из гораздо меньшего числа точек, чем исходные изображения, и, вместе с тем, оценка схожести между эскизами определенным образом связывается с оценкой схожести между исходными изображениями. Распознавание при таком подходе перестает прямо зависеть от количества точек в изображениях и появляется возможность рассматривать изображения, бесконечные по числу составляющих их точек («непрерывные» изображения).

В разделе 3 показывается, что для функции, характеризующей похожесть изображений, выполняется неравенство треугольника. Это позволяет сократить перебор при сравнении распознаваемого изображения с изображениями, хранящимися в памяти.

В последнем разделе построения распространяются на более широкий, чем движения, класс геометрических преобразований – преобразования подобия.

1. Об определении искомого взаиморасположения двух изображений

Сначала ниже идет краткое изложение ранее сделанных построений [2, 3, 6], затем они дополняются и изменяются так, чтобы устранить отмеченные во введении недостатки.

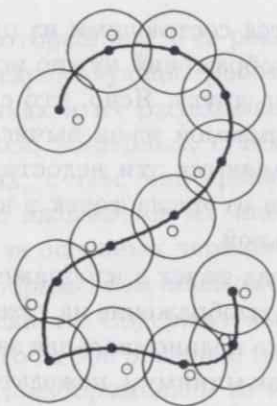


Рис. 1.

Рассмотрим следующий пример. Изображения A и B цифры «2» состоят каждое из n точек. Фигуру B движениями, то есть параллельными переносами, поворотами и «переворотами» (преобразованиями симметрии относительно прямой) специальным образом расположили по отношению к A . Это расположение характеризуется тем, что каждая точка из B (на рис. 1 эти точки представлены кружочками) оказывается от ровно одной соответствующей ей точки из A на расстоянии, не большем некоторого R (на рис. 1 R – радиус больших кругов). Положим, что это R уже никакими движениями фигуры B уменьшить нельзя. В этом случае можно считать, что фигура B своими контурами повторяет фигуру A , а величина R – характеристика рассогласования в контурах. Если на изображение A пытаться наложить движениями не «двойку», а другую фигуру, например, «четверку», то, можно ожидать, характеристика рассогласования будет существенно больше. На этом и предлагается основывать процедуры различения фигур по форме, и в целом распознавания изображений.

Отметим, что мы не можем считать заранее известным, какие точки на A и B являются соответствующими. Поэтому схема решения задачи предполагает проверку всех $n!$ возможных вариантов

соответствия точек на A и B друг другу. Пусть ψ – некоторое одно из таких соответствий. Обозначим через B^p множество всех изображений, получаемых из B параллельными переносами и поворотами. Полагаем, что на изображениях из B^p сохраняется нумерация точек, порожденная изображением B , то есть если $B' \in B^p$, то через b'_i в B' обозначена точка, в которую при соответствующем преобразовании перешла точка b_i из B ($i = 1, \dots, n$). Пусть $b'_{\psi(i)}$ – точка в изображении B' , сопоставленная отображением ψ точке a_i . Обозначим через $l(B')$ длину наибольшего из отрезков $(a_i b'_{\psi(i)})$ ($i = 1, \dots, n$). Пусть минимум величин $l(B')$, рассматриваемых для всех $B' \in B^p$, достигается на изображении B'_0 . Обозначим этот минимум через $r_\psi(A, B)$. Рассмотрим изображение \bar{B} , полученное из B преобразованием симметрии относительно какой-либо прямой, и пусть минимум $r_\psi(A, \bar{B})$ достигается на изображении \bar{B}'' из \bar{B}^p . Обозначим через $R_\psi(A, B)$ меньшую из величин $r_\psi(A, B)$ и $r_\psi(A, \bar{B})$, через B_0^ψ – изображение из $B^p \cup \bar{B}^p$ (то есть B'_0 или B''_0), на котором этот минимум достигается.

Множество $B^p \cup \bar{B}^p$ обозначим через B^* . Ясно, что B^* – множество всех изображений, которые можно получить из B изометрическими преобразованиями.

Далее остается выбрать из величин $R_\psi(A, B)$, полученных для всех возможных ψ , наименьшую. Этот минимум обозначаем через $R(A, B)$, биекцию, на которой он достигается, обозначаем через ψ_0 и называем искомым соответствием между точками изображений A и B . Изображение $B_0^{\psi_0}$ обозначаем через B_0 и называем искомым, взаиморасположение A и B_0 – тоже искомое. Величину $R(A, B)$ называем также расстоянием между A и B .

В описанной схеме нераскрытой пока осталась процедура определения величин $r_\psi(A, B)$. Без ограничения общности можем полагать, что биекцией ψ точке a_i изображения A сопоставляется точка b'_i изображения B' из B^* . Точки a_i и b'_i называем соответствующими, соответствующими называем и отрезки $(a_i a_j)$ и $(b'_i b'_j)$ ($i \neq j, i, j = 1, \dots, n$).

Введем понятие угла между изображениями. Зафиксируем некоторые p и q и в качестве угла между изображениями в паре (A, B')

возьмем угол φ , образованный отрезками $(a_p a_q)$ и $(b'_p b'_q)$ или их продолжениями. Без ограничения общности можно полагать, что для исходных изображений A и B отрезки $(a_p a_q)$ и $(b_p b_q)$ параллельны, однонаправлены (то есть если в отрезке $(a_p a_q)$ слева направо идет сначала точка a_p , затем a_q , то и в отрезке $(b_p b_q)$ слева направо идут последовательно точки b_p и b_q), и угол φ равен нулю. Для произвольного B' из B^p полагаем угол ψ между B' и A находящимся в промежутке от 0 до 2π .

Обозначим через $\{B\}_\psi$ множество всех тех изображений из B^p , которые имеют данный угол ψ с изображением A . Ясно, что во множестве $\{B\}_\psi$ изображения переводимы друг в друга параллельными переносами.

Ранее [2, 3, 6] было доказано утверждение, которое применительно к обозначениям настоящей статьи выглядит следующим образом.

