[32] Поппер. Логика и рост научного знания. М., 1983.

[33] Поспелов Д.А. Прикладная семиотика и искусственный инте лект // Программные продукты и системы. 1996. №3. С. 10-1

[34] Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практ М.: Наука, 1986.

[35] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.

[36] Рассел Б. Человеческое познание. Киев: Ника-Центр Вист 1997.

[37] Солсо Р.Л. Когнитивная психология / Пер. с англ. М.: Трив 1996.

[38] Тарский Ф. Семантическая концепция истины и основания се мантики // Аналитическая философия: становление и развит М.: Дом интеллектуальной книги, Прогресс-традиция, 1998.

[39] Уайтхед. Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 199

[40] Фейс Г. Модальная логика. М.: Наука, 1974.

[41] Филлмер Г. Эволюционная теория познания. М.: Русский двор 1998.

[42] Фон Вригт. Логико-философские исследования. М.: Прогрес 1986.

[43] Целищев В.В. Логика существования. М.: Наука, 1976.

[44] Швырев В.С. Анализ научного познания. Основные направ ния.

[45] Швырев В.С. Опыт как факт научно-познавательной деяте ности. М., 1983.

[46] Энциклопедический словарь военной медицины / Е.И. Смирнов. М.: Медлитература, 1948. Т. 22.

Дискретная математика и математическая физика

В.А. Малышев

Дается неформальный обзор различных связей между дискретной математикой и современной математической физикой. Одна из целей – облегчить специалистам по дискретной математике знакомство с современной математической физикой. Статья представляет собой расширенный вариант доклада на семинаре «Теория автоматов» на механико-математическом факультете МГУ.

1. Введение

Философия современного физического метода использовалась уже Демокритом, Платоном и Аристотелем. Мир считался построенным из бесконечно делимых дискретных компонент по законам максимальной симметрии и порядка. Кульминацией этих взглядов в настоящее время является стандартная модель, имеющая поразительное согласие с экспериментом. В ней вещество строится из кварков-фермионов, а три типа сил – электромагнитные, слабые и сильные – переносятся глюонами-бозонами. Однако, именно сейчас, в пике таких воззрений, чувствуется настоятельная необходимость новых идей.

Четкого разграничения дискретной и «непрерывной» (континуальной) математики не существует. Обычно понимается, что непрерывная математика добавляет к дискретной предельный переход. Однако, при таком определении все алгебраические манипуляции относятся к дискретной математике. Это также неудовлетворительно, так как идея симметрии – основа применения алгебры в физике –

чужда информатике. Другая возможность – отнести к дискретно математике все, что касается конечных множеств. Но в то же врем и асимптотика (по числу элементов конечного множества) не чужд дискретной математике.

Континуальный объект можно различными способами получит из дискретного. Не говоря уже о том, что численные расчеты все гда основаны на дискретной аппроксимации, даже многие теорем удается доказать только благодаря искусному выбору дискретно аппроксимации. В квантовой теории поля все примеры начинаются с выбора дискретной аппроксимации, с дальнейшим (очень !) труд ным предельным переходом.

В то же время математика начиналась с дискретных объектов и иногда необходимо возвращаться к первоначалу. Например, что бы встать на твердую землю строгой математики. С другой сторо ны, дискретность не богата симметриями, и вся красота начинает проявляться только после предельных переходов. Свойства, не за висящие от вида дискретного приближения, называются в физике универсальностью – это один из видов дискретной симметрии, когда симметрия выявляется после предельного перехода. Предполагается, что в квантовой гравитации дискретные модели будут играть еще более важную роль, хотя, парадоксально, только те свойства таких моделей, которые в максимальной степени не зависят от дискретной конкретики.

В классической физике величины принимают значения из непре рывного множества и в принципе могут быть измерены с любой точ ностью. Мы хорошо представляем себе единицы длины l, времени и массы m. Все остальные единицы могут быть выражены через эти три. Выбор единицы измерения для физической единицы есть выбор шкалы $A \to sA$. Единицы $meter, sec, gr$ соответствуют нормальной для нас шкале.

Другая система единиц – где скорость света и постоянная Планка берутся безразмерными и равными $c = \frac{h}{2\pi} = 1$. В качестве третьей единицы берется MeV как единица энергии.

Помимо систем единиц в физике довольно много фундаменталь ных постоянных. Самые важные из них: скорость света $c = 3 \cdot$

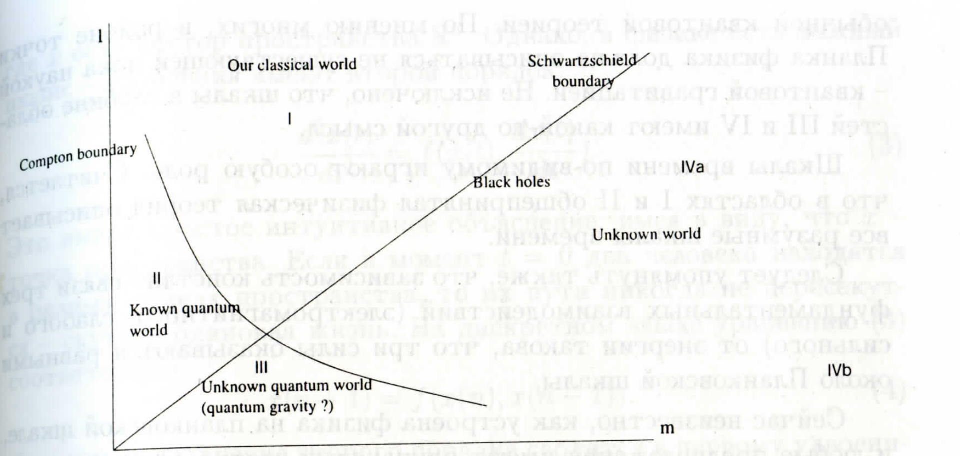

Рис. 1. Фазовая диаграмма теорий.

$10^9 meter \cdot sec^{-1}$; гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{gr \cdot sec^2}$, входящая в закон Ньютона

$$F = -Gmm' \frac{1}{r^2},$$

и постоянная Планка $\hbar = 10^{-34} sec^{-1} meter^2 kg$, входящая в соотношение неопределенностей.

На рисунке показаны две кривые в (m, l)-плоскости. Первая – граница Шварцшильда, определяемая сжатием массы m до радиуса Шварцшильда $l_S \approx \frac{Gm}{c^2}$. Около этой границы начинают играть роль эффекты общей теории относительности. Вторая линия отделяет классическую физику от квантовой: комптоновская длина $l_C \approx \frac{h}{mc}$ определяет границу, когда квантовые эффекты начинают играть роль для частицы массы m. Точка пересечения $l_S = l_C$ этих кривых определяет характерные величины

$$l_P = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \approx 10^{35} meter, m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 10^{-6} gr, t_P \approx 10^{-44} sec,$$

называемые длиной Планка, массой Планка и временем Планка. Область I заключает шкалы длины и массы, описываемые классической физикой. Область II соответствует шкалам, описываемым обычной квантовой теорией. По мнению многих, в районе точки Планка физика должна описываться не существующей пока наукой – квантовой гравитацией. Не исключено, что шкалы в глубине областей III и IV имеют какой-то другой смысл.

Шкалы времени по-видимому играют особую роль. Считается, что в областях I и II общепринятая физическая теория описывает все разумные шкалы времени.

Следует упомянуть также, что зависимость констант связи трех фундаментальных взаимодействий (электромагнитного, слабого и сильного) от энергии такова, что три силы оказываются равными около Планковской шкалы.

