[6] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: изд-во МГУ, 1989.

[7] Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интелекта. М.: Мир, 1991.

Фундаментальное множество циклов ориентированного мультиграфа

В.Л. Ческис

В работе описано фундаментальное множество циклов ориентированного мультиграфа, приведен асимптотически оптимальный алгоритм его построения.

Введение

В ряде задач возникает необходимость проанализировать все простые циклы ориентированного мультиграфа (в дальнейшем для краткости будем использовать термин орграф), количество которых, вообще говоря, растет экспоненциально с ростом числа вершин, однако в ряде случаев достаточно проанализировать лишь фундаментальное множество циклов (ФМЦ) этого графа [2, с. 143–147], содержащее не более $m - n + p$ циклов (p – число компонент связности, n – количество вершин, m – ребер).

Для неориентированного графа ФМЦ строится достаточно просто [1, с. 382–385], однако в силу накладываемых ориентацией ограничений на циклы орграфа, подобный подход не дает для него желаемого результата.

В данной работе приведен алгоритм, который позволяет строить ФМЦ орграфа за время, эквивалентное соответствующему алгоритму для неориентированных графов (раздел 2). Разделы 3 и 4 содержат доказательства фундаментальности и независимости полученного множества циклов соответственно.

1. Основные определения и обозначения.

Определение 1.1. Орграфом G будем называть тройку $(V,\mathcal{E},E)$, где V – множество вершин G, $\mathcal{E}$ – множество ребер, причем $\mathcal{E} \cap V = \emptyset$, $E : \mathcal{E} \to V \times V$.

Пусть $E(\alpha) = AB$, где $\alpha \in \mathcal{E}$, $A, B \in V$, обозначим через $E^-(\alpha)$ вершину A – начало ребра α, а через $E^+(\alpha) = B$ – конец α.

Введём следующие обозначения и сокращения (не определяемые в тексте понятия взяты из [2] и [3]):

- VS – множество вершин графа S,
- $\mathcal{E}S$ – множество ребер графа S,
- путь $\overrightarrow{AB}$ (иногда стрелка будет опускаться) – простой маршрут с началом в A и концом в B $(A, B \in V)$,
- ССК – сильно связная компонента,
- ФМЦ – фундаментальное множество циклов,
- $\tilde{G}$ – граф, обратный к G: $\tilde{G} = (V,\mathcal{E},\tilde{E})$, где $\tilde{E}(\alpha) = AB \Leftrightarrow E(\alpha) = BA$,
- G_u – соответствующий G неориентированный граф (граф, получающийся из G заменой ориентированных ребер на неориентированные),
- $G(V')$ – подграф G, индуцированный на множестве вершин $V' \subseteq V$:
$$G(V') = (V', \mathcal{E}', E|_{\mathcal{E}'}),$$
где
$$\mathcal{E}' = \{\alpha \in \mathcal{E} | E(\alpha) \in V' \times V'\},$$
- d^* – список вершин маршрута d (при $d = e_1 \dots e_l$, где $e_i \in \mathcal{E}$, $E(e_i) = A_iA_{i+1}$, $d^* = A_1 \dots A_{l+1}$.
- $\oplus$ – операция симметрической разности множеств.

Далее для корректности применения теоретико-множественной операции $\oplus$ пути будут рассматриваться как множества ребер.

Пусть C – множество всех простых циклов орграфа $G = (V,\mathcal{E},E)$.

Определение 1.2. $F \subseteq C$ – фундаментальное множество циклов (ФМЦ) графа G, если оно:

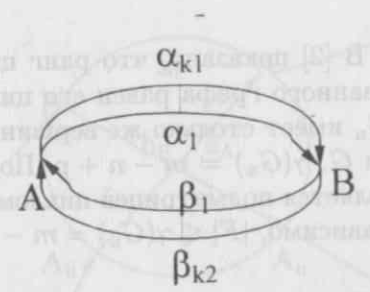

Рис. 1.

1) фундаментально: $C \subseteq \, <F>_\oplus$, то есть для любого $c \in C$ найдутся $c_1 \dots c_k \in F$ такие, что $c = \bigoplus_{i=1}^k c_i$;
2) линейно независимо: не существует $c_1 \dots c_k \in F$ таких, что $\bigoplus_{i=1}^k c_i = \emptyset$, и все c_i пропарно различны.

Замечание. Отметим, что любой орграф имеет фундаментальное множество циклов (пустое для ациклического графа), причем в общем случае оно не единственно.

Пример 1.1. Пусть $V = \{A_1, A_2\}$, $\mathcal{E} = \{\alpha_i, \beta_j | i \in \overline{1,k_1}, j \in \overline{1,k_2}\}$, где $k_1 \geqslant 2$ и $k_2 \geqslant 2$, $E(\alpha_i) = A_1A_2$, $E(\beta_j) = A_2A_1$ (рис. 1), тогда $C = \{\alpha_i\beta_j | i \in \overline{1,k_1}, j \in \overline{1,k_2}\}$.