Теорема 1. *В $\{B\}_\psi$ существует и единственно изображение, на котором достигается минимум величин $l(B')$, рассматриваемых для всех $B' \in \{B\}_\psi$.*

Этот минимум — обозначим его через $r(\varphi)$ — представляется тем самым как функция от угла φ . Далее вопрос сводится к тому, чтобы определить минимум величин $r(\varphi)$ при углах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

В этих построениях используется понятие характеристического изображения C для пары (A, B') , где $B' \in B^*$. Оно состоит из точки O и точек c_1, \dots, c_n , называемых соответственно центром и точками ядра. В качестве O берется произвольная точка плоскости. Затем параллельным переносом отрезка $(a_i b'_i)$ ($i = 1, \dots, n$) совмещаем точку a_i с точкой O . Точку, в которую переходит при этом b'_i , обозначаем через c_i . Обратной процедурой при заданных A и C получается, нетрудно видеть, изображение B' . Отметим, что некоторые из точек характеристического изображения могут совпадать (сливаться), и в этом смысле C является особым изображением.

Показано, что ядра характеристических изображений для всех изображений из $\{B\}_\psi$ переводимы друг в друга параллельными переносами. Это значит, что эти характеристические изображения различаются только положением центра относительно точек ядра

Окружность минимального по радиусу круга, включающего все точки ядра, называем ключевой. Такая окружность при заданном ядре существует и единственна. Показано, что для изображения B' из $\{B\}_\psi$, на котором достигается минимум величин $l(B')$, центр характеристического изображения должен совпадать с центром ключевой окружности. Это и позволяет построить такое изображение B' .

Пусть c_i и c_j — точки из ядра характеристического изображения ($i \neq j, i, j = 1, \dots, n$). Из рассмотрений в [2, 3, 6] следует, что если параллельными переносами отрезков $(a_i a_j)$ и $(b'_i b'_j)$ совместить точку a_j с c_i , и точку b'_j с c_j , то точки a_i и b'_i совместятся в одну точку, обозначим ее через c_{ij} . При заданных изображениях A и B тем самым стороны $c_i c_{ij}$, $c_j c_{ij}$ и угол между этими сторонами в треугольнике $c_i c_j c_{ij}$ (обозначим его через α_{ij}) можно считать известными. Следовательно, может быть получена и длина отрезка $c_i c_j$: $(c_i c_j)^2 = (a_i a_j)^2 + (b'_i b'_j)^2 - 2(a_i a_j)(b'_i b'_j) \cos \alpha_{ij}$. Поскольку угол α_{ij} зависит от угла φ между изображениями, то длина отрезка $(c_i c_j)$ есть функция от угла φ .

Из формулы для отрезка $(c_i c_j)$ следует, что он равен нулю, то есть точки c_i и c_j слиты в одну, только при равенстве длин отрезков $(a_i a_j)$ и $(b'_i b'_j)$, их параллельности и однонаправленности. Угол α_{ij} при этом равен нулю. Существует лишь конечное число углов φ , при которых это может иметь место. Для каждого такого φ из множества $\{B\}_\psi$ выбираем то изображение B' , для которого центр характеристического изображения пары (A, B') совпадает с центром ключевой окружности, и при этом слившиеся точки c_i и c_j лежат на ключевой окружности. Множество всех таких изображений обозначаем через U_0^ψ . При дальнейших рассмотрениях полагаем, что уже никакие две точки ядра на ключевой окружности не слиты в одну.

Положим, найдено изображение B'_0 , на котором достигается минимум величин $l(B')$, полученных при всех $B' \in B^p$. Далее априори возможны три случая: на ключевой окружности находятся соответственно две, три и более трех точек ядра.

Первый случай. На ключевой окружности находятся две точки c_{i_1} и c_{i_2} ($i_1, i_2 \in (1, \dots, n)$), причем отрезок $(c_{i_1} c_{i_2})$ должен быть диаметром ключевой окружности. В этом случае соответствующие от-

резки $(a_{i_1} a_{i_2})$ и $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$ должны быть параллельны, однонаправлены и середины их должны совпадать. Если поочередно в качестве порождающих эту пару отрезков рассматривать все отрезки из A и соответствующие отрезки из B , то этим условием определяется конечное множество изображений из B^p , обозначим его через U_1^ψ .

Второй случай. На ключевой окружности находятся три точки $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}$ ($i_1, i_2, i_3 \in (1, \dots, n)$). Треугольник с вершинами в этих точках должен быть остроугольным. Длину отрезков $(a_{i_1} b_{i_1}^0)$, $(a_{i_2} b_{i_2}^0)$, $(a_{i_3} b_{i_3}^0)$ обозначим через R , прямые L_1, L_2, L_3 , на которых лежат эти отрезки, будем считать направленными, с направлением от a_{i_j} к $b_{i_j}^0$ ($j = 1, 2, 3$).

Доказано, что прямые L_1, L_2, L_3 должны пересекаться в одной точке.

Точку пересечения обозначим через O и назовем центром трехосника, состоящего из осей L_1, L_2, L_3 . На каждой оси часть ее от центра в направлении оси называем положительной, оставшуюся часть — отрицательной. Отрезки $(O_L a_{i_1})$, $(O_L a_{i_2})$, $(O_L a_{i_3})$ представляем величинами соответственно x, y, z . Длину отрезка $(O_L a_{i_1})$ полагаем равной $|x|$, x полагаем положительным, если a_{i_1} находится в положительной части оси L_1 , и отрицательным в противном случае. Аналогичное предполагаем и про y и z . Углы (положительные, меньше π , в сумме составляющие 2π) между осями L_1 и L_2 , L_1 и L_3 , L_2 и L_3 обозначаем через соответственно α, β, γ .

Ясно, что задание конкретных значений для $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, R$ определяет конкретное положение точек $b_{i_1}^0, b_{i_2}^0, b_{i_3}^0$ относительно точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$, а значит и конкретное изображение из B^p .

Показано, что все варианты взаиморасположения точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ и $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ на трехоснике находятся среди решений следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \\ (a_{i_1} a_{i_2})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \\ (b_{i_1} b_{i_2})^2 = (x + R)^2 + (y + R)^2 - 2(x + R)(y + R) \cos \alpha \\ (a_{i_1} a_{i_3})^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \beta \\ (b_{i_1} b_{i_3})^2 = (x + R)^2 + (z + R)^2 - 2(x + R)(z + R) \cos \beta \\ (a_{i_2} a_{i_3})^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma \\ (b_{i_2} b_{i_3})^2 = (y + R)^2 + (z + R)^2 - 2(y + R)(z + R) \cos \gamma \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через U_2^ψ множество изображений из B^p , определяемых решениями систем (1) для всех троек точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ и соответствующих точек $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ ($i_1, i_2, i_3 \in (1, \dots, n)$).