Сейчас неизвестно, как устроена физика на планковской шкале, и любые предположения имеют одинаковый статус. Одна из таких идей – общая идея о том, что на Планковских длинах физика может напоминать работу автомата в дискретном времени – высказывалась еще Фейнманом и Тоофтом, см. [23, 24]. Хотя эту идею нельзя воспринимать буквально, не исключено, что это знаменует включение дискретной математики в тот кипящий сплав математики и физики, который называется сейчас математической физикой.

2. Компьютеры и классическая физика

Идея детерминизма в классической физике идентична с компьютерным мышлением. Вплоть до 20 века физика основывалась на детерминизме. Природа выступает в виде компьютера (автомата без входа). Законы физики – программа, заложенная в этот компьютер. Функционирование автомата без входа описывается рекуррентным уравнением

$$x(n+1) = f(x(n)), n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Непрерывный аналог этого есть

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \tag{2}$$

где x есть вектор пространства $\mathbb{R}^d$. Однако, в физике есть важный нюанс – уравнения имеют второй порядок:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t), \frac{dx(t)}{dt}). \tag{3}$$

Это имеет простое интуитивное объяснение, имея в виду, что x – точка пространства. Если в момент $t = 0$ два человека находятся в разных точках пространства, то их пути никогда не пересекутся – скучная одинокая жизнь. На дискретном языке уравнению (3) соответствует

$$x(n+1) = f(x(n), x(n-1)). \tag{4}$$

Формально уравнение второго порядка сводится к первому удвоением числа переменных

$$q(t) = x(t), v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Однако, по не понятым пока причинам, именно этот второй порядок приводит к привычной сейчас квантовой механике через процедуру квантования.

2.1. Обратимость

Другая специфика физического «автомата» – обратимость во времени и гамильтоновость. В случае, когда

$$f(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) = f(x(t))$$

не зависит от производной, уравнение (3) инвариантно относительно преобразования $t \to -t$. Более того, уравнение переписывается в «гамильтоновом» виде

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

с гамильтонианом $H = \frac{p^2}{2m} + U$, если $f = -\text{grad}\, U$.

В дискретном случае из обратимости следует цикличность траекторий. Автомат называется эргодическим, если есть только одна траектория, то есть все состояния сообщаются между собой. Тогда за один цикл каждое состояние посещается по одному разу и, значит, равномерная мера μ на множестве состояний $\{\omega\}$ является инвариантной. Ее принято записывать в виде

$$\mu(\omega) = Z^{-1} \exp(-H(\omega)), Z = \sum_{\omega} \exp(-H(\omega)),$$

так как на множестве где $H = const$ это соответствует равномерной мере. Гиббсовская мера определяется той же формулой, но уже на множестве всех возможных значений H.

3. Вероятность и квантовость

В фундаментальных законах классической физики нет случайности. Вероятность возникает за счет нашего незнания начального состояния Вселенной, незнания времени от начала Мира и т.д. Предполагается, что то, чего мы не знаем, в некотором смысле типично. Точнее, детерминированная динамика такова, что ее инвариантная мера (то есть гиббсовская мера) обладает хорошими свойствами перемешивания. Гиббсовская мера характеризует типичное состояние системы в равновесном состоянии. Чтобы получить стохастическую динамику из детерминированной, надо делать дополнительные скейлинги.

Квантовая же физика до сих пор не имеет прочной и интуитивно приемлемой интерпретации, тем более философской основы. Проблема прежде всего в том, что в жизни мы мыслим как на языке детерминированных, так и случайных явлений, но не на квантовом языке. Первые трудности понимания квантовой теории связаны с новой логикой.

3.1. Логика

С классической физикой, так же как и с информатикой, связывается стандартная логика высказываний, булевы алгебры или алгебры

множеств. При этом каждому событию приписывается функция истинности, равная 1 или 0, в зависимости от того, произошло событие или нет. Случайность усложняет функцию истинности – теперь все значения между нулем и единицей возможны – оставляя дистрибутивность структуры. Получающаяся вероятностная мера на булевой алгебре определяет среднее – линейный функционал на алгебре случайных величин.

В квантовой логике меняется структура – вместо дистрибутивной булевой алгебры берется множество проекторов в гильбертовом пространстве, дедекиндова структура с ортодополнениями (не дистрибутивная). Высказывание (о событии в данный момент времени) соответствует проектору в гильбертовом пространстве. Связки «или», «и» разрешается применять только к парам событий, которые принадлежат одной булевой подалгебре.

Глобальной вероятностной меры больше нет, но есть глобальное среднее, называемое состоянием – линейный положительный нормированный функционал $<A>$ на алгебре операторов в гильбертовом пространстве. Однако, для интерпретации экспериментов (измерений в заданный момент времени) вероятностные меры имеются на каждой булевой подалгебре: любой булевой подалгебре $\mathcal{B}$ алгебры проекторов приписывается вероятностная мера $\mu(P) = |<P>|^2, P \in \mathcal{B}$. Следует сказать, что в квантовой физике есть и другой тип вероятностей, аналогичный классическим мерам Гиббса. Они возникают в квантовой статистической физике (в полной аналогии с классической) в виде матрицы плотности ρ, через которую выражается состояние

$$<A> = Tr(A\rho).$$

Одна из интерпретаций новой логики состоит в том, что измерение величины в данный момент времени влияет на измерение всех других в следующие моменты. Это наиболее естественно видно на примере квантовой механики с дискретным временем.

3.2. Механика с дискретным временем

В дискретном варианте квантования координата $x \in R$ и ее значение $f(x)$ в следующий момент не могут быть точно измерены одновременно.

Аналог классического лагранжиана

$$L=\sum_{n=0}^{N-1}F(x_n,x_{n+1}).$$

Вариация дает уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x_n}L=\frac{\partial}{\partial x_n}(F(x_{n-1},x_n)+F(x_n,x_{n+1}))=0.$$

Сопряженная величина (квазиимпульс) к x_n определяется как

$$p_n=-\frac{\partial}{\partial x_n}F(x_{n-1},x_n).$$

Примером может быть лагранжиан

$$F(x_n,x_{n+1})=\frac{1}{2}(W(x_n)+W(x_{n+1}))-\beta x_n x_{n+1}.$$

При $W(x)=\alpha x^2$ получается дискретный гармонический осциллят
Динамика снова задается унитарным оператором U с ядром

$$U(x,y)=\frac{\beta}{2\pi\bar{h}}\exp(i\bar{h}^{-1}F(x,y)).$$

Для оператора кординаты $\hat{x}$ в $L_2(R)$ легко получаются коммута
онные соотношения

$$[x_{n+1},x_n]=-\frac{i\bar{h}}{\beta},[p_n,x_n]=-i\bar{h},x_n=U^n x_0.$$

Интерпретация этого могла бы быть такой: измерение координат
в данный момент меняет ее распределение в прошлом и в будущ
К сожалению, такие перестановочные соотношения имеют
только для лагранжиана (5).

В непрерывном случае унитарная группа $U(t)=e^{itH}$ строит
ся по классической динамике процедурой квантования. Классиче
ским величинам $a(t)$ ставятся в соответствие операторы $A(t)=$

$0)U^*(t)$. То, что измеряется, соответствует собственным зна-
м этих операторов. Однако, грубо говоря, классической про-
ной $\dot{a}(t)$ соответствует не $\dot{A}(t)$, а другой оператор $B(t)$, с ком-
ционным соотношением

$$[A(t),B(t)]=c$$

стантой c, пропорциональной постоянной Планка. Примерами
т быть: координата x и импульс p с $[x,p]=i\hbar$, поле $\phi(x)$ и сопря-
ое к нему $\pi(x)$ с $[\phi(x),\pi(x')]=i\hbar\delta(x-x')$. Хотя $B(t)$ и является
чиной «в момент t», но ничто не мешает отнести ее к двум беско-
о близким моментам времени (именно здесь играет роль второй
док уравнений классической динамики). Это согласуется с ин-
ретацией для дискретного времени.