Положим $F = \{\alpha_1\beta_j\}_{j=1}^{k_2} \cup \{\alpha_i\beta_1\}_{i=1}^{k_1}$, тогда

1) Любой цикл $\alpha_i\beta_j \in C$ можно представить в виде
$$\alpha_i\beta_j = \alpha_1\beta_j \oplus \alpha_1\beta_1 \oplus \alpha_i\beta_1.$$
2) Пусть $c_1 \oplus \dots \oplus c_k = \emptyset$, $c_i \in F$, все c_i различны. Так как $k \geqslant 2$ $(c_i \neq \emptyset)$, найдётся $i_0 \in \overline{1,k} : c_{i_0} \neq \alpha_1\beta_1$, пусть $c_{i_0} = \alpha_1\beta_j$, где $j \neq 1$ (для $\alpha_i\beta_1, i \neq 1$ – аналогично). Поскольку ни один цикл $c \in F \setminus \{c_{i_0}\}$ не содерит ребра β_j, получим противоречие.

Итак, F – ФМЦ G, причем $|C| = k_1k_2$, $|F| = k_1 + k_2 - 1 = (k_1 + k_2) - 2 + 1$.

Легко доказать следующий факт:

Утверждение 1.1. *Пусть F – ФМЦ орграфа $G = (V,\mathcal{E},E)$, где $|V| = n$, $|\mathcal{E}| = m$, p – число компонент связности G_u, тогда $|F| \leqslant m - n + p$.*

Доказательство. В [2] показано, что ранг цикломатической матрицы неориентированного графа равен его цикломатическому числу γ, а поскольку G_u имеет столько же вершин, ребер и компонент связности, сколько и G, $\gamma(G_u) = m - n + p$. Поскольку цикломатическая матрица G является подматрицей цикломатической матрицы G_u, F – линейно независимо, $|F| \leqslant \gamma(G_u) = m - n + p$.

2. Построение ФМЦ орграфа

Пусть $V = \{A_1, \ldots, A_n\}$.

Обозначим через $G_k = G(V_k)$ подграф G, индуцированный на множестве вершин V_k, где

$$V_k = \{A_1, \ldots, A_k\}.$$

Последовательно для $k = 1, \ldots, n$ построим FS_k – ФМЦ G_k.

1) Для $k = 1$. Положим $FS_1 = \{\alpha \in \mathcal{E} | E(\alpha) = A_1A_1\}$ $S_1 = G_1$ – единственная ССК G_1.
2) Пусть ранее построены $FS_1, \ldots, FS_{k-1}$ $(k \in \overline{2, n})$, а также $S_1, \ldots, S_q$ – ССК-покрытие G_{k-1} $(S_i = (VS_i, \mathcal{E}S_i, E|_{\mathcal{E}S_i}))$, $\{\mathcal{E}_{ij}\}_{i \neq j=1}^{q}$, где

$$\mathcal{E}_{ij} = \{\alpha \in \mathcal{E} | E^-(\alpha) \in VS_i, E^+(\alpha) \in VS_j\}.$$

а) Построение вспомогательного графа $\mathcal{R}$.
Положим $S_0 = (VS_0, \mathcal{E}S_0, E|_{\mathcal{E}S_0})$, где

$$VS_0 = \{A_k\}, \mathcal{E}S_0 = \{\alpha \in \mathcal{E} | E(\alpha) = A_kA_k\};$$

$$\mathcal{E}_{0i} = \{\alpha \in \mathcal{E} | E^-(\alpha) = A_k, E^+(\alpha) \in VS_i\},$$

$$\mathcal{E}_{i0} = \{\alpha \in \mathcal{E} | E^-(\alpha) \in VS_i, E^+(\alpha) = A_k\} \quad \text{для } i \in \overline{1, q}.$$

Для любых i, j таких, что $0 \leqslant i$, $j \leqslant q$, $i \neq j$ и $\mathcal{E}_{ij} \neq \emptyset$ выберем некоторое $\alpha_{ij} \in \mathcal{E}_{ij}$.
Пусть $\mathcal{R} = (V\mathcal{R}, \mathcal{E}\mathcal{R}, E\mathcal{R})$, где $V\mathcal{R} = \{s_0, s_1, \ldots, s_q\}$

$$\mathcal{E}\mathcal{R} = \{\alpha_{ij} | \mathcal{E}_{ij} \neq \emptyset\}, \quad E\mathcal{R}(\alpha_{ij}) = s_is_j.$$

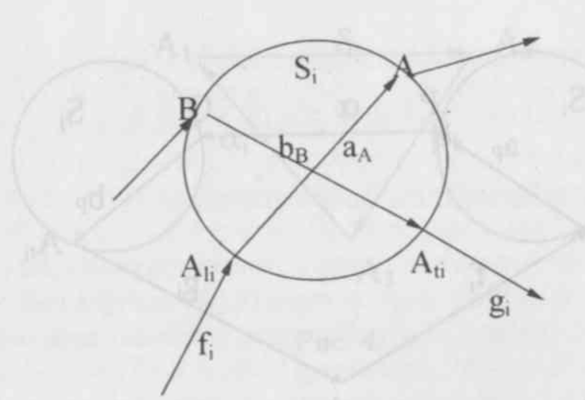

Рис. 2.

б) Построение остовных деревьев в $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$.
Построим T_1 – остовное дерево в $\mathcal{R}$ с корнем в s_0, T_2 – остовное дерево в $\tilde{\mathcal{R}}$ с корнем в s_0, положим $T = VT_1 \cap VT_2$, где VT_i – вершины T_i. Заметим, что T – множество вершин некоторой ССК $\mathcal{R}$, все $s_i \in T$ войдут в новую ССК G_k. Ребро $\alpha \in \mathcal{E}_{ij}$, где $s_i, s_j \in T$, будем называть *выходом из* s_i и *входом в* s_j.