Третий случай. На ключевой окружности находятся четыре и более точек. Рассмотрим четыре из них: $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}$. Из теоремы Птолемея следует, что для того, чтобы эти четыре точки находились на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из трех равенств:

$$\pm(c_{i_1} c_{i_2})(c_{i_3} c_{i_4}) \pm (c_{i_1} c_{i_3})(c_{i_2} c_{i_4}) \pm (c_{i_1} c_{i_4})(c_{i_2} c_{i_3}) = 0.$$

Длина каждого из отрезков в этих уравнениях есть функция от угла φ . Для каждого угла φ , являющегося решением, определено (единственное) изображение из $\{B\}_\varphi$, для которого центр характеристического изображения совпадает с центром ключевой окружности. Отбираем те изображения, для которых точки $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}$ лежат на ключевой окружности. Такие уравнения составляем для каждой четверки точек $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$ и соответствующих точек $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4}$. Множество таким образом получаемых изображений из B^p обозначаем через U_3^ψ .

Далее меняем изображение B преобразованием симметрии относительно прямой на изображение \bar{B} , и проделываем все аналогичное описанному выше для изображения \bar{B} и множества \bar{B}^p . Получаем множества $\bar{U}_0^\psi, \bar{U}_1^\psi, \bar{U}_2^\psi, \bar{U}_3^\psi$.

Объединением всех множеств $U_0^\psi, U_1^\psi, U_2^\psi, U_3^\psi, \bar{U}_0^\psi, \bar{U}_1^\psi, \bar{U}_2^\psi, \bar{U}_3^\psi$ и для всех биекций ψ получаем множество U .

Следующее утверждение можно считать некоторой перефразировкой теоремы из [2, 3, 6].

Теорема 2. *Искомое изображение B_0 может находиться только среди изображений множества U .*

Самое трудоемкое в построении множества U – необходимость в переборе $n!$ биекций ψ . Вместе с тем, как это следует из описанного, взаиморасположение A и B' для всех изображений B' из U определяется фактически искомым взаиморасположением их фрагментов из двух, трех или четырех точек, соответствующих друг другу в рамках каждой из возможных биекций (эти фрагменты можно назвать ключевыми). Поэтому вместо перебора всех биекций ψ , можно, при построении множества U , перебирать все фрагменты из двух, трех и четырех точек на изображениях A и B , все варианты сопоставления этих фрагментов (из одинакового числа точек) друг другу, и все варианты сопоставления друг другу точек во фрагментах. В этом состоит идея, которая ниже описывается подробнее.

Частью или фрагментом изображения A назовем любое (непустое) подмножество \tilde{a} точек изображения A .

Для каждого фрагмента \tilde{a} из двух точек изображения A и каждого фрагмента \tilde{b} из двух точек изображения B ищем их искомое взаиморасположение (см. описание первого случая выше). С учетом возможности по разному сопоставлять друг другу точки во фрагментах \tilde{a} и \tilde{b} общее число вариантов сопоставления фрагментов друг другу будет $(2!)(C_n^2)^2$. Каждый вариант сопоставления определяет два (с учетом преобразования симметрии) изображения из B^* . Множество всех таких изображений обозначаем через \tilde{U}_1 .

Аналогично рассматриваем $(3!)(C_n^3)^2$ вариантов сопоставления друг другу точек во всех фрагментах \tilde{a} из трех точек и всех фрагментах \tilde{b} из трех точек. Определяемые для каждого из таких вариантов искомые взаиморасположения фрагментов (описание второго случая) дают некоторые изображения из B^* . Множество всех этих изображений обозначим через \tilde{U}_2 .

Наконец, рассмотрение аналогичным образом $(4!)(C_n^4)^2$ вариантов сопоставления фрагментов из четырех точек позволит сформировать

множество изображений из B^* , которое обозначим через \tilde{U}_3 .

Труднее сформировать \tilde{U}_0 , аналог множества U_0^ψ . Изображениям из \tilde{U}_0 соответствуют «вырожденные» характеристические изображения со слившимися точками c_{i_1} и c_{i_2} ядра. Однако необходимое условие для «вырожденности» – параллельность, однонаправленность и равенство по длине отрезков $(a_{i_1}a_{i_2})$ и $(b'_{i_1}b'_{i_2})$ – определяет не конкретное изображение из B^* , а только угол между таким изображением B' и изображением A . Такая же проблема возникала и выше, при формировании множества \tilde{U}_0^ψ , но там была задана в целом биекция ψ , что позволяло отобрать во множество \tilde{U}_0^ψ только те из изображений из B^* с заданным углом φ , у которых центр характеристического изображения совпадает с центром ключевой окружности.

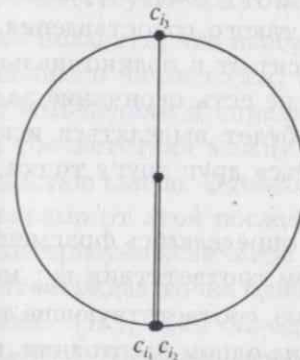


Рис. 2.

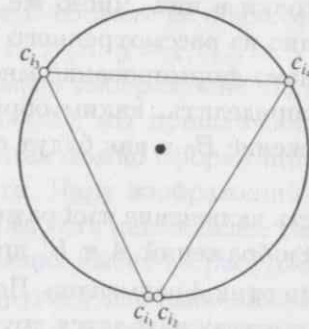


Рис. 3.

Воспользуемся, однако, тем, что слившиеся точки c_{i_1} и c_{i_2} не могут быть единственными точками на ключевой окружности. Должна быть либо еще одна точка c_{i_3} (рис. 2), либо еще две точки c_{i_3} и c_{i_4} (рис. 3), не слившиеся с c_{i_1} и c_{i_2} . В качестве a_{i_3} и b_{i_3} (в варианте с тремя точками) могут быть взяты каждая из $(n-2)$ точек изображения A , и каждая из $(n-2)$ точек изображения B , то есть $(n-2)^2$ вариантов. Аналогично вариантов с четырьмя точками может быть не более $2(C_{n-2}^2)^2$. Для каждого из вариантов берем из B^* для включения в \tilde{U}_0 те изображения, для которых центр характеристического

изображения совпадает с центром окружности, на которой лежат точки $c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}$ или $c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}c_{i_4}$ (рис. 2 и 3). Отметим, что формируемое таким образом множество \tilde{U}_0 включает, очевидно, каждое из множеств U_0^ψ, \bar{U}_0^ψ для всех ψ как подмножество.

Обозначим через \tilde{U} объединение множеств $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ и \tilde{U}_3 . Из описания процедуры формирования множества \tilde{U} следует, как нетрудно видеть, следующее утверждение.