3.3. Наблюдатель и внешний мир

Необходимость изменения классической логики связана, помимо
го прочего, с логическими парадоксами. Рассмотрим парадокс
рии множеств касательно невозможности «множества всех мно-
ств». В классической физике, однако, считается само собой оче-
дным рассмотрение глобального замкнутого мира, включающего
себя как внешний мир, так и самого наблюдателя, то есть как
все возможные объекты и все их свойства. В квантовой же тео-
и процесс измерения отделяется от собственно процесса эволюции.
волюция внешнего мира описывается унитарной группой $U(t)$, что
ля матрицы плотности имеет вид

$$\rho(t)=U(t)\rho(0)U^*(t),$$

а акт проверки истинности некоторого высказывания – действием
соответствующего ему оператора проектирования P, см. [10]. По-
стулат редукции (фон Неймана–Людерса) состоит в том, что после
моментального измерения свойства P (в случае его истинности) в
момент t матрица плотности переходит в

$$\rho(t)\to\rho(t+0)=\rho_{red}(t)=Z^{-1}P(t)\rho(0)P(t),$$
$$Z=Tr(P(t)\rho(0)P(t)),P(t)=U^*(t)PU(t).$$

Постулируется также «марковское» свойство: после измерения люция забывает о том, что было до редукции, и в качестве начал матрицы плотности «после момента t» берется $\rho(t)$. Если P – про тор на вектор ϕ, это значит, что система переходит в состояние все начинается сначала.

С этим связан спор о том, является ли классическая физика делом квантовой или даже ее частным случаем. Несмотря на что квазиклассическая асимптотика дает определенную связь ду классической и квантовой физикой, есть разные точки зре см. [14].

Существуют модели, где мир и наблюдатель объединяются в ную систему, описываемую одной динамикой. При этом естеств появляется интуиционистская логика Брауэра и алгебра Гейти см. [13]. Для различения же наблюдателя и самой системы мож быть полезен язык теории категорий, см. [17] и [18].

При этом установившаяся логическая интерпретация существ только для событий в фиксированный момент времени. Обще нятого взгляда на то, как трактовать события в разные момен времени (например, как приписывать им вероятности), не сущест ет. Это центральный вопрос, связанный с поисками альтернатив пенгагенской интерпретации квантовой теории. Квантовая систе описываемая только унитарной эволюцией, называется замкнут Насколько в замкнутой системе можно ввести обычную вероятно ную трактовку, исследуется в подходе, называемом «согласованн истории» (consistent histories) [15, 16].

Заметим, что квантовый компьютер [49] есть просто квантов система с унитарной эволюцией и с двумя актами измерения: в пе вый (приготовление состояния) и в последний момент (измере результата).

4. Пространство, время – локальность, причинность

4.1. Клеточные автоматы

Единственными объектами физики до последнего времени были поля (частицу можно рассматривать как вырожденное δ-образное поле) на фиксированном классическом пространстве-времени. Пространство соответствует ячейкам памяти в компьютере, ленте в машине Тьюринга, клеткам клеточного автомата. Тогда поле соответствует биту информации в ячейке памяти. Физические законы инвариантны относительно сдвигов пространства, трансляционно инвариантны. Это соответствует однородности клеточного автомата, определенного на $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, кубе с центром в начале координат и со стороной длины $2N$. В каждой точке x определено поле $\sigma(x)$, принимающее конечное число значений, спин.

4.1.1. Квантование клеточного автомата

Если $f : S \to S$ – взаимно-однозначное отображение конечного или счетного множества S в себя, то в $l_2(S)$ ему соответствует перестановочная матрица U, определяемая равенством

$$(U\phi)(s) = \phi(f^{-1}s).$$

Преобразование U в гильбертовом пространстве $l_2(S)$ и считается квантованием детерминированного отображения f. Такая точка зрения пропагандировалась Нобелевским лауреатом Тоофтом ('t Hooft), см. [24, 25]. Необходимо подчеркнуть, что речь идет как-бы о квантовании системы «первого порядка».

Если f взаимно-однозначно, то существует матрица H такая, что

$$U_t = \exp(itH), U_1 = U.$$

Интересно, что в нецелые моменты времени U_t не определяет детерминированного отображения S в себя. Более того, H определена не однозначно, а лишь с точностью до умножения каждого собстве[нно]го значения на корень определенной степени (длины цикла) из единицы.

В общем случае, однородный клеточный автомат определяет[ся] отображением за один шаг $f: S^\Lambda \to S^\Lambda$, где $\Lambda = [-N,N]^d \subset \mathbb{Z}^d$, а динамика состоит в итерациях f^n этого отображения. Стохастический автомат определяется матрицей P переходных вероятност[ей] за один шаг $P(\sigma,\sigma'), \sigma,\sigma' \in S^\Lambda$. Квантовый автомат определяет[ся] унитарной матрицей W переходных амплитуд $W(\sigma,\sigma'), \sigma,\sigma' \in S^\Lambda$.

В квантовом случае состояние в момент t определяется комплексной функцией (волновой функцией) $\phi_t = \phi_t(\sigma), \sum_\sigma |\phi_t(\sigma)|^2 = 1$. При этом $\phi_t = W^t\phi_0$. В квантовом случае можно говорить о вероятности $p_t(\sigma) = |\phi_t(\sigma)|^2$ состояния σ в данный момент времени. Существует однако, сколько угодно случайных процессов, имеющих вероятности $p_t(\sigma)$ в качестве одномерных распределений, и нет естественного способа выбрать какой-либо из них как реально имеющий место.

Пусть $W_t(\sigma,\sigma')$ – матричные элементы матрицы W^t. Введем матрицы $Q_t = Q(W^t)$ с матричными элементами $Q_t(\sigma,\sigma') = |W_t(\sigma,\sigma')|^2$. Каждая из матриц $Q_t(\sigma,\sigma')$ двойная стохастическая, что следует из свойств

$$\sum_\eta W(\sigma,\eta)W^*(\rho,\eta) = \sum_\eta W^*(\eta,\sigma)W(\eta,\rho) = \delta_{\sigma\rho}$$

унитарных матриц. Однако, матрицы Q_t не образуют полугруппы.

Клеточный автомат называется локальным, если унитарные матрицы перехода имеют вид

$$W(\sigma,\sigma') = \prod_{x\in\Lambda} w(\sigma'_x|\sigma_y, y\in O(x)),$$
$$\sigma = (\sigma_x, x\in\Lambda), \sum_\sigma |w(\sigma|\sigma_y, y\in O(x))|^2 = 1,$$

где $O(x)$ – окрестность точки x.

Связь таких дискретных приближений с континуальными моделями дается двумя предельными переходами. Например, пусть $<.>^N$ – среднее некоторого поля Гиббса $\sigma(n)$ на $\mathbb{Z}^d_\varepsilon$. Тогда есть два фундаментальных предела для этих средних.

- Термодинамический предел на $\mathbb{Z}^d, \varepsilon = 1$:

$$\lim_{N\to\infty} <\sigma(n)>_N.$$

Возможно обобщение этого понятия для любых (фиксированных) бесконечных графов:

- Ультрафиолетовый предел

$$<\phi> = \lim_{\varepsilon\to 0} < \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon^d \phi(\varepsilon n)\sigma(n)>_N, \phi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

возможный только, если есть само предельное пространство, в данном случае $\mathbb{R}^d$.