в) Выделение $\{f_i'\}$ и $\{g_i'\}$.
Для каждой $s_i \in T$ положим f_i' – путь s_0s_i в T_2, g_i' – путь s_is_0 в $\tilde{T_2}$. α_i^* – последнее ребро f_i' и β_i^* – первое ребро g_i' будем называть *главным входом* в S_i и *главным выходом* из S_i соответственно, пусть $A_{l_i} = E^+(\alpha_i^*)$, $A_{t_i} = E^-(\beta_i^*)$.

г) Построение остовных деревьев компонент.
Для каждой $s_i \in T$ построим T_1^i – остовное дерево в S_i с корнем в A_{l_i}. Для всех $A \in VS_i$, являющихся началом выхода из s_i, сохраним a_A – путь $A_{l_i}A$, лежащий в T_1^i. Для тех же s_i построим $\tilde{T_2^i}$ – остовное дерево в $\tilde{S_i}$ с корнем в A_{t_i} так, чтобы в него вошли все ребра из a_{l_i}. Для всех $B \in VS_i$, являющихся концами входов в S_i, сохраним b_B – путь BA_{t_i}, лежащий в $\tilde{T_2^i}$ (рис. 2), при этом имеем $a_{A_{l_i}} = b_{A_{t_i}} = \emptyset$, $a_{A_{t_i}} = b_{A_{l_i}}$.

д) Выделение $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ – *главных путей* компонент.

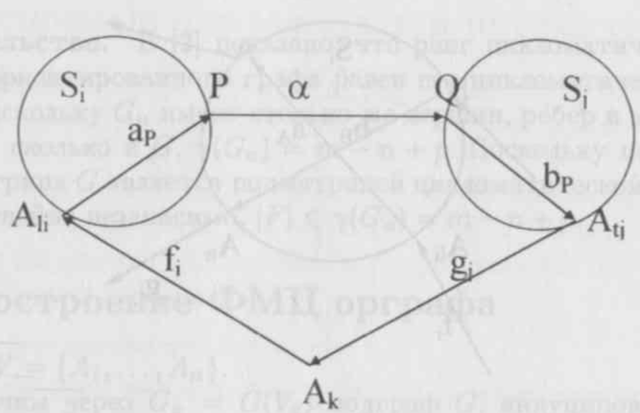

Рис. 3.

Для каждой $s_i \in T$ построим f_i – главный путь из A_k в S_i и g_i – главный путь из S_i в A_k:

Пусть $f_i' = \alpha_{01} \ldots \alpha_{ri}$ (для избежания двойных индексов), тогда A_{l_j} – конец $\alpha_{i-1,j}$, (так как T_1 – дерево $f_j' = \alpha_{01} \cdots \alpha_{j-1,j}$). Начало ребра $\alpha_{j-1,j}$ обозначим через P_{j-1}. Определим $f_i = \alpha_{01} a_{p_1} \alpha_{12} a_{p_2} \ldots \alpha_{r_i}$. Аналогично для $g_i' = \alpha_{ir+1} \ldots \alpha_{p0}$ положим $g_i = \alpha_{ir+1} b_{Q_{j+1}} \cdots b_{Q_p} \alpha_{p_0}$, где Q_{j+1} – конец ребра $\alpha_{j,j+1}$. При этом по построению f_i – путь $A_k A_{l_i}$, g_i – путь $A_{t_i} A_k$ и выполняется:

2.1. $f_i^* \cap VS_i = A_{l_i}$, $g_i^* \cap VS_i = A_{t_i}$.

2.2. Если $f_i^* \cap VS_j \neq \emptyset$, то $f_j \subset f_i$. Если $g_i^* \cap VS_j \neq \emptyset$, то $g_j \subset g_i$.

2.3. $\forall d_1, d_2 \in \{f_i\}_{s_i \in T} \cup \{g_i\}_{s_i \in T}$, если для некоторых α – выхода из S_i, β – входа в S_i, $s_i \in T$, $d_i = a_i \beta b_i \alpha a_i'$, то $b_1 = b_2$.

е) Построение FS_k.

Каждому ребру $\alpha \in \mathcal{E}_{ij}$ для некоторых i, j таких, что $s_i, s_j \in T$, сопоставим простой цикл c_α: Пусть $E(\alpha) = PQ$, $P \in VS_i$, $Q \in VS_j$. Положим

$$c_\alpha = f_i a_P \alpha b_Q g_j$$

(рис. 3). Положим

$$FS_k = FS_{k-1} \cup \mathcal{E}S_0 \cup \{c_\alpha | \alpha \in \mathcal{E}_{ij}, s_i, s_j \in T\}.$$

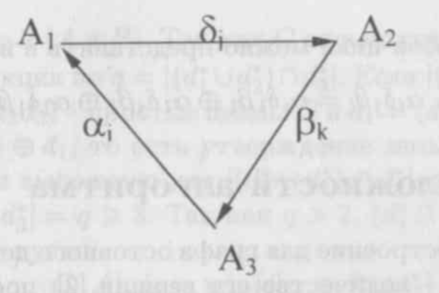

Рис. 4.