Теорема 3. Множество \tilde{U} включает множество U как подмножество.

Формирование \tilde{U} , в отличие от U , не требует перебора $n!$ взаимнооднозначных соответствий между точками изображений A и B . При построении \tilde{U} сопоставляются друг другу только фрагменты \tilde{a} и \tilde{b} и точки в них. Число же вариантов такого сопоставления, как это видно из рассмотренного выше, зависит от n полиномиально.

Однако формирование множества \tilde{U} не есть окончание задачи. Надо определить, каким образом из \tilde{U} будет выделяться искомое изображение B_0 и как будут сопоставляться друг другу точки на A и B_0 .

Пусть включение изображения B' в \tilde{U} определялось фрагментами \tilde{a} и \tilde{b} изображений A и B' при некотором соответствии $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}$ между точками этих фрагментов. По построению, соответствующие точки во фрагментах находятся друг от друга на одном расстоянии, которое обозначим через $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Если B' – искомое изображение, то и все остальные точки из A должны находиться от соответствующих точек из B' на расстоянии меньшем или равном $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Отсюда следует процедура определения того, что можно назвать приемлемым изображением из \tilde{U} . Для каждой точки a_i из A определим множество Q_{a_i} всех тех точек из B' , расстояние до которых от точки a_i не больше $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Аналогично через $Q_{b'_j}$ обозначим множество тех точек из A , расстояние до которых от b'_j не превышает $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Если все множества Q_{a_i} и $Q_{b'_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) непусты, то изображение B' – приемлемое.

Назовем приемлемое изображение B' узкоприемлемым, если можно из каждого множества Q_{a_i} выбрать ровно по одной точке изобра-

жения B' так, чтобы все выбранные точки были разными. Таким выбором, нетрудно видеть, определяется некоторое взаимнооднозначное соответствие между точками двух изображений.

Среди узкоприемлемых выбираем изображение с наименьшей величиной $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$. Оно и будет искомым изображением, а соответствующая биекция – искомым соответствием между точками изображений A и B .

Изменим теперь определение искомого изображения и искомого соответствия между точками изображений. Это изменение будет состоять в том, что в качестве искомого будем выбирать изображение B_0 с наименьшей величиной $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$, но среди приемлемых изображений, а не узкоприемлемых. Точке a_i , будем теперь полагать, соответствует не одна точка, а все точки из множества Q_{a_i} , точке b'_j соответствуют все точки из множества $Q_{b'_j}$. Кроме того, теперь можно полагать, что изображения A и B состоят не обязательно из одинакового числа точек, то есть $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

К изменениям в определении искомого изображения B_0 и искомого соответствия между точками A и B_0 мы пришли последовательностью шагов. Однако эти изменения можно сформулировать и независимо от этой последовательности. Пару изображений (A, B') охарактеризуем величиной $l(B')$, которая есть наименьшее такое число, что каждая точка одного изображения имеет на расстоянии, не большем $l(B')$, хотя бы одну точку другого изображения. Расстоянием $R(A, B)$ между изображениями A и B назовем наименьшую из величин $l(B')$, полученных для всех B' из B^* . Изображение B_0 , на котором этот минимум достигается, называем искомым. Взаиморасположение A и B_0 – искомое. Каждой точке a_i из A (каждой точке b'_j из B_0) сопоставляем все те точки Q_{a_i} из B_0 (все те точки $Q_{b'_j}$ из A), которые находятся от нее на расстоянии не большем $R(A, B)$.

Отметим, что если следовать описанной выше процедуре построения искомого взаиморасположения, то для ключевых фрагментов \tilde{a} и \tilde{b} соответствие между их точками и при новом определении должно быть строго биективным. Однако это ограничение нетрудно снять рассмотрением довольно очевидных вырожденных подслучаев в рамках рассмотренных случаев первого, второго и третьего.

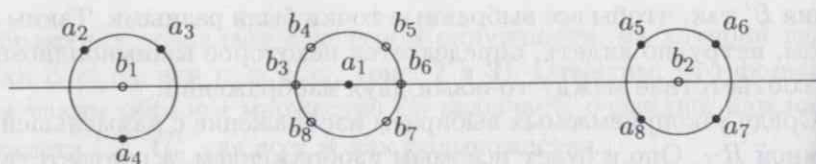


Рис. 4.

Измененное понятие искомого изображения более оправдано с содержательной точки зрения, чем прежде. Если взять рис. 1, который использовался для иллюстрации понятия искомого взаиморасположения изображений, то применительно к нему прежнее определение и новое совпадают. Действительно, на расстоянии не большем R от каждой точки из A находится ровно одна точка из B и наоборот. Однако если взять пример на рис. 4, то для него эти два определения дадут разные расстояния между изображениями A (из точек) и B (из кружочков). Каждое изображение состоит из 8 точек, и рис. 4 иллюстрирует их искомое взаиморасположение в рамках второго определения. Величина $R(A, B)$ не больше радиуса больших кругов на этом рисунке. При этом некоторым точкам одного изображения сопоставляются «кучки» точек другого изображения: $Q_{a_1} = \{b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$, $Q_{b_1} = \{a_2, a_3, a_4\}$, $Q_{b_2} = \{a_5, a_6, a_7, a_8\}$. Ясно, что если потребовать биективного соответствия между точками изображений A и B_0 (в рамках прежнего определения), то естественное соответствие между точками изображений, которое представлено на рис. 4, разрушится.

2. Приближение изображений их покрытиями

Зададимся некоторым числом r ($r \geq 0$). Выберем на A подмножество A^r точек изображения A с тем условием, чтобы каждая точка из A находилась на расстоянии, не большем r , от какой-либо точки из A^r . Ясно, что A^r – фрагмент изображения A , в частном случае A^r может совпадать с A . Изображение A^r можно трактовать как по-

крытие изображения A кругами радиуса r с центрами в точках из A^r , причем так, что каждая точка исходного изображения попадает хотя бы в один из этих кругов.

Содержательно A^r интерпретируется как «огрубление» изображения A , устранение на нем излишних деталей и подробностей, поэтому A^r называем эскизом изображения A . При заданном параметре r существует некоторое множество $\{A^r\} = \{A_1^r, \dots, A_k^r\}$ эскизов, причем исходное изображение A входит в это множество. Однако интерпретировать как «огрубление» A можно, очевидно, лишь те эскизы из $\{A^r\}$, которые состоят из меньшего числа точек, чем исходное изображение A . В частности, в $\{A^r\}$ есть изображение (может быть, не одно) с наименьшим среди A_1^r, \dots, A_k^r числом точек. Такое изображение будем называть остовом изображения A .

