Но $\frac{2n^{2n-1}}{n^{2n}} = \frac{2}{n}$, а эта последовательность стремится к 0 при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2} n^2 |V_M(n-2)|}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n^3(n-1)(n-2)^{2(n-2)}}{n^{2n}} \frac{|V_M(n-2)|}{(n-2)^{2(n-2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^4} \frac{|V_M(n-2)|}{(n-2)^{2(n-2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^4} \lim_{n\to\infty} \frac{|V_M(n-2)|}{(n-2)^{2(n-2)}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2e^4}\left(1 - \frac{1}{e^4\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}\right).$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|V_{NM}(n)|}{n^{2n}} \geqslant \frac{1}{2e^4}\left(1 - \frac{1}{e^4\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}\right).$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору С.В. Алёшину, под руководством которого выполнена данная работа.

## Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[3] Арбиб М.А. Декомпозиция автоматов и расширение полугрупп // Арбиб М.А. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. М.: Статистика, 1975. С. 46–63.

# Об одной модели оптимального рыночного поведения фирмы

А.Н. Сафиуллин

Предлагается модель фирмы, функционирующей в условиях рынка, и изучается такое ее поведение, которое позволяет ей максимизировать прибыль на заданном временном интервале.

## Введение

Одной из общих моделей кибернетики является рассмотрение объектов, находящихся в среде и способных реагировать на нее. Рассмотренное во времени такое реагирование под влиянием среды считают поведением объекта в среде; оно может быть оценено с помощью некоторых критериев. Тем самым возникает задача выявления такого поведения, которое является оптимальным по указанным критериям.

Эта общая ситуация имеет много интерпретаций. Например, можно рассматривать реальную фирму в рыночных условиях как объект в среде. Процесс взаимодействия фирмы со средой управляем как фирмой, так и средой. Критерий такого поведения – учет взаимных «интересов», и акцентируемый на интересах фирмы он может означать стремление ее к максимальной прибыли на данном временном интервале.

В работе формализуются понятия фирмы и среды, вводятся конкретные критерии целесообразного поведения фирмы в среде и явно указываются ее оптимальные стратегии с вычислением доходов.

# 1. Модель фирмы на рынке

Рассмотрим некоторую абстрактную фирму, полагая, что ее в любой момент можно охарактеризовать двумя параметрами: $q^1$ ($q^1 \in \mathbb{Z}_+$) – оборотный капитал, который можно пустить в производство или распорядиться им любым другим способом, и $q^2$ ($q^2 \in \mathbb{Z}_+$) – средства производства.

Пусть фирма производит некий продукт, себестоимость единицы которого положим постоянной и обозначим за $a$ ($a \in \mathbb{N}$). Продукт этот она тут же продает, возвращая оборотный капитал, потраченный на производство. Существенным здесь является предположение о том, что весь произведенный товар продается *сразу*. Это условие в определенной мере ограничивает общность рассмотрений и поэтому впоследствии будет ослаблено. На каждом шаге фирма может купить (при достаточном количестве оборотного капитала) или продать по одной и той же постоянной цене $M$ ($M \in \mathbb{N}$) $\Delta q^2$ ($\Delta q^2 \in \mathbb{Z}$) средств производства с целью последующего увеличения своей прибыли. Пусть $N$ ($N \in \mathbb{N}$) – это максимальное количество единиц продукции, выпускаемых за один шаг.

Обозначим через $q^3$ ($q^3 \in \mathbb{N}$) цену, по которой фирма может продать свою продукцию на данном шаге. Пусть $q^3$ есть невозрастающая функия $p(\cdot)$ от количества выпущенной (и, соответственно, проданной) продукции на предыдущем шаге.

Будем считать, что деятельность фирмы осуществляется в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_T$, где $t_i \in \mathbb{N}$, следующим образом:

1) Фирма оценивает количество своих денежных средств и средств производства и может принять решение купить или продать $\Delta q^2$ средств производства.

2) Затем фирма производит $u(t_i)$ или просто $u_i$ ($u_i \in \mathbb{Z}_+$) единиц выпускаемой продукции. Величина $u_i$, очевидно, ограничена величиной оборотного капитала, который необходим для оплаты процесса производства и количеством средств производства.



3) Произведенный товар продается по сформировавшейся рыночной цене

$$q_i^3 = \begin{cases} p(u_{-1}) := b, & \text{если } i = 0 \\ p(u_{i-1}) & \text{иначе,} \end{cases}$$

увеличивая имеющийся у фирмы оборотный капитал.