ж) Построение ССК-покрытия G_k.

Пусть (может быть после перенумерации S_i) $s_1, \ldots, s_r \notin T$, $s_0, s_{r+1}, \ldots, s_q \in T$. Положим $VS = \bigcup_{i=r+1}^{q} VS_i \bigcup VS_0$, $S'_{r+1} = G(VS)$. Легко показать, что $S_1, \ldots, S_r, S'_{r+1}$ – ССК-покрытие G_k. Положим

$$\mathcal{E}_{ir+1} = \bigcup_{i=r+1}^{q} \mathcal{E}_{ij} \bigcup \mathcal{E}_{i0}, \quad \mathcal{E}_{r+1,i} = \bigcup_{i=r+1}^{q} \mathcal{E}_{ji} \bigcup \mathcal{E}_{0i}$$

и перейдем к п. 2 для G_{k+1}.

В итоге получим $FS_n = FS$ – ФМЦ G (доказательство фундаментальности приведено в п. 3, независимости – в п. 4).

Пример 2.1. (рис. 4). Пусть $V = \{A_1, A_2, A_3\}$,

$$\mathcal{E} = \{\alpha_i, \delta_j, \beta_l | i \in \overline{1, k_0}, j \in \overline{1, k_1}, l \in \overline{1, k_2}\},$$

где k_0, k_1, и k_2 больше или равны 2, $E(\alpha_i) = A_3A_1$, $E(\beta_l) = A_2A_3$, $E(\delta_j) = A_1A_2$.

Для G имеем $FS_1 = FS_2 = \emptyset$, $S_i = (\{A_i\}, \emptyset, \emptyset)$, $i = 1, 2$, – ССК-покрытие G_2. Выбрав $\alpha_{01} = \alpha_1$, $\alpha_{12} = \delta_1$, $\alpha_{23} = \beta_1$, получим $s_0, s_1, s_2 \in T$, $f_1' = \alpha_1$, $f_2' = \alpha_1\delta_1$, $g_1' = \delta_1\beta_1$, $g_2' = \beta_1$. В данном примере $f_i = f_i'$, $g_i = g_i'$ для $i = 1, 2$. Далее $c_{\alpha_i} = \alpha_i\delta_1\beta_1$ (конечно, $f_0 = g_0 = \emptyset$), $c_{\beta_l} = \alpha_1\delta_1\beta_l$, $c_{\delta_j} = \alpha_1\delta_j\beta_1$. Легко показать, что $FS = \{c_{\alpha_i}, c_{\beta_l}, c_{\delta_j} | i \in \overline{1, k_0}, j \in \overline{1, k_1}, l \in \overline{1, k_2}\}$ является ФМЦ G.

В частности, любой цикл можно представить в виде

$$\alpha_i\delta_j\beta_l = \alpha_i\delta_1\beta_1 \oplus \alpha_1\delta_j\beta_1 \oplus \alpha_1\delta_1\beta_l.$$

Оценка сложности алгоритма

Поскольку построение для графа остовного дерева требует $O(n^2)$ операций, где n – количество его вершин [2], построение остовных деревьев в $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ требует $O(q^2)$ операций, остовных деревьев компонент – $O(\sum |VS_i|^2) = O(k^2)$ (так как $\sum |VS_i|^2 \leqslant (\sum |VS_i|)^2 \leqslant k^2$), построение FS_k – $O(L_k)$, где L_k – суммарная длина циклов из $F_k \setminus F_{k-1}$, графа $\mathcal{R}$ – $O(\delta_k)$, где δ_k – количество ребер графа G_k, инцидентных вершине A_k, выделение главных путей – $O(q)$, построение ССК-покрытия G_k – также $O(q)$. Таким образом, k-й шаг алгоритма требует не более $O(L_k) + O(n^2)$ операций, все n шагов требуют $O(L) + O(n \cdot n^2)$ операций, где $L = \sum_{k=1}^n L_k = O(mn)$ (в силу утверждения 2.1 $|F| = O(m)$, так как все циклы простые, длина каждого не превосходит n).

Таким образом, сложность алгоритма есть $O((m+n^2)n)$, что соответствует сложности алгоритма построения ФМЦ неориентированного графа в [1] (там $O(n^3)$ в предположении $m = O(n^2)$).

Поскольку время просмотра всех циклов ФМЦ $O(L) = O(mn)$ в общем случае не менее $O(n^3)$, приведенный алгоритм можно считать близким к оптимальному, кроме того, структура FS позволяет хранить в одном экземпляре (а по возможности и исследовать один раз) участки, входящие в разные циклы (f_i, g_i, a_A, b_B).

3. Фундаментальность FS

Лемма 3.1. *Пусть G – сильно связный орграф, A, B – вершины G, d_1, d_2 – пути AB. Тогда существуют $c_1, \ldots, c_k$ – простые циклы графа G такие, что $d_1 = \bigoplus_{i=1}^k c_k \oplus d_2$, $d_2 = \bigoplus_{i=1}^k c_k \oplus d_1$ (В случае $d_1 = d_2$, положим $k = 0$).*

Доказательство. Пусть $d_1^* = (AA_1 \ldots A_{l_1}B)$, $d_2^* = (AB_1 \ldots B_{l_2}B)$. Индукция по $p = |d_1^* \cap d_2^*|$.