4.2. Эволюция понятия пространства-времени

- У Аристотеля время глобально, абсолютно, часы везде идут одинаково. Время еще не связано с пространством. Событие происходит в некоторой точке (t,x) пространства-времени $T\times S$, где T – время, а S – пространство. Если ось времени есть $\mathbb{R}$, то прошлое невозвратимо, а будущее неотвратимо. Если ось времени есть окружность S^1, то время циклично. Дискретизация этих представлений отвечает современному компьютерному мышлению, где пространство – ячейки памяти, имеющие абсолютный смысл, то есть четко пронумерованные, время – детерминированное и определяется разворачиванием простейшей программы

$$n \to n+1.$$

Физические законы – более сложные программы, которые мы не знаем, но хотим восстановить. Для «нашего мира» $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ группа симметрии есть прямое произведение группы сдвигов на $\mathbb{R}$ и группы движений (сдвигов и вращений) $\mathbb{R}^3$. В информатике идея симметрии не получила развития, скорее размерность пространства играет роль – лента машины Тьюринга, топология жесткого диска и т.д.

- Пространство-время Галилея. Топология и гладкая структура здесь та же, но группа преобразований дополняется трехпараметрической группой преобразований Галилея

$$t' = t, x' = x + vt.$$

Время по-прежнему имеет абсолютный характер, но пространство теряет абсолютный смысл. Имеет смысл говорить о расстояниях между точками пространства (и даже о самих точках пространства) только при фиксированном времени. В информатике этому отвечает возможность перенумерации ячеек памяти по ходу времени. Более того, это означает переход к языкам более высокого уровня, где мы не заботимся о том, как ячейки занумерованы. Следует, однако, подчеркнуть различие. В информатике ячейки памяти реально существуют и есть язык низкого уровня, учитывающий нумерацию. В физике же нумерация (координатизация) мыслится как вспомогательное средство для удобства записи.

- Хотя в пространстве-времени Минковского событие по-прежнему есть точка $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, но понятия момента времени и точки пространства теряют абсолютный смысл. Группа преобразований Галилея заменяется на группу Лоренца, группу линейных преобразований $\mathbb{R}^4$, сохраняющих квадратичную форму

$$(s' - s)^2 = c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2.$$

Световой конус точки (t, x) определяется уравнением

$$c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 = 0$$

и состоит из полуконусов прошлого и будущего. Два события $(t, x), (t', x')$ могут быть либо времениподобны ($(s' - s)^2 > 0$), в этом случае событие (t', x') произошло раньше (t, x), если (t', x') лежит в конусе прошлого точки (t, x). Либо пространственноподобны ($(s'-s)^2 < 0$), в этом случае не имеет смысла говорить, какое из событий произошло раньше другого.

- Пространство Минковского одно и то же для всевозможных физических систем и служит вместилищем для вещества и ареной событий. Пространство-время Эйнштейна в общей теории относительности сохраняет от пространства-времени только факт наличия структуры четырехмерного гладкого локально лоренцева многообразия. Метрика и даже топология меняются в зависимости от наличия вещества. Говорить же о конкретном пространстве-времени разрешается только имея в виду и вещество в нем: не во всякое пространство-время можно положить любое вещество.

- Однако, самое существенное, что объединяет все перечисленные типы пространства-времени – существование единственного мира в прошлом и в будущем. Если рассмотреть все более поздние попытки изменить взгляды на пространство-время, то не видно никаких кардинальных перемен в понимании именно этого последнего свойства. Хотя, к таким кардинальным переменам ведет вся логика событий.

5. Симметрии и деформации

Идея симметрии в физике начинается с инвариантности относительно некоторой группы – группы симметрии. Так, частица в квантовой физике определяется как неприводимое представление группы симметрии. Помимо эстетической привлекательности, симметрия и механизмы ее нарушения оказались мощным средством для реализации основных требований к физической теории: предсказание спектра масс частиц, устранения расходимостей и аномалий, проблемы киральности (различения левого и правого). По первоначальной идее симметрия должна выбрать из континуума возможных теорий единственную. К сожалению, это пока далеко не достигнутая цель.

Различают глобальные (пространственно-временные и внутренние) и локальные (калибровочные) симметрии. Эту терминологию легко пояснить на следующем примере. Рассмотрим конфигурации на дискретном торе, то есть на квадрате $[-N, N]^2$ с отождествленными противоположными сторонами, со значениями в конечном множестве S, например $S = \{-1, 1\}$. Гамильтониан модели Изинга

$$H = \sum_{v,w} \sigma_v \sigma_w,$$

где сумма берется по всем ближайшим соседям, инвариантен относительно группы $[-N, N]^2 \times mathbbZ_4$ (пространственная инвариантность), то есть группы сдвигов и группы поворотов самого тора, и относительно одновременного умножения всех спинов на -1, то есть группы $\mathbb{Z}_2$ (внутренняя симметрия). Калибровочная модель имеет более широкое множество конфигураций: $\sigma_v \in \{-1, 1\}$ на вершинах и $\sigma_{vw} \in \{-1, 1\}$ на ребрах (между ближайшими соседями). Гамильтониан

$$H = \sum_{v,w} \sigma_v \sigma_{vw} \sigma_w,$$

где сумма берется по всем ближайшим соседям, инвариантен помимо того относительно действия элементов $s = \{s_v, v \in V\}$ калибровочной группы $\{-1, 1\}^V$, где V – множество вершин тора, действующей так

$$\sigma_v \to \sigma_v s_v, \sigma_w \to \sigma_w s_w, \sigma_{vw} \to \sigma_{vw} s_v s_w.$$

Дискретная симметрия беднее: одна из причин состоит в том, что непрерывную группу нельзя получить пределом дискретных групп. Хотя симметрия восстанавливается, если перейти от объектов к мерам на них. Так дискретные графы кажутся далекими от понятия симметрии. Однако, если рассматривать счетные случайные пуассоновские подмножества в евклидовом пространстве, то группа вращений и трансляций переводят их в себя, оставляя пуассоновскую меру инвариантной. С пуассоновским множеством можно связать граф, соединяя по некоторому правилу близкие точки. Таким образом, для соединения дискретных объектов с непрерывной симметрией необходима идея случайности.

Более того, чем более мы отходим от групп Ли, тем менее чуждым становится дискретный мир. Так, техника алгебр Ли имеет существенную дискретную компоненту – решетки, диаграммы.

Именно эта техника привела к нескольким существенным направлениям в расширении понятия симметрии: суперсимметрии, квантовым группам, бесконечномерным группам, двойственностям.

Суперсимметрия [50] основана на понятии градуировки линейного пространства, ассоциативной алгебры, алгебры Ли и т.д. Пусть $\mathcal{G}(q)$ – вещественная грассманова алгебра с q образующими $\xi_j, j = 1, ..., q$, и $\mathcal{G}_+, \mathcal{G}_-$ – ее четное и нечетное подпространства. Суперпространством $\mathcal{G}_{mn}(q)$ называется прямая сумма n экземпляров $\mathcal{G}_+$ и m экземпляров $\mathcal{G}_-$. Анализ на грассмановой алгебре имеет дело с функциями на $\mathcal{G}_{mn}(q)$ со значениями в $\mathcal{G}(q)$, алгебра этих функций имеет естественную градуировку. Если группы Ли, содержащие одновременно группу Пуанкаре и группу внутренней симметрии $SU(N)$, не имеют неприводимых представлений типа частиц, то можно подобрать супералгебры Ли, содержащие алгебры Ли обеих групп, и имеющие необходимые свойства неприводимых представлений. Кроме того, инвариантность относительно соответствующей супералгебры Ли дает возможность сокращения расходимостей удачным подбором суперсимметричной системы бозонных и фермионных полей.