Можно, очевидно, говорить об иерархии остовов, определяемой различными значениями r . Остовов (как и эскизов) – конечное множество, и наименьший по числу точек остов всегда (и для всех изображений) состоит из одной точки, наибольший – совпадает с исходным изображением A .

При оценке похожести двух изображений достаточно, может быть, оценить их сходство в целом, в главных чертах, без деталей. Такого рода интуитивные соображения неявно предполагают, что вместо собственно изображений при сравнении будут использованы другие изображения, полученные из исходных удалением излишних деталей, то есть некоторые наброски, эскизы. При этом нужно знать, как сходство эскизов связано со сходством оригиналов. Это и составляет содержательную суть следующего ниже утверждения.

Пусть изображения A и B взаиморасположены искомым образом. Обозначим через R_0 расстояние $R(A, B)$. Пусть A^{r_1} и B^{r_2} – эскизы изображений A и B . Обозначим через $R_{r_1 r_2}$ расстояние $R(A^{r_1}, B^{r_2})$ между эскизами, через r – большее из чисел r_1 и r_2 .

Теорема 4. Для расстояния R_0 между изображениями A и B справедлива следующая оценка:

$$(R_{r_1 r_2} - r) \leq R_0 \leq (R_{r_1 r_2} + r).$$

Доказательство. Докажем, что $(R_{r_1 r_2} - r) \leq R_0$, или $R_{r_1 r_2} \leq (R_0 + r)$.

Пусть a_i — произвольная точка из A^{r_1} . Покажем, что на расстоянии не большем $(R_0 + r_2)$ от a_i есть некоторая точка из B^{r_2} . Действительно, a_i — точка из A , значит на расстоянии не большем R_0 от нее существует точка из B , обозначим ее через b_j . Если точка b_j входит в B^{r_2} , то она искомая. Если b_j не входит в B^{r_2} , то существует круг радиуса r_2 с центром в некоторой точке b_x из B^{r_2} , в котором точка b_j содержится. Расстояние от a_i до b_x не больше чем $(R_0 + r_2)$, и значит точка b_x — искомая.

Эти рассуждения можно повторить, поменяв ролями A^{r_1} и B^{r_2} , и получить, что для произвольной точки из B^{r_2} существует в A^{r_1} точка, расстояние до которой не больше $(R_0 + r_1)$. Отсюда $R_{r_1 r_2} \leq (R_0 + r)$.

Докажем, что $R_0 \leq (R_{r_1 r_2} + r)$.

Изображения A и B расположены, по условию, искомым образом. Из этого, однако, не следует, что и их фрагменты A^{r_1} и B^{r_2} тоже расположены искомым образом. Изометрическими преобразованиями расположим B^{r_2} относительно A^{r_1} искомым образом и обозначим через $B_0^{r_2}$. Это определит и некоторую трансформацию для B , которую обозначим через B_0 .

Пусть a_i — произвольная точка из A . Покажем, что на расстоянии не большем $(R_{r_1 r_2} + r_1)$ от a_i есть некоторая точка из B_0 . Если a_i входит в A^{r_1} , то это очевидно. Если не входит, то существует в A^{r_1} точка, находящаяся от a_i на расстоянии не большем r_1 , и значит есть в $B_0^{r_2}$ точка, удаленная от a_i на расстояние, не большее $(R_{r_1 r_2} + r_1)$.

Эти рассуждения можно повторить, поменяв ролями A и B_0 , и получить, что для произвольной точки из B_0 существует в A точка, удаленная не более чем на $(R_{r_1 r_2} + r_2)$. Отсюда $R_0 \leq (R_{r_1 r_2} + r)$. Теорема доказана.

Теорема 4 позволяет заменить вычисление расстояний между изображениями A и B оценками этого расстояния, причем чем меньше величина r , тем уже интервал, в который заключено $R(A, B)$, и тем ближе оценка к значению $R(A, B)$.

Поскольку при заданном r для A и B возможны эскизы с разным

числом точек, то, имея ввиду упрощение вычислений, целесообразно брать для оценок эскизы с как можно меньшим числом точек. Лучше всего брать остовы. Но при этом нет необходимости брать «в точности» остовы, ибо нахождение остова может потребовать некоторого перебора. Можно использовать любое «приближение» к остову с достаточно небольшим числом точек.

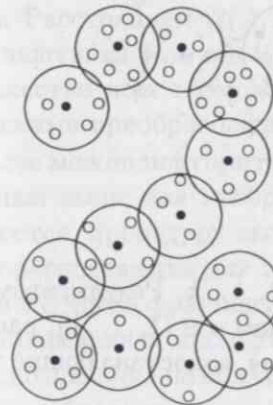


Рис. 5.



Рис. 6.

Отметим, что биективное соответствие между точками изображений A и B иллюстрировалось рис. 1. Изменения в определениях из раздела 1 иллюстрировались рис. 4 (точке одного изображения может соответствовать группа точек другого). Этот случай можно дополнить примерами на рис. 5 и 6 (на рис. 6 контуры фигур такие же, как на рис. 1, но более плотно заполнены точками). Наконец, соответствие между точками в A^{r_1} и B^{r_2} можно трактовать как соответствие между группами, «кучками» точек в исходных изображениях A и B (рис. 7), причем группы могут пересекаться. Другая возможная содержательная трактовка этому — размытость, нечеткость сопоставляемых друг другу частей изображений.

Пусть простая процедура распознавания, которую назовем первичной, состоит в следующем. Распознаваемое изображение A сравнивается с каждым из изображений-эталонов B_1, \dots, B_k , то есть вы-

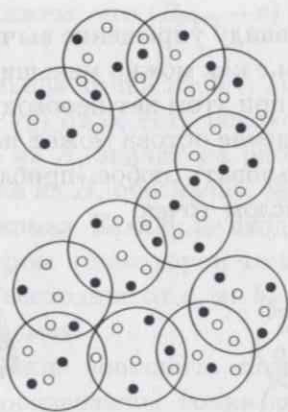


Рис. 7.

числяются все расстояния $R(A, B_i)$, $i = 1, \dots, k$. Результатом распознавания будет изображение B_x с номером $x \in (1, \dots, k)$, расстояние до которого наименьшее, и отображения, сопоставляющие точки изображений A и B_x друг другу.