1. Если $|d_1^* \cap d_2^*| = 2$ (A и B). Так как G сильно связен, существует d_3 – путь $\overrightarrow{BA}$. Индукция по $q = |(d_1^* \cup d_2^*) \cap d_3^*|$. Если $|(d_1^* \cup d_2^*) \cap d_3^*| = 2$ (A и B), то $(d_1 d_3), (d_2 d_3)$ – простые циклы G и $d_1 = (d_1 d_3) \oplus (d_2 d_3) \oplus d_2$, $d_2 = (d_1 d_3) \oplus (d_2 d_3) \oplus d_1$, то есть утверждение леммы верно. Пусть утверждение леммы выполнено для $|(d_1^* \cup d_2^*) \cap d_3^*| = q - 1$, докажем его для $|(d_1^* \cup d_2^*) \cap d_3^*| = q \geqslant 3$. Так как $q > 2$, $(d_1^* \cap d_3^*) \setminus \{A, B\}$ или $(d_2^* \cap d_3^*) \setminus \{A, B\}$ не пусто.

Пусть $d_3^* = (BC_1 \ldots C_{l_3}A)$, $i_0 = \min\{i | c_i \in d_1^* \cup d_2^*\}$. Пусть $C_{i_0} \in d_2^*$, так как $d_1^* \cap d_2^* = \{A, B\}$, $C_{i_0} \notin d_1^*$. Пусть $C_{i_0} = B_{j_0}$, $d_{21} = \overrightarrow{AB_{j_0}}$ такой путь, что $d_{21} \subset d_2$, $d_{22} = d_2 \setminus d_{21}$, то есть $d_{21}^* = (AB_1 \ldots B_{j_0})$, $d_{31} = \overrightarrow{BB_{j_0}}$ такой, что $d_{31} \subset d_3$, тогда $d_1 d_{31}$ и d_{21} – непересекающиеся пути AB_{j_0}, причем для $d_{32} = d_3 \setminus d_{31} = \overrightarrow{B_{j_0}A}$ $|(d_1 d_{31})^* \cup d_{21}^*) \cap d_{32}^*| \leqslant q - 1$, то есть по предположению индукции найдутся $c_1 \ldots c_{k-1}$ – простые циклы G такие, что $d_{21} = \bigoplus_{i=1}^{k-1} c_i \oplus d_1 d_{31}$. Наконец, так как $d_{31} d_{22}$ – простой цикл, $d_2 = d_{21} d_{22} = \bigoplus_{i=1}^{k-1} c_1 \oplus d_1 d_{31} \oplus d_{22} = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{k-1} c_1 \oplus d_{31} d_{22}}_{\bigoplus_{i=1}^{k} c_i} \oplus d_1$, таким образом, по индукции при $|d_1^* \cap d_2^*| = 2$ лемма доказана.

2. Шаг индукции. Пусть лемма доказана для $|d_1^* \cap d_2^*| = p - 1$, докажем ее для $|d_1^* \cap d_2^*| = p$. Так как $p > 2$, $(d_1^* \cap d_2^*) \setminus \{A, B\} \neq \emptyset$. Пусть $i_0 = \min\{i | A_i \in d_2^*\}$, $A_{i_0} = B_{j_0}$, $i_0 \leqslant l_1$, $j_0 \leqslant l_2$. Пусть $d_1 = d_{11} d_{12}$, $d_2 = d_{21} d_{22}$, где $d_{11}^* = AA_1 \ldots A_{i_0}$, $d_{12}^* = A_{i_0} A_{i_0+1} \ldots B$, $d_{21}^* = AB_1 \ldots B_{i_0}$, $d_{22}^* = B_{i_0} \ldots B_{l_2} B$. Так как d_{11}, d_{21} – пути $\overrightarrow{AA_{i_0}}$, то $d_{11} \cap d_{21} = \{A_1 A_{i_0}\}$, по основанию индукции $\exists s \in \mathbb{N}$, $c_1 \ldots c_s$ – простые циклы такие, что $d_{11} = d_{21} \oplus \bigoplus_{i=1}^4 c_i$, кроме того d_{12}, d_{22} – пути $\overrightarrow{A_{i_0}B}$, причем $|d_{11}^* \cap d_{22}^*| < p$, таким образом, по предположению индукции $\exists k \in \mathbb{N}$, $c_{s+1} \ldots c_k$ – простые циклы G такие, что $d_{12} = \bigoplus_{i=s+1}^k c_i \oplus d_{22}$, таким образом, $d_1 = d_{11} d_{12} = \bigoplus_{i=1}^k c_i \oplus d_{21} \oplus d_{22} = \bigoplus_{i=1}^k c_i \oplus d_2$, что эквивалентно $d_2 = \bigoplus_{i=1}^k c_i \oplus d_1$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть G – сильно связный орграф, A, B, C – вершины G, d_1,d_2 – пути AB и BC соответственно, тогда существуют $c_1, \ldots, c_k$ – простые циклы G такие, что $d_1 \oplus d_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^k c_i = d_3$ – путь AC (В случае $d_3 = d_1 d_2$ – путь, положим $k = 0$).*

Доказательство. Пусть $d_1^* = (AA_1 \ldots A_{l_1}B)$, $d_2^* = (BB_1 \ldots B_{l_2}C)$.