5.1. Струны

Мы дадим сверхкраткое пояснение. Струна в $\mathbb{R}^d$ – пришелец из архаичной математической физики с ее линейными уравнениями в частных производных – обрела совершенно новое содержание. Классическая струна описывается волновыми уравнениями для функций $x_\mu(\sigma, \tau)$, где $\sigma \in [0, 1]$ параметризует точки струны, τ – собственное время струны, $\mu = 0, 1, ..., d$ нумерует координаты пространства-времени. Спектр квантовой струны (бесконечный дискретный) отождествляется с элементарными частицами. В плоскости (m^2, J), квадрат массы и спин (принимающий полуцелые значения), частицы в простейшем случае бозонной струны соответствуют точкам $(y + Ck, n), k, n = 0, 1, ...$ Связь струн с квантовой теорией поля и со стандартной моделью осуществляется интегрированием по всем частицам большой массы (заметим, что этот вывод чрезвычайно далек от строгости). Более того, на этом пути получается и действие Эйнштейна-Гильберта общей теории относительности.

Есть два фундаментальных нюанса, отличающих «новую» струну от «архаичной». Первый – инвариантность относительно алгебры Ли группы диффеоморфизмов [0,1] или ее минимального расширения – алгебры Вирасоро. Второй – суперсимметричные обобщения и другие видоизменения струны. Они позволяют подправлять спектр частиц и устранять аномалии и расходимости. Неожиданное ограничение $d+1=10$ (следующее из инвариантности относительно группы Лоренца или из отсутствия состояний с отрицательной нормой) устраняется компактификацией «лишних» 6 измерений до незаметных нам многообразий малого радиуса. Эти многообразия могут быть либо тором (или его фактором по конечной группе), либо многообразиями Калаби-Яо (последних очень много).

Ограничения на спектр и отсутствие аномалий определили 5 приемлемых теорий струн с континуумом возможных компактификаций. Объединение всех таких теорий – называемое сейчас M-теорией – может возникнуть из разного рода двойственностей между ними.

Двойственности выросли из известных ранее двойственностей (см. обзор по двойственностям в статистической физике [35]): первая из них аналогична преобразованию двойственности Крамерса-Ваннье (между высокотемпературной и низкотемпературной областями) для модели Изинга, вытекающее из преобразования Пуассона, где высокотемпературная система включает солитонный сектор низкотемпературной. Таким образом, для модели Изинга системы в некотором смысле эквивалентны при температурах β и β^*, если

$$\exp(-2\beta^*) = \operatorname{th}\beta.$$

Другие дуальности имеют геометрическую природу: электромагнитная двойственность имеет в своей основе двойственность Ходжа в дифференциальной геометрии, так называемая зеркальная симметрия основана на специальных преобразованиях многообразий Калаби-Яо. Количество двойственностей еще более растет (см. [33]), если вместе со струнами рассматриваются p-браны, то есть p-мерные обьекты, движущиеся в d-мерном пространстве. Струна соответствует случаю $p=1$, мембрана – $p=2$. Есть также другие взгляды на двойственность p-бран – некоммутативный (так называемая матричная теория [48]), где координаты – некоммутативные матрицы (см. также ниже), голографический принцип Тоофта и Сасскинда, F-теория с двумя временами и другие.

5.1.1. Дискретные струны

Дискретную струну можно определить [26] как квантование в смысле Тоофта простейшего клеточного автомата. Автомат состоит из клеток $i=1,...,N$, расположенных по окружности, с $2(d+1)$ числами $v_i^{\mu,R}, v_i^{\mu,L}, \mu=0,1,...,d$ в каждой, и клетки 0 с $d+1$ числами v_0^μ. Эволюция чрезвычайно проста

$$v_0^\mu(t+1) = v_0^\mu(t) + \frac{q}{N}, v_i^{\mu,R}(t+1) = v_{i-1}^{\mu,R}(t), v_i^{\mu,L}(t+1) = v_{i+1}^{\mu,L}(t),$$

где q – константа и i понимается по $\mathrm{mod}\,N$. Можно проверить (см. [26]), что квантование по Тоофту дает дискретное приближение простейшей бозонной струны. Возможно, это правильный путь для построения струнной теории поля (вторичного квантования теории струн), где струны могут склеиваться и распадаться. Однако, здесь необходимо учитывать изменение числа клеток, см. ниже. Отметим, что основная симметрия струнной теории – алгебра Вирасоро – в урезанном виде также появляется уже для дискретных струн.

5.2. Некоммутативные деформации

Помимо прямой дискретизации есть и другие подходы к приближению классического понятия пространства. Хотя дискретность обнаруживает себя и здесь как дискретность спектра соответствующих операторов.

Идея о некоммутативной деформации пространства, группы симметрии и квантовой теории поля на них была впервые реализована Снайдером [36, 37] и Янгом [38], см. также [39]. В последствии она получила грандиозное развитие в работах Конна и других, см. [40].

В идее Снайдера с дополнениями Янга вводятся операторы ($\partial_k = \frac{\partial}{\partial \xi_k}$)

$$X_k = ia(\xi_k\partial_\eta - \eta\partial_k), k=1,2,3; X_0 = iac^{-1}(\xi_0\partial_\eta + \eta\partial_0);$$

$$P_k = -ia(\xi_k\partial_\tau - \tau\partial_k); P_0 = -ia(\xi_0\partial_\tau + \tau\partial_0);$$

$$L_{kj} = i(\xi_k\partial_j - \xi_j\partial_k); M_k = i(\xi_k\partial_0 + \xi_0\partial_k); N = i(\eta\partial_\tau - \tau\partial_\eta)$$

координат и времени в $L_2(M^6)$, где M^6 – шестимерное простра ство Минковского с формой $-\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\eta^2+\tau^2$, a – парамет деформации, интерпретируемый как фундаментальная длина. Пр этом x_i и p_i имеют дискретный спектр $ma, m \in \mathbb{Z}$, бесконечно вы рожденный, а X_0, P_0 имеют непрерывный спектр. Перестановочн соотношения таковы

$$[X_k, X_j] = -iL_{kj}; [X_k, X_0] = iM_k; [P_k, P_j] = -iL_{kj}; [P_k, P_0] = -iM_k;$$

$$[X_k, P_j] = ia^2\delta_{kj}N; [X_0, P_0] = -iN; [X_k, P_0] = [P_k, X_0] = 0.$$

При этом все эти 15 операторов образуют алгебру Ли, включающу алгебру Лоренца, при этом спектр операторов координат инвариа тен относительно нее.

Другой пример связан с квантовыми группами и алгебрами Хо фа. Простейшая алгебра возникает при замене алгебры многочлен от двух коммутирующих переменных $xy = yx$ на плоскость Манина где они удовлетворяют соотношению $xy = qyx$. При $q = \exp(2\pi i\alpha)$ иррациональным α это пространство называется некоммутативны тором, а если q есть корень из единицы, то $x^n y^n = y^n x^n$ для неко торого n и получается тензорное произведение матричной алгебр и алгебры функций на $\mathbb{R}^2$. Эта алгебра также появлялась ранее в комбинаторике, см. [51].

Однако, программа перевода физики на алгебраический язык не увенчалась успехом. Тем не менее при введении дискретных струк тур естественно возникает и некоммутативность, см. [41, 42].

6. Дискретные локальные структуры

Локальность в физике (или понятие близости) связана двумя типами дискретных аппроксимаций: дискретность во времени (пр чинность) и в пространстве (топология), которые имеют разные це ли. Сейчас мы рассмотрим дискретную аппроксимацию простран ства. Дискретность времени интересна только с точки зрения проце дуры квантования (см. выше). Ниже мы рассмотрим также случай,

когда нет четкого понятия времени, и проводится дискретизация всего пространства-времени.