Теорема 4 позволяет в первичной процедуре распознавания заменить вычисление точных значений $R(A, B_i)$ ($i = 1, \dots, k$) их оценками. Действительно, пусть $\Delta'_x \leq R(A, B_x) \leq \Delta''_x$, $\Delta'_i \leq R(A, B_i) \leq \Delta''_i$, $i = 1, \dots, k$, $i \neq x$, и пусть $\Delta''_x < \Delta'_i$ (то есть интервал для B_x не пересекается с интервалами для остальных B_1, \dots, B_k). Тогда заведомо из всех $R(A, B_i)$ ($i = 1, \dots, k$) расстояние $R(A, B_x)$ – наименьшее.

Поскольку для оценок нужно вычислять расстояния только между эскизами, то выигрыш за счет «упрощения» изображений может оказаться значительным. Нагляднее всего это можно продемонстрировать, показав возможность распространения предшествующих определений и результатов на случай изображений, бесконечных по числу точек.

На плоскости рассмотрим \bar{a} – замкнутую ограниченную область с границей, представляющей собой замкнутую непрерывную линию. Эта область \bar{a} – аналог точки в прежнем изображении, и, будем полагать, в частном, «вырожденном» случае может представлять собой

точку. Ориентируясь на содержательную интерпретацию, \bar{a} можно назвать «мазком». Изображением A назовем теперь множество точек, представимое как объединение конечного числа мазков.

Расположение изображения B относительно «неподвижного» изображения A охарактеризуем величиной $l(B)$, которая есть наименьшее такое число, что каждая точка одного изображения имеет на расстоянии не большем $l(B)$ хотя бы одну точку другого изображения. Расстоянием $R(A, B)$ между изображениями A и B назовем наименьшую из величин $l(B')$, полученных для всех B' из B^* , где B^* – множество всех возможных изображений, получаемых из изометрическими преобразованиями.

Далее можно повторить определения и провести построения, проделанные выше для изображений с конечным числом точек, хотя, разумеется, процедуру вычисления $R(A, B)$ и определения искомого взаиморасположения для этого случая применить нельзя (из-за бесконечного числа фрагментов изображений). Однако теорема 4 остается справедливой и для этого случая. Поскольку в рамках процедуры распознавания не обязательно знать точные значения расстояний между изображениями – достаточно иметь их оценки – то, следовательно, можно использовать вместо A и B их остовы, а уж остовы при любом $r \neq 0$ состоят из конечного числа точек.

Такого рода рассмотрения представляют интерес, по-видимому, только как демонстрация возможности оперировать с бесконечными по числу точек изображениями. Реальные изображения естественнее полагать в этом смысле конечными.

3. Сокращение перебора в памяти

Изображения-эталоны B_1, \dots, B_k в первичной процедуре распознавания будем интерпретировать как хранящиеся в памяти распознающего устройства, изображение A – как изображение из окружающей среды, поступающее для распознавания. Для изображений в памяти можно считать известными все попарные расстояния $R(B_i, B_j)$ ($i, j = 1, \dots, k$), поскольку их вычисления могут быть про-

ведены заранее, как предобработка памяти, и до появления распознаваемого изображения A .

Возникает вопрос: всегда ли нужно при распознавании вычислять (или оценивать) расстояния от A до всех изображений памяти? Из содержательных соображений ясно, что если A очень похоже на одно из изображений B_x памяти, а B_x , в свою очередь, мало похоже на остальные изображения памяти, то вряд ли и A окажется похоже на эти остальные изображения.

Такого рода содержательные соображения имеют в основе своей, можно полагать, следующее утверждение.

Теорема 5. Для изображений A, B_i, B_j ($i, j = 1, \dots, k$) выполняется неравенство: $R(A, B_j) \geq R(B_i, B_j) - R(A, B_i)$.

Доказательство. Пусть каждое из изображений B_i и B_j расположено по отношению к A искомым образом. При этом по отношению друг к другу расположение B_i и B_j , конечно, не обязательно искомое.

Пусть b' — произвольная точка B_i . Тогда существует точка a из изображения A такая, что b' содержится в круге радиуса $R(A, B_i)$ с центром в a . В круге радиуса $R(A, B_j)$ с центром в этой же точке a должна содержаться хотя бы одна точка из B_j , обозначим ее через b'' . Отсюда расстояние между b' и b'' не больше $R(A, B_i) + R(A, B_j)$.

Этими же рассуждениями, поменяв ролями B_i и B_j , можно получить, что и для произвольной точки из B_j существует на расстоянии, не большем $R(A, B_i) + R(A, B_j)$, некоторая точка из B_i . Отсюда $R(B_i, B_j) \leq R(A, B_i) + R(A, B_j)$. Теорема доказана.

Итак, если A очень похоже на B_x , то есть $R(A, B_x)$ мало, то изображения B_j ($j = 1, \dots, k, j \neq x$) можно заведомо не рассматривать, если $R(A, B_j) \geq R(B_x, B_j) - R(A, B_x) \geq R(A, B_x)$, то есть если $R(B_x, B_j) \geq 2R(A, B_x)$.

Сокращение перебора можно проводить последовательно. В процедуре распознавания, при поочередном сравнении A с изображениями-эталоны памяти, на каждом шаге после вычисления расстояния между A и очередным B_i из памяти, можно исключать из дальнейшего рассмотрения те изображения B_{i_1}, \dots, B_{i_l} памяти, для которых $R(B_i, B_{i_j}) \geq 2R(A, B_i)$, $j = 1, \dots, l$. Отметим, что это условие будет

выполняться, очевидно, тем чаще, чем более разнородны, непохожи друг на друга изображения в памяти. Это соответствует содержанию тому, что выбор при сравнении с разнородными изображениями проводить проще, чем тогда, когда эталоны отличаются лишь нюансами.

Можно, наконец, процедуру с поочередным сокращением рассматриваемых изображений памяти соединить с описанной выше процедурой оценки расстояний между изображениями. Если на очередном шаге вместо точного значения $R(A, B_i)$ мы имеем только оценку $\Delta'_i \leq R(A, B_i) \leq \Delta''_i$, то исключаем на этом шаге из дальнейшего рассмотрения те изображения-эталоны B_{i_j} , для которых $R(B_i, B_{i_j}) \geq 2\Delta''_i$, $j = 1, \dots, l$. Содержательно это значит, что чем разнороднее эталоны в памяти, тем большими значениями r можно ограничиться при распознавании, то есть можно использовать для распознавания достаточно «грубые» эскизы.