Индукция по $r = |d_1^* \cap d_2^*|$. Если $|d_1^* \cap d_2^*| = 1$, то $d_1 d_2$ – путь и утверждение леммы верно.

Пусть лемма верна при $|d_1^* \cap d_2^*| \leqslant r-1$, тогда, так как $r \geqslant 2$, $(d_1^* \cap d_2^*) \setminus \{B\} \neq \emptyset$. Пусть $j_0 = \min(j | B_j \in d_1^*)$, $B_{j_0} = A_{i_0}$. Пусть $d_1 = d_{11} d_{12}$, $d_2 = d_{21} d_{22}$, где $d_{11}^* = AA_1 \ldots A_{i_0}$, $d_{12}^* = A_{i_0} \ldots B$, $d_{21}^* = B_{j_0} \ldots C$, $d_{22}^* = BB_1 \ldots B_{j_0}$. Тогда, так как $|d_{11}^* \cap d_{21}^*| \leqslant r$, d_{11}, d_{21} – пути $\overrightarrow{AA_{i_0}}$ и $\overrightarrow{A_{i_0}C}$, по предположению индукции найдутся $c_1 \ldots c_{k-1}$ – простые циклы G такие, что $d_{11} \oplus d_{21} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} c_i = d_3$ – путь $\overrightarrow{AC}$, но тогда, так как $d_{11} d_{22}$ – простой цикл, $d_1 \oplus d_2 \oplus d_{12} d_{22} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} c_i = d_{11} \oplus d_{21} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} c_i = d_3$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $G = (V, \mathcal{E}, E)$ – сильно связный орграф, A, B, C – вершины G, d_1, d_2 – пути AC и BC соответственно. Тогда существуют $c_1, \ldots, c_k$ – простые циклы G такие, что $d_1 \oplus d_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} c_i = d_3$, где d_3 – некоторый путь BA.*

Доказательство. Так как G – сильно связный орграф, существует d_3 – путь $\overrightarrow{BA}$, тогда по лемме 3.2 найдутся $c_1 \ldots c_s$ – простые циклы, такие что $d_3 \oplus d_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} c_i = d_4$, где d_4 – некоторый путь $\overrightarrow{AC}$. По Лемме 3.1 имеем $d_4 = d_2 \oplus \bigoplus_{i=s+1}^{k} c_i$, то есть $d_3 \oplus d_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} c_i = d_4 = d_2 \oplus \bigoplus_{i=s+1}^{k} c_i$, откуда $d_3 = d_1 \oplus d_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} c_i$. Лемма доказана.

Пусть C – множество простых циклов орграфа G, FS построено в соответствии с приведённым в разделе 2 алгоритмом.

Теорема 3.1. *(о фундаментальности FS).*

$$C \subseteq \langle FS \rangle_{\oplus}.$$

Доказательство. Для любого простого цикла c индукцией по максимальному номеру входящей в него вершины докажем, что $c \subseteq \langle FS \rangle_{\oplus}$.

База индукции. Если $\max\{i | A_i \in c^*\} = 1$, то c – петля при вершине A_1, $c \in FS$ по построению.

Шаг индукции. Пусть $c \in \langle FS \rangle_{\oplus}$ при $\max\{i | A_i \in c^*\} < k$. Докажем это для любого c, для которого $\max\{i | A_i \in c^*\} = k$. Если c – петля при вершине A_k, $c \in FS_k \subseteq FS$ по построению.

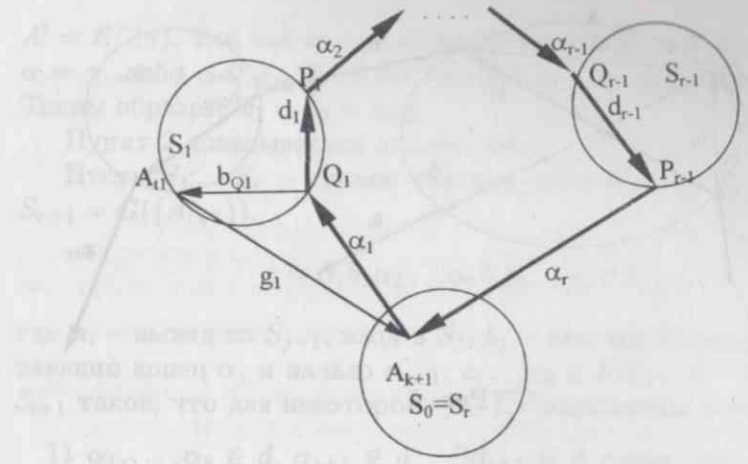

Рис. 5.

В противном случае, при подходящей нумерации S_i – ССК G_{k-1} $c = \alpha_1 d_1 \ldots \alpha_{r-1} d_{r-1} \alpha_r$ (рис. 5), где $r \in \overline{2,k}$, α_i – некоторый выход из S_{i-1} и вход в S_i (полагаем $S_r = S_0 = G(\{A_k\})$, d_i – путь $Q_i P_i$, лежащий в S_i, где Q_i – конец α_i, P_i – начало α_{i+1}.

1. Так как α_1 – выход из S_0 (очевидно, что $S_1, \ldots, S_{r-1}$ связаны с A_k), $c_1 = \alpha_1 b_{Q_1} g_1 \in FS_k$ по построению, то есть $\alpha_1 b_{Q_1} g_1 \in \langle FS \rangle_{\oplus}$.