В информатике есть только две размерности. Одномерные объекты соответствуют словам, грамматикам. Программы манипулируют только с одномерными объектами. На предварительном этапе программирования многомерных задач часто используются графы и их разные обобщения. Но потом все равно осуществляется переход к цепочкам символов.

В физике же иерархия значительно богаче. Кроме топологической размерности пространство имеет и другие структуры, такие как гладкость, метрика, топология, размерность. Интересно однако, что изучение этих структур фактически проводится сведением сначала к графам, а затем к манипуляциям со словами, см. ниже. Но сначала посмотрим, почему графов достаточно для описания многомерных объектов и как многие топологические понятия сводятся к графам, снабженным локальной структурой. Основным понятием, связывающим дискретную математику и математическую физику, является понятие графа с локальной структурой.

Определение 1. Локальная структура на графе G задается прежде всего набором множеств $L(\gamma)$ для каждого подграфа γ радиуса не больше d. Локальная структура на графе G есть функция $s(\gamma)$ на множестве всех подграфов γ графа G радиуса не больше d, при этом $s(\gamma) \in L(\gamma)$.

Заметим, что $L(\gamma)$ могут быть пустыми для большинства подграфов γ. Примеры:

- калибровочные поля на графах: каждой вершине и каждому ребру относится значение из группы $\mathbb{R}$. Иначе говоря, $L(\gamma)$ непусты только для вершин и ребер и при этом $L(\gamma) = \mathbb{R}$;
- симплициальный комплекс: каждому полному регулярному подграфу γ радиуса 1 сопоставляется 1, если любое подмножество его вершин определяет симплекс соответствующей размерности, и 0 – в противном случае. Здесь $L(\gamma) = \{0, 1\}$ для полных регулярных подграфов радиуса 1 и пусто в остальных случаях.

6.1. Грамматики в классической математике

Здесь мы приведем аргументы, показывающие важность введенного понятия графа с локальной структурой. Речь идет о большом количестве примеров следующей схемы классификации в математике: классический объект → графы с локальной структурой → упрощение локальной структуры → одномерная грамматика → инвариант. При этом самый трудный момент обычно – переход от многомерной грамматики к одномерной. Мы приведем только три примера.

Первым примером является гомотопическая топология. Классический объект здесь – само топологическое пространство. Если оно является CW-комплексом, то в размерностях 1,2,3 Hauptvermutung гласит, что они гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны, то есть могут быть получены одно из другого с помощью специальных подстановок в графах с локальной структурой. Отсюда можно получить много одномерных грамматик. Простейшая из них – абелевы группы гомологий, подстановки – определяющие соотношения. Получение инвариантов – частный случай проблемы тождества слов – здесь тривиально. Есть более сложные грамматики – кольца гомологий и т.д.

Второй пример – проблема изотопии узлов, которая сводится к плоским графам с локальной структурой, где подстановки – движения Радемахера. Грамматики снова многочисленны – алгебры полиномов, квантовые группы.

Третья группа примеров – дифференциальная и кусочно-линейная топология.

6.2. Случайные и квантовые локальные структуры

В квантовой теории поля пространство и его структуры являются фиксированными, и только поля являются случайными или квантовыми. Напротив, в квантовой гравитации структуры пространства и само пространство становятся квантовыми. Начинается с того, что метрический тензор g_{ij} рассматривается как дополнительное поле. Однако, в этом случае ультрафиолетовый предел не существует

из-за слишком сингулярного поведения метрики на малых расстояниях. Такое сингулярное поведение может привести к изменению самой топологии на малых масштабах. Поэтому требуется определение динамики на графах с локальной структурой, где меняется не только функция на графе, но и сам граф.

Это сделано в серии работ автора довольно простым и естественным способом. Стохастизация и квантование грамматики состоит в расширении понятия подстановки – разрешаются линейные комбинации подстановок, см. [4].

Случайное слово есть выпуклая комбинация обычных слов, а квантовое слово есть произвольная линейная комбинация слов (с произвольными комплексными коэффициентами). Поэтому случайная эволюция слов определяется линейным стохастическим оператором в выпуклом конусе, а квантовая эволюция – линейным унитарным оператором в гильбертовом пространстве. Таким образом, при квантовании грамматики расширяется предложение Тоофта о квантовании отображения множества в себя. Квантуется более общий объект – недетерминированный автомат, где для каждого состояния может быть несколько возможных переходов. Именно, каждой подстановке $\alpha \to \beta$ и ей обратной ставится в соответствие матрица $E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha}$ в гильбертовом пространстве $l_2(S^*)$. Сумма таких матриц является самосопряженным гамильтонианом, генератором унитарной группы.

Заметим, что случайные грамматики и локальные структуры на графах включают в себя ветвящиеся процессы, фракталы и процессы с локальным взаимодействием, см. [2].

6.2.1. Случайные графы

В классической теории случайных графов [46] граф фактически статичен во времени, все графы с одинаковым числом вершин N равновероятны. Даже в такой постановке многие понятия могут иметь физическую интерпретацию. Случайная динамика во времени, где в каждый момент прибавляются или отнимаются ребра или вершины, вводилась как в физических [47] так и в математических работах [2].

6.2.2. Квантовая топология

Термин «квантовая топология» часто понимается весьма ши ко в рамках общего алгебраического подхода, в котором все су кодируется в некоторой всеохватывающей алгебре, а некоторые личины трактуются потом как разумные аналоги геометричес и топологических понятий. Такова точка зрения некоммутатив геометрии, см. [40].

В абстрактном аспекте случайная и квантовая динамика на м жестве всех топологий $\tau(X)$ на множестве X вводилась в [12] и [1 соответственно. Если, например, множество X конечно, то элемента ми $\tau(X)$ являются всевозможные системы подмножеств множеств X, замкнутые относительно объединений и пересечений. Динами состоит в прибавлении (отнятии) из множеств и взятии далее мини мально возможной системы с (без) этим новым множеством. Здес нет понятия локальности в смысле локальной системы на графе, скорее это аналог динамики среднего поля. В этом направлении сл дует отметить существование двух тенденций в изобретательств физических теорий: сохранение локальности и поиск максимальн симметрии (инвариантность относительно более широких групп ав томорфизмов, переход к динамике инвариантов).

6.2.3. Макроразмерность

Есть несколько способов получения классических многообра из дискретных приближений: симплициальная аппроксимация, не вы конечных или счетных покрытий, введенные П.С. Александро вым, структуры. Последний метод имеет тесную связь с некоммут тивными алгебрами.

Рассмотрим некоторую конечную или счетную систему откр тых множеств на некотором пространстве. Назовем две точки экв валентными, если они не разделяются никаким открытым множ ством. Пусть X – множество всех классов эквивалентности (разб ений). Отождествляя точки разбиения, мы получим конечное счетное множество с индуцированной топологией на нем. Это д нехаусдорфову топологию на конечном множестве X, T_0-топологи

X превращается в частично-упорядоченное множество (диаграмму Хассе): $x < y$, если $U(x) \subset U(y)$, где $U(x)$ – пересечение всех открытых множеств, содержащих x. Рассматривая естественные покрытия евклидова пространства, можно придать этому порядку естественный интуитивный смысл: точки, находящиеся вверху структуры (ранга 0), соответствуют максимальной размерности, точки следующего уровня (ранга 1) – границе коразмерности 1 и т.д. Таким образом, если нет такого z, что $x < z < y$, то x «принадлежит» границе y на единицу меньшей размерности.