Конечно, если изображений-эталонов в памяти всего несколько, то описанные в этом параграфе процедуры сокращения перебора мало скажутся на объеме вычислений. Однако если память содержит сотни и тысячи эталонов, то выигрыш может оказаться значительным.

4. О распознавании изображений, заданных с точностью до подобия

Изображения могут быть весьма схожими и даже тождественными по форме, но существенно разными по размерам. За счет этого расстояние между ними может оказаться большим. Изометрические преобразования не дают возможность «уравнивать» изображения по размерам. Сделать это, однако, можно, рассматривая класс преобразований более широкий, чем изометрические — преобразования подобия [4]–[6]. И хотя в этом случае есть свои особенности, в целом определения и построения предшествующих параграфов не слишком меняются при расширении на преобразования подобия.

Рассматриваем изображения A из точек a_1, \dots, a_n и B из точек

b_1, \dots, b_n . Взаимнооднозначным отображением ψ точке a_i ставится в соответствие точка b_i ($i = 1, \dots, n$). Изображение A считаем «неподвижным». Через B^p обозначаем множество всех изображений, получаемых из B преобразованиями поворота, параллельного переноса и изменения масштаба, то есть как бы усеченными преобразованиями подобия, без преобразования симметрии относительно прямой. Через $l(B')$ обозначаем наибольший из отрезков (a_i, b'_i) ($i = 1, \dots, n$), через $r_\psi(A, B)$ – минимум величин $l(B')$, полученных для всех B' из B^p . Аналогично трактуется $r_\psi(A, \bar{B})$, где \bar{B} – изображение, полученное из B преобразованием симметрии относительно прямой. Ясно, что $B^p \cup \bar{B}^p = B^*$ – множество всех изображений, получаемых из B преобразованиями подобия. Через $R_\psi(A, B)$ обозначаем меньшую из величин $r_\psi(A, B)$ и $r_\psi(A, \bar{B})$, через $R(A, B)$ – минимум величин $R_\psi(A, B)$, полученных при всех $n!$ возможных биекциях ψ . Изображение B_0 из B^* и биекция ψ_0 , на которых этот минимум достигается, называем искомыми, взаиморасположение A и B_0 – тоже искомым, величина $R(A, B)$ – расстояние между A и B .

Нетрудно видеть, что «неподвижность» изображения A содержательно означает «привязку» к A единицы измерения расстояний, то есть масштабной единицей может быть, например, какой-либо фиксированный отрезок между точками в A .

Утверждения из раздела 1, относящиеся к точкам ядра на ключевой окружности, сохраняют силу и в рассматриваемом случае, поскольку изометрические преобразования есть часть преобразований подобия.

Далее, как и ранее, рассматриваем три случая.

Первый случай. На ключевой окружности находятся две точки ядра. Для подобных преобразований, нетрудно видеть, этот случай невозможен.

Второй случай. Система (1) содержит семь уравнений и семь неизвестных. Однако теперь отрезки $(b_{i_1}^0 b_{i_2}^0)$, $(b_{i_1}^0 b_{i_3}^0)$ и $(b_{i_2}^0 b_{i_3}^0)$ получаются из отрезков $(b_{i_1} b_{i_2})$, $(b_{i_1} b_{i_3})$ и $(b_{i_2} b_{i_3})$ умножением на коэффициент подобия k , который есть, тем самым, дополнительное, восьмое неизвестное. Показано [4]–[6], что точки $b_{i_1}^0$, $b_{i_2}^0$, $b_{i_3}^0$ и O_L должны лежать на одной окружности. Если при этом точка O_L не совпадает ни с

одной из точек $b_{i_1}^0$, $b_{i_2}^0$, $b_{i_3}^0$, то из теоремы Птолемея возникает дополнительное, восьмое уравнение:

$$\pm(b_{i_1} b_{i_2})|z + R| \pm (b_{i_1} b_{i_3})|y + R| \pm (b_{i_2} b_{i_3})|x + R| = 0. \quad (2)$$

Если такое совпадение имеет место, то к системе (1) добавляем одно из уравнений (3), (4), (5) (условие совпадения):

$$x + R = 0, \quad (3)$$

$$y + R = 0, \quad (4)$$

$$z + R = 0. \quad (5)$$

Третий случай. На ключевой окружности находятся четыре и более точек ядра. Парные расстояния между точками на ключевой окружности известны и являются при заданных A и B (или \bar{B}) функциями от угла φ и коэффициента подобия k . Знание конкретных значений φ и k определяет конкретные изображения из B^* . Четыре точки на окружности образуют четыре треугольника, радиусы описанных окружностей которых могут быть представлены через их стороны. Приравниванием этих радиусов для двух пар треугольников получаем систему из двух уравнений, неизвестными в которой будут φ и k .

Вырожденный случай (совпадение двух точек c_i и c_j ядра) определяется необходимым условием: два соответствующих отрезка $(a_i a_j)$ и $(b_i^0 b_j^0)$ должны быть параллельны, однонаправлены и равны по длине. Это определяет угол φ , коэффициент k и в целом возможные расположения изображения B' относительно A .

Случаи второй, третий и вырожденный порождают, как и в разделе 1, множества изображений из B^* . Объединяя эти множества для всех возможных биекций ψ , получаем множество U .

Таким образом, несмотря на отсутствие первого случая и некоторые отличия для второго, третьего и вырожденного случаев, в основном решение для подобных преобразований повторяет решение для преобразований изометрических. Поэтому и переход к решению, исключающему $n!$ биекций, проводится так же, как и в разделе 1.

Смысл, как и ранее, состоит в том, чтобы вместо рассмотрения $n!$ биекций и фрагментов \tilde{a} и \tilde{b} в рамках каждой биекции, рассматривать фрагменты \tilde{a} и \tilde{b} отдельно, вне рамок заранее заданных биекций. Формируемое таким образом множество \tilde{U} изображений из B^* будет включать ранее обозначенное множество U как подмножество.

Искомое соответствие между точками изображений A и B_0 как и в разделе 1 определим тем, чтобы каждой точке из A (соответственно из B_0) ставились в соответствие все точки из B_0 (соответственно из A), находящиеся от нее на расстоянии, не большем $R(A, B)$.

Обозначим через R_0 расстояние $R(A, B)$, B_0 – искомое изображение. Рассматриваем эскизы A^{r_1} и B^{r_2} , и пусть преобразование, переводящее B в B_0 , переводит B^{r_2} в $B_0^{r_2^0}$.