2. Пусть доказано, что $c_i = \alpha_1 \ldots \alpha_i b_{Q_i} g_i \in \langle FS \rangle_{\oplus}$, где $i \in \overline{1, r-1}$. Покажем, что $c_{i+1} = \alpha_1 \ldots \alpha_i d_i \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} \in \langle FS \rangle_{\oplus}$ (при $i+1 = r$ полагаем $b_{Q_{i+1}} = g_{i+1} = \emptyset$).

По построению циклы $f_i a_{A_{l_i}} g_i$, $f_i a_{p_i} \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} \in FS_k$. По лемме 3.3 существует h_1 – путь $Q_i A_{l_i}$ такой, что $h_1 = b_{Q_i} \oplus a_{A_{l_i}} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} c'_j$. По лемме 3.2 существует h_2 – путь $Q_i P_i$ такой, что $h_2 = h_1 \oplus a_{p_i} \oplus \bigoplus_{j=s+1}^{l} c'_j$, где $c'_j, j \in \overline{1,l}$ – простые циклы S_i, по предположению индукции $c'_j \in \langle FS \rangle_{\oplus}$ (рис. 6). Тогда

$$c_i \oplus f_i a_{A_{l_i}} g_i \oplus f_i a_{p_i} \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} c'_i =$$

$$= \alpha_1 \ldots \alpha_i h_2 \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} \in \langle FS \rangle_{\oplus}.$$

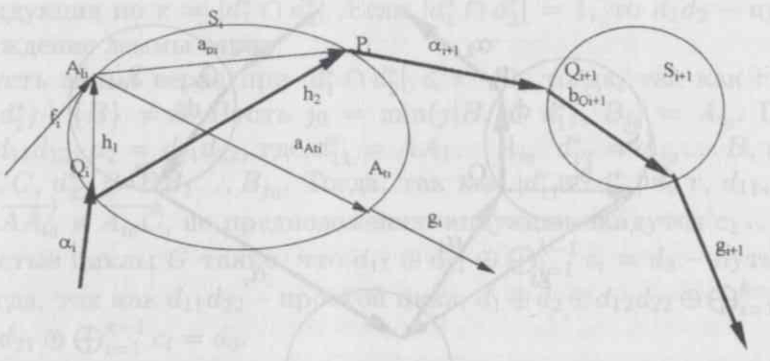

Рис. 6.

Так как S_i сильно связен, d_i, h_2 – пути, по лемме 3.1 $d_1 = h_2 \oplus \bigoplus_{j=l+1}^{q} c_j'$, где c_j' – некоторые простые циклы S_i, то есть $c_i' \in <FS>_{\oplus}$. Тогда

$$c_{i+1} = \alpha_1 \ldots \alpha_i d_i \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} = \alpha_1 \ldots \alpha_i h_2 \alpha_{i+1} b_{Q_{i+1}} g_{i+1} \oplus \bigoplus_{j=l+1}^{q} c_j' \in <FS>.$$

Таким образом, по индукции доказано, что $c = c_r \in <FS>$.

4. Независимость FS

Пусть S_i – сильно связная компонента графа G_k, α – некоторый вход в S_i, β – выход из S_i (см. пункты б), в) и г) на стр. 371).

Лемма 4.1. *1) Если α – не главный вход в S_i, $a_1\alpha b_1$, $a_2\alpha b_2 \in FS_{k+1}$, то $b_1 = b_2$.*

2) Если β – не главный выход из S_i, $a_1\beta b_1$, $a_2\beta b_2 \in FS_{k+1}$, то $a_1 = a_2$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in c \in FS_{k+1}$, тогда $c = c_\gamma$, где γ – выход из некоторой S_l в S_j, где S_l, S_j – ССК G_k. ($c \bar{\in} FS_k$, $c \neq \alpha$, так как концы α лежат в разных ССК G_k). Тогда $c = f_l a_{A'} \gamma b_{B'} g_j$, где

$A' = E^-(\gamma)$. Так как α – не главный вход в S_i, $\alpha \notin f_l$, поэтому либо $\alpha = \gamma$, либо $\alpha \in g_j$. В обоих случаях $c = a_c \alpha b_B g_i$, где $B = E^+(\alpha)$. Таким образом, $b_1 = b_2 = b_B g_i$.

Пункт 2 доказывается аналогично.

Пусть $S_1 \ldots S_r$ – сильно связные компоненты графа G_l, $S_0 = S_{r+1} = G(\{A_{l+1}\})$,

$$c = \alpha_1 b_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r b_r \alpha_{r+1} \in FS_{l+1},$$

где α_i – выход из S_{j-1}, вход в S_j, b_j – некоторый путь в S_j, связывающий конец α_j и начало α_{j+1}. $c_1 \ldots c_k \in FS_{l+1}$, d – подмножество $\mathcal{E}_{l+1}$ такое, что для некоторого $j \in \overline{1,r}$ выполнены условия:

1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in d$, $\alpha_{j+1} \notin d$ $\quad \exists \beta_{j+1} \in d$ такое, что $\exists c' \in FS_{l+1}$: $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \beta_{j+1} \in c'$ β_{j+1} – выход из S_j.
2) d не содержит других выходов из S_i, $i \in \overline{0,j}$, кроме $\alpha_1 \ldots \alpha_j$ и β_{j+1} соответственно.
3) Ни один из циклов $c_1 \ldots c_k$ не содержит все рёбра $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \alpha_{j+1}$.