Убывающие системы таких разбиений определяют проективную систему $P_i, i = 1, 2 \ldots$ конечных или счетных T_0-пространств

$$\pi_{ij} : P_j \to P_i, \pi_{ik} = \pi_{ij}\pi_{jk}, i < j < k.$$

Такие пространства соответствуют аппроксимативно конечным C^*-алгебрам. И обратно, каждой аппроксимативно конечной C^*-алгебре отвечает T_0-пространство, ее спектр – множество всех примитивных идеалов. См. [41, 42].

Заметим, что в информатике дискретные топологии возникают в связи с распознаванием образов.

Однако, есть другой способ восстанавливать пространство даже по одному дискретному объекту. Мы продемонстрируем его на примере понятия размерности.

Граф можно рассматривать как топологическое пространство с микроскопической и макроскопической точек зрения. С микроскопической точки зрения граф является 1-мерным комплексом. Граф можно рассматривать в качестве одномерного остова многомерного симплициального комплекса, определенного с помощью локальной структуры. Мы покажем теперь богатое разнообразие возможных теорий макроразмерности бесконечного графа, начиная с самого грубого определения.

Скейлинговая макроразмерность. Положим

$$D_n(x) = \frac{\ln |O_n(x)|}{\ln n}, \overline{D}(x) = \lim\sup_{n\to\infty} D_n(x), \underline{D}(x) = \lim\inf_{n\to\infty} D_n(x).$$

Если $\overline{D}_S = \underline{D}_S = D_S$, то D_S называется скейлинговой макроразмерностью G. Например, деревья могут иметь любую макроразмерность, но бинарное дерево имеет $D_S=\infty$. Однако, однородные решетки L в $\mathbb{R}^d$ имеют $D_S(L)=d$. В [29] доказано, что D_S является инвариантом относительно марковской динамики со случайными подстановками на графе с локальной структурой.

Макроразмерность Хаусдорфа. Рассмотрим теперь бесконечный граф G, некоторое $\delta>0$ и вершину x. Пусть $O_N(x)=O_N$ – N-окрестность x. Положим

$$\mathcal{H}(G,\delta,s) = \liminf_{N\to\infty}\inf_{\{A_i\}}\sum_i d_i^s,\quad \mathcal{H}(G,s)=\inf_\delta \mathcal{H}(G,\delta,s),$$

где inf берется по всем покрытиям $\{A_i\}$ окрестности O_N множествами A_i с диаметрами $d_i=\operatorname{diam}(A_i)$, не превосходящими δN. Тогда $\mathcal{H}(G,\delta,t)\leqslant \delta^{t-s}\mathcal{H}(G,\delta,s)$ при $t\geqslant s$. Тогда существует единственное $s_0=\dim_H(G)$ (называемое макроразмерностью Хаусдорфа G) такое, что $\mathcal{H}(G,s)=0$ при $s<s_0$ и $\mathcal{H}(G,s)=\infty$ при $s>s_0$.

Энтропийная макроразмерность. Пусть $N_\delta(O_N)$ – наименьшее число множеств диаметра не более δN, покрывающих O_N. Положим

$$N_\delta = \liminf_{N\to\infty} N_\delta(O(N)), \dim_E G = \lim_{\delta\to0}\left(-\frac{\log N_\delta}{\log\delta}\right).$$

Если предел существует, то $\dim_E G$ называется энтропийной макроразмерностью графа G. Легко показать, что $\dim_H(\mathbb{Z}^d)=\dim_E G=d$. Можно доказать также, что $\dim_H(G)$ и $\dim_E G$ не зависят от выбора x.

Индуктивная макроразмерность. Определим макроразмерность последовательности G_k конечных графов. Положим

$$\underline{D}_{n,k} = \inf_x \frac{\ln|U_n(x,G_k)|}{\ln n},\quad \overline{D}_{n,k}=\sup_x\frac{\ln|U_n(x,G_k)|}{\ln n}.$$

Если $\lim \underline{D}_{n,k} = \lim\overline{D}_{n,k} = D$ для всех последовательностей (k,n) с $\frac{n}{k}\to 0$, то D называется скейлинговой макроразмерностью последовательности G_k. Аналогично определяются другие макроразмерности последовательности G_k.

Последовательность G_k имеет (малую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\mathrm{sin}\,d}(\{G_k\})=0$, если число точек в G_k ограничено. Последовательность G_k имеет (малую) индуктивную макроразмерность $\leqslant k, k\geqslant 1$, если для любой последовательности $N(k)$, $\frac{N(k)}{k}\to 0, N(k)\to\infty$, и для всех $x_k\in G_k$, будет $\dim_{\mathrm{sin}\,d}(\{\partial O_{N(k)}(x_k)\})\leqslant k-1$. Скажем, что последовательность G_k имеет $\dim_{\mathrm{sin}\,d}(\{G_k\})=d$, если $\dim_{\mathrm{sin}\,d}(\{G_k\})\leqslant d$ но $\dim_{\mathrm{sin}\,d}(\{G_k\})\leqslant d-1$ не имеет места. Таким образом, $\dim_{\mathrm{sin}\,d}$ может принимать только неотрицательные целые значения.

Будем говорить, что граф G имеет (большую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\mathrm{lind}}(G)=0$, если число точек в G конечно. Граф G имеет (большую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\mathrm{lind}}(G)\leqslant d$, если для любого $\varepsilon>0$, любых подмножеств $V_1,V_2\subset V(G)$, $d(V_1,V_2)\geqslant \varepsilon N$ его можно разделить подмножеством W с $\dim_{\mathrm{lind}}(G(W))\leqslant d-1$, где $G(W)$ – регулярный подграф G, имеющий множество вершин W. Точнее это значит, что $V(G)\setminus W$ является объединением двух подмножеств W_1,W_2 таких, что $V_1\subset W_1, V_2\subset W_2$, причем между W_1 и W_2 нет ребер.

6.3. Анализ на графах

Имея дискретную аппроксимацию топологии, надо иметь еще дискретный анализ с достаточно богатой структурой. Есть несколько независимых направлений, где развиваются разные аспекты анализа на фиксированном графе.

В серии работ [43] строится исчисление дифференциальных форм и тензорных полей на графах, основываясь на общей конструкции дифференциальной алгебры над произвольной ассоциативной алгеброй, см. [41]. Более простой подход в частном случае кубической решетки для построения аналога дифференциальных форм был ранее предложен в [35].

В [45] изучается спектр и теория рассеяния для оператора Шредингера на графе вместе с введением общих понятий симплектиче-ской механики. См. также [44]. Мы увидим далее, что этот анало-должен быть расширен с включением операций подстановок в гра-фах с локальной структурой, определение подстановок см. в [29].

6.3.1. Перечислительная комбинаторика

В более конкретных задачах постоянство размерности просто постулируется: примером может быть дискретная квантовая гра-витация. Эта область богата тонкими вычислениями. Центральный результат здесь асимптотика числа триангуляций сферы (числа карт) – был получен Тутте в комбинаторике вне всякой связи с фи-зикой еще в 1960-е годы. Он и изобрел здесь метод производящих функций – единственный сейчас строгий метод. Позднее в физике был развит другой, по-видимому не менее мощный метод – метод случайных матриц, давший новые результаты. При этом, однако доказательства не вполне строгие. Обзор и библиографию см. в [3].

6.4. Причинные множества

Наиболее общим отражением самой идеи пространства-време является понятие причинного множества [5]. Как легко понять, одна-ко, оно также вкладывается в понятие локальной структуры на гра-фе. Причинное множество – не более чем счетное локально-конечн частично-упорядоченное множество M, где отношение порядка $x \leqslant$ y интерпретируется как «x произошло раньше y». Локальная конеч-ность означает, что для любых $x < y$ существует лишь конечное число z таких, что $x \leqslant z \leqslant y$. С причинным множеством можно свя-зать направленный граф $G = G(M)$: между x и $y, x < y$, проводится ребро (стрелка направлена в будущее), если не существует z такого, что $x < z < y$. Наоборот, каждому направленному графу G соот-ветствует причинное множество $M = M(G)$. Обычно исключают возможность машины времени, то есть циклов в графе G.