Обозначим через $R_{r_1 r_2}$ расстояние $R(A^{r_1} B^{r_2})$ между эскизами A^{r_1} и B^{r_2} , и пусть $B_0^{r_2^0}$ – трансформированный эскиз B^{r_2} , искомым образом расположенный относительно A^{r_1} . Пусть преобразование, переводящее B^{r_2} в $B_0^{r_2^0}$, переводит B в B_{00} .

Теорема 6. Для расстояния R_0 между изображениями A и B справедлива следующая оценка:

$$(R_{r_1 r_2} - \max(r_1, r_2^0, r_2^{00})) \leq R_0 \leq (R_{r_1 r_2} + \max(r_1, r_2^0, r_2^{00})).$$

Доказывается теорема практически повторением доказательства теоремы 4. Однако в использовании теоремы есть трудности. Для изометрических преобразований величины r_2 , r_2^0 , r_2^{00} совпадали, что и давало возможность считать известным $r = \max(r_1, r_2^0, r_2^{00})$. Для преобразований подобия мы можем считать известными r_1 и r_2 , поскольку заданы эскизы A^{r_1} и B^{r_2} , и величину r_2^0 , поскольку считаем вычисленным $R_{r_1 r_2}$ и известным $B_0^{r_2^0}$. Величина же r_2^{00} неизвестна, поскольку изображение B_0 и эскиз $B_0^{r_2^0}$ не заданы.

Можно попытаться выйти из положения, взяв величину r_2 настолько маленькой, чтобы наибольшей из r_1 , r_2^0 , r_2^{00} была бы заведомо величина r_1 . Однако остается вопросом, насколько малой должна быть величина r_2 , чтобы это выполнялось.

Есть, однако, «вырожденный» случай, когда это условие заведомо выполняется – случай $r_2 = 0$. При этом, конечно, и $r_2^0 = 0$, $r_2^{00} = 0$. Однако это означает, что B^{r_2} совпадает с B и выигрыш, который дает использование эскизов, обеспечивается только эскизами изображения A , а вот на изображениях памяти B_1, \dots, B_k придется учитывать все точки. Показательно плохо и то, что перейти, например, к использованию изображений, бесконечных по числу точек (в памяти), в этом случае не удастся.

Однако каким-то образом неизвестная величина r_2^0 с известными A , B , B_{00} и r_2^{00} должна быть связана. Будем рассуждать следующим образом. Точки изображения B_{00} в целом находятся к точкам изображения A не ближе, чем точки изображения B_0 , то есть $l(B_{00}) \geq l(B_0) = R(A, B)$. Пусть b_x – произвольная точка в B_{00} . Ближайшая к b_x точка изображения A находится на расстоянии, не большем $(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$. Следовательно, две точки $b_{x'}$ и $b_{x''}$ из изображения B_{00} , расстояние между которыми наибольшее среди пар точек изображения B_{00} , находятся друг от друга на расстоянии, не большем $(a_{x'} a_{x''}) + 2(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$, где $(a_{x'} a_{x''})$ – наибольший по длине отрезок между парами точек в изображении A . Пусть $(b_{y'} b_{y''})$ – наибольший по длине отрезок между парами точек изображения B . Обозначим через k отношение $(a_{x'} a_{x''}) + 2(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$ к $(b_{y'} b_{y''})$. Содержательно это коэффициент подобия такой, что после преобразования B с этим коэффициентом (преобразованное B обозначим через \tilde{B}) наибольший отрезок в \tilde{B} будет равен по длине $(a_{x'} a_{x''}) + 2(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$. Этот отрезок обозначим через $(\tilde{b}_{y'} \tilde{b}_{y''})$. Если он соответствует отрезку $(a_{x'} a_{x''})$ в A , то порождаемый отрезками $(\tilde{b}_{y'} \tilde{b}_{y''})$ и $(a_{x'} a_{x''})$ отрезок $(c' c'')$ в характеристическом изображении имеет длину $2(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$. Следовательно, радиус ключевой окружности равен по меньшей мере $(R_{r_1 r_2} + r_2^{00})$. Если $(\tilde{b}_{y'} \tilde{b}_{y''})$ сопоставляется любому другому отрезку в A , то радиус ключевой окружности может от этого только увеличиться. Отсюда следует, что r_2^0 не может быть больше $r_2 \cdot k$. Поэтому в задаче о выборе малого r_2 достаточно выбрать величину r_2 настолько малой, чтобы $\max(r_1, r_2 \cdot k, r_2^{00}) = r_1$.

Список литературы

- [1] Глезер В.Д. Зрение и мышление. СПб.: Наука, 1993.
- [2] Козлов В.Н. О распознавании аффинно разных дискретных изображений // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 95–122.
- [3] Козлов В.Н. О зрительном образе, математических подходах к определению этого понятия и о распознавании изображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39. №11. С. 1919–1936.
- [4] Козлов В.Н. Об одной мере близости плоских изображений, инвариантной относительно подобия // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4. Вып. 1–2. С. 101–124.
- [5] Козлов В.Н. Способ оценки похожести изображений, основанный на преобразованиях подобия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №5. С. 800–812.
- [6] Kozlov V.N. Visual Pattern and Geometric Transformations of Images // Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. Vol. 10. №3. P. 321–342.

Автоматная сложность вычисления формул

А.А. Кудрин

Данная проблема относится к современному направлению теории управляющих систем и связана со сложностными оценками в теории автоматов [2]. В данной задаче продолжается изучение перечислительных свойств конечных автоматов. Подобные задачи возникают, когда входная информация считывается некоторым анализатором, вообще говоря, без запоминания и без возможности ее полного восстановления в дальнейшем, но при необходимости принятия решения этим анализатором. Простейшими примерами подобных анализаторов могут служить: функция подсчета скобочного баланса в компиляторе компьютерных программ (которые, как правило, имеют линейную относительно длины программы сложность и ограниченную возможность запоминания); анализаторы речи.

Общая формулировка задачи может быть описана следующим образом. Зафиксируем некоторое конечное множество F (называемое базисом) формул в операторной форме над множеством всех двуместных булевских операций. При этом в рамках данной задачи мы будем дополнительно считать, что заданная запись каждой формулы из базисного множества F предполагает не более чем однократное вхождение символа одной и той же переменной (так называемые неповторные формулы). Далее будем строить над этим множеством термы в смысле суперпозиции [1]. Однако, мы не будем предполагать в термах переменных, а только константы 0 и 1. Совокупность этих выражений обозначим через $\Phi(F)$, элементы этого множества (далее просто термы) и будут являться объектами наше-