Лемма 4.2. *Если для циклов $c, c_1 \ldots c_k \in FS_{l+1}$ и множества рёбер d выполнены условия 1), 2) и 3), то*

$$d \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} c_i \neq c.$$

Доказательство. Индукцией по k. Пусть $c = d \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} c_i$.

1. Если $k = 1$, пусть $d \oplus c_1 = c$, тогда, так как $\beta_{j+1} \in d$, $\alpha_{j+1} \notin d$, $\beta_{j+1} \notin c$, $\alpha_{j+1} \in c$, $\beta_{j+1}, \alpha_{j+1} \in c_1$, что невозможно.

2. Пусть для $k \leqslant k_0 - 1$, где $k_0 \geqslant 2$, утверждение доказано. Если α_{i+1} – не главный выход из S_j, то так как $\alpha_1 \ldots \alpha_{j+1} \in c$, $\alpha_{j+1} \in c_i \in FS_{l+1}$, то $\alpha_1 \ldots \alpha_j \alpha_{j+1} \in c_i$ (лемма 4.1). Значит, по допущению 3, ни один из c_i не содержит ребро α_{j+1}, таким образом $\alpha_{j+1} \notin d \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_0} c_i \neq c$.

Пусть α_{i+1} – главный выход из S_j, тогда β_{i+1} – не главный выход из S_j. Так как $\beta_{j+1} \in d \setminus c$, пусть c_{k_0} без ограничения общности такое, что $\beta_{j+1} \in c_{k_0}$, тогда по лемме 4.1 так как $\alpha_1 \ldots \alpha_j \beta_{j+1} \in c'$,

$\alpha_1 \dots \alpha_j \beta_{j+1} \in c'_{k_0}$ и $d \oplus c_{k_0}$ не содержит ни одного выхода из S_i, $i \in \overline{0,j}$, так как $\alpha_1 \in c = d \oplus c_{k_0} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_0-1} c_i$, $\alpha_i \notin d \oplus c_{k_0}$, ребро α_1 содержится в некотором цикле c_i, где $i \in \overline{1, k_0-1}$. Пусть $j_0 = \max\{j | \exists i \in \overline{1, k_0-1} : \alpha_1 \dots \alpha_j \in c_i\}$ по предположению $j_0 \leqslant j$. Пусть $\alpha_1 \dots \alpha_{j_0} \in c_{i_0}$, тогда $\alpha_{j_0+1} \notin c_{i_0}$, значит $\beta'_{j_0+1} \in c_{i_0}$, где β'_{j_0+1} – некоторый выход из S_{j_0}. $d' = d \oplus c_{k_0} \oplus c_{i_0}$ не содержит никаких выходов из $S_0, \dots, S_{j_0}$ кроме $\alpha_1, \dots, \alpha_{j_0}, \beta'_{j_0+1}$ соответственно, $\alpha_1, \dots, \alpha_{j_0}, \beta'_{j_0+1} \in c_{i_0}$. Таким образом, по предположению индукции $d \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_0} c_i = d' \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k_0-1} c_i \neq c$, таким образом, лемма доказана.

Пусть FS – множество простых циклов орграфа G, построеное в соответствии с приведённым в разделе 2 алгоритмом.

Теорема 4.1. *(о линейной независимости FS).*

Не существует $c \in FS$, $c_i \dots c_k \in FS \setminus \{c\}$ таких, что

$$c = \bigoplus_{i=1}^{k} c_i \quad (\text{то есть} \quad c \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} c_i = \emptyset).$$

Доказательство. 1. Пусть $c = \bigoplus_{i=1}^{k} c_i$, $l = \max\{j | A_j \in c^* \cup \bigcup c_i^*\}$. Тогда $c_{i_0} = c \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k} c_i$, таким образом, без ограничения общности можно считать, что $c \notin FS_l$, $c_i \in FS_{l+1}$ $\forall i \in \overline{1,k}$.

2. Если c – петля при A_{l+1}, то есть $c = \alpha$, то $\alpha \notin c_i$ $\forall i$, так как все они простые циклы, таким образом $\alpha \notin \bigoplus_{i=1}^{k} c_i$, следовательно $\bigoplus_{i=1}^{k} c_i \neq c$.

3. Пусть $c = \alpha_1 b_1 \dots \alpha_{r+1}$ (как в условии леммы 4.3). $j_0 = \max\{j | \exists i \in \overline{1,k} : \alpha_1 \dots \alpha_j \in c_i\}$, так как ни один из c_i не равен c, $j_0 \neq r+1$ иначе по свойству 2.3 $c_i = c$. То есть $j_0 \leqslant r$, пусть $d = c_i$, такой что $\alpha_1 \dots \alpha_{j_0} \in c_i$. Легко видеть, что c, d, $c_1 \dots c_{i-1} c_{i+1} \dots c_k$ удовлетворяют условию леммы 4.3. Таким образом, $c \neq c_i \oplus \bigoplus_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{k} c_i$.

Список литературы

[1] Рейнгольд и др. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. М.: Мир, 1980.

[2] Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.

[3] Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. М.: Наука, 1990.