Типичный пример: счетное подмножество локально-лоренцева многообразия, например, полученное выбором пуассоновского то-чечного подмножества. При этом $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда

y лежит в конусе будущего x.

Конкретные модели причинных множеств – как классические [6], так и квантовые [7] – напоминают модели классической теории случайных графов.

7. Дальнейшее чтение

Большинство статей за последние 7–10 лет можно найти на сайте http://xxx.lanl.gov/ в разделах «Физика высоких энергий – теория» (hep-th) и «Общая Относительность и Квантовая Космология» (gr-qc). Они концентрируются соответственно вокруг двух основных подходов к квантовой гравитации: теории струн и петлевой гравитации, существенно различающихся своей философией и вкусами. Если первая отталкивается от стандартной модели, то вторая имеет дело в основном с непосредственным квантованием уравнений Эйнштейна, причем дискретные приближения играют особенно важную роль.

Обзоры: библиографический обзор [20], краткие вводные обзоры по струнам [34] и М-теории [33], обзор по петлевой гравитации [22].

К сожалению, творческое чтение этих обзоров требует существенного знания физики. Хорошее введение в геометрические методы современной физики см. [18], элементы квантовой механики можно найти во многих доступных книгах, например [27], где существенное внимание уделяется основаниям и интерпретации, элементарное введение в математическую статистическую физику см. [28], в квантовую теорию поля нет элементарного введения, см. [30], математически строгие куски теории струн (см. [31]) в основном связаны с алгеброй, см. например [32].

Список литературы

[1] Малышев В.А. Случайные грамматики // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. 2. С. 107–134.

[2] Малышев В.А. Случайные графы и грамматики на графах // Дискретная математика. 1998. Вып. 3. С. 247–262.

[3] Малышев В.А. Вероятность вокруг квантовой гравитации // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. Вып. 4. С. 3–46.

[4] Malyshev V. Quantum Grammars // J. Math. Physics. 2000. V. 41. No. 7.

[5] Reid D. Introduction to causal sets: an alternate view of space-time structure. Preprint. 1999. gr-qc/9909075.

[6] Rideout D., Sorkin R. A classical sequential growth dynamics for causal sets. Preprint. 1999. gr-qc/9904062.

[7] Criscuolo A., Waelbroeck H. Causal sets dynamics: a toy model. Preprint. 1998. gr-qc/9811088.

[8] Evako A.V. Dimension on discrete spaces. Preprint. 1994. gr-qc/9402035.

[9] Jaroszkiewicz G., Norton K. Principles of Discrete Time Mechanics: I. Particle Systems. Preprint. 1997. hep-th/9703079.

[10] Penrose R. The Emperor's New Mind. London: Oxford Univ. Press, 1989.

[11] Isham C.J. Quantum topology and quantization on the lattice of topologies // Class. Quant. Gravity. 1989. V. 6. P. 1509–1534.

[12] Larson R., Andima S. J Math. 1975. V. 5. 177.

[13] Markopoulou F. The internal description of a causal set: What the universe looks like from the inside // Comm. Math. Phys. 2000. V. 211. P. 559–583.

[14] Rovelli C. Relational quantum mechanics // Int. J. of Theor. Physics. 1996. V. 35. 1637.

[15] Griffiths R. Consistent Quantum Realism: a reply to Bassi and Ghirardi. Preprint. 2000. quant-ph/0001093.

[16] Isham C.J. Quantum logic and the Histories Approach to Quantum Theory // J. Math. Phys. 1994. V. 23. P. 2157–2185.

[17] Isham C.J. Some possible roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity. Preprint. 1999. gr-qc/9910005.

[18] Baez J., Muniain J. Gauge Fields, Knots and Gravity // World Scientific. 1994.

[19] Baez J. An Introduction to n-categories. Preprint. 1997. q-alg/9705009.

[20] Gibbs Ph. The Small Scale Structure of Space-Time: A Bibliographical Review. Preprint. 1995. hep-th/9506171.

[21] Wallace D. The Quantization of Gravity – an introduction. Preprint. 2000. gr-qc/0004005.

[22] Rovelli C. Strings, loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity. Preprint. 1998. gr-qc/9803024.

[23] Feynman R. Int. J. Theor. Physics. 1982. V. 21. 467.

[24] t Hooft G. Quantization of discrete deterministic theories by Hilbert space extension // Nuclear Physics B342. 1990. P. 471–485.

[25] t Hooft G. Determinism and Dissipation in Quantum Gravity. Preprint. 2000. hep-th/0003005.

[26] Russo J. Discrete Strings and Deterministic Cellular Strings. Preprint. 1993. hep-th/9304003.

[27] Bohm D. Quantum Theory. Prentice-Hall, Eglewood Cliffs, NJ, 1966.

[28] Малышев В. Элементарное введение в физику бесконечночастичных систем. Дубна.

[29] Малышев В. Макроразмерность – инвариант локальной динамики // Теория вероятностей и примен. 2000. Вып. 2.

[30] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984.

[31] Грин М., Шварц Дж., Виттен Е. Теория суперструн. М.: Мир, 1990.

[32] Kac V.G., Raina A.K. Bombey Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras // Advanced Series in Mathematical Physics. World Scientific. 1987. Vol. 2.

[33] Duff M. A Layman's Guide to M-theory. Preprint. 1998. hep-th/9805177.

[34] Antoniadis I., Ovarlez G. An introduction to perturbative and non-perturbative string theory. Preprint. 1999. hep-th/9906108.

[35] Малышев В., Петрова Е. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей // Итоги науки. ВИНИТИ. Сер. Теория вероятностей. 1981. С. 3–51.

[36] Snyder H.S. Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. 71. P. 38–41.

[37] Snyder H.S. The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. 72. P. 68.

[38] Young C. Phys. Review. 1947. V. 72. P. 874.

[39] Tanaka S. Space-Time Quantization and Nonlocal Field Theory. Preprint. 2000. hep-th/0002001.

[40] Connes A. A short survey of noncommutative geometry. Preprint. 2000. hep-th/0003006.

[41] Landi G. An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry. Preprint. 1997. hep-th/9701078.

[42] Landi G., Lizzi F. Projective Systems of Noncommutative Lattices as a Pregeometric Substratum. Preprint. 1998. math-ph/9810011.

[43] Dimakis A., Muller-Hoissen F. Discrete Riemannian Geometry. Preprint. 1998. gr-qc/9808023.

[44] Requardt M. Spectral Analysis and Operator Theory. Preprint. 2000. math-ph/0001026.

[45] Novikov S.P. Schrodinger Operators on Graphs and Symplectic Geometry. Preprint. 2000. math-ph/0004013.

[46] Bollobas B. Random Graphs. New York: Academic Press, 1985.

[47] Antonsen F. Random Graphs as a Model of Pregeometry // Int. Journ. of Theor. Physics. 1994. V. 33. No. 6. P. 1189–1205.

[48] Banks T., Fischler W., Shenker S., Susskind L. M-theory as a Matrix Model: a conjecture // Phys. Rev. D55. 1997. P. 5112–5128.

[49] Aharonov D. Quantum Computation. Preprint. 1998. quant-ph/9812037.

[50] Cornwell J. Group theory in physics. London: Acad. Press, 1989. V. 3.

[51] Umbral calculus and Hopf algebras / Ed. Morris. Providence, 1982.

Часть 2.

Специальные вопросы теории интеллектуальных систем