Пусть $S_i = q_i^1 + Mq_i^2$ – *полная стоимость* фирмы в $i$-й момент времени, где $i = 0, 1, 2, \ldots, T$. Тогда прибылью фирмы на $i$-м шаге назовем

$$\Delta S_i := S_i - S_{i-1} = (q_i^3 - a)u_i, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, T.$$

Прибыль фирмы за период времени $T$ будет равна

$$J := \sum_{i=1}^{T} \Delta S_i = (q_0^3 - a)u_0 + (q_1^3 - a)u_1 + \cdots + (q_{T-1}^3 - a)u_{T-1}. \quad (1)$$

Таким образом, в высказанных предположениях предлагается решить следующую задачу.

*Найти такие последовательности величин* $u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}$ *(стратегию выпуска) и величин* $\Delta q_0^2, \ldots, \Delta q_{T-1}^2$ *(стратегию инвестирования), чтобы прибыль фирмы за* $T$ *шагов была* **максимальной.**

Формализуем все вышесказанное. Деятельность фирмы в нашей задаче будем моделировать конечным автоматом ([1]) $\mathfrak{A}(A, Q, B, \varphi, \psi, \mathfrak{q}_0)$. Определим входной алфавит. При такой постановке задачи автомат $\mathfrak{A}$ олицетворят собой некий объект, воздействуя на который через известные управляющие рычаги, можно добиться от него какого-то поведения, каких-то результатов. В данном случае управляющие рычаги – это количество выпускаемой продукции $u_i$ и количество приобретенных/проданных на $i$-м шаге средств производства $\Delta q_i^2$.

Величины $u_i$ и $\Delta q_i^2$ для любого $i$ очевидно ограничены константой $C_1 = C_1(T, p(\cdot), M, N, a, b)$, поэтому

$$A := [0, C] \times [-C, C] \subseteq \mathbb{Z}^2 \text{ конечно,}$$

и входом автомата $\mathfrak{A}$ будет вектор $(u_i, \Delta q_i^2) \in A$.

Определим множество состояний $Q$ автомата $\mathfrak{A}$ как конечное подмножество $\mathbb{Z}^3$ и состояние автомата

$$\overline{q_i} := (q_i^1, q_i^2, q_i^3) \in Q,$$

где

$q_i^1$ – количество оборотного капитала у фирмы,

$q_i^2$ – число средств производства,

$q_i^3$ – состояние рынка, точнее, цена, по которой фирма будет продавать свой товар в данный момент времени.

Такие построения возможны ввиду ограниченности любой из величин $q_i^j$, $j = 1,2,3$, $i = 0,1,\ldots,T$ некоторой общей константой $C_2 = C_2(T, p(\cdot), M, N, a, b)$.

Выходов автомат иметь не будет, что вполне логично, так как мы не хотим добиться от $\mathfrak{A}$ какого-либо результата, а хотим перевести автомат в состояние, которым будет характеризоваться максимум функционала прибыли на пути $\mathfrak{A}$ от начального состояния $\mathbf{q}_0 = \overline{q_0}$ до конечного $\overline{q_T}$.

Таким образом, мы описали все входы и состояния автомата $\mathfrak{A}$, поэтому, не имея выходов и, соответственно, функции выходов, можно полностью определить автомат $\mathfrak{A}$, выписав функцию переходов $\overline{\varphi}(\overline{q_i}, u_i, \Delta q_i^2)$:

$$q_{i+1}^1 = \overline{\varphi^1}(\overline{q_i}, u_i, \Delta q_i^2) = q_i^1 + (q_i^3 - a)u_i - M\Delta q_i^2, \qquad (2)$$

$$q_{i+1}^2 = \overline{\varphi^2}(\overline{q_i}, u_i, \Delta q_i^2) = q_i^2 + \Delta q_i^2, \qquad (3)$$

$$q_{i+1}^3 = \overline{\varphi^3}(\overline{q_i}, u_i, \Delta q_i^2) = p(u_i). \qquad (4)$$

Поясним смысл формул (2)–(4). Смысл формулы (2), показывающей величину оборотного капитала фирмы в следующий такт времени, состоит в следующем: капитал изменяется за счет прибыли фирмы за данный ход $(q_i^3 - a)u_i$ (здесь: $q_i^3$ – цена продажи единицы продукции на данном шаге, $a$ – ее себестоимость, а $u_i$ – общее количество произведенной продукции на этом шаге) и за счет расхода/выручки части оборотного капитала на покупку/продажу дополнительных средств производства $M\Delta q_i^2$ ($M$ – цена одного средства производства, $\Delta q_i^2$ – их количество). Формулы (3) и (4) представляются очевидными. Формула (3) выражает количество средств производства на следующем шаге через количество имеющихся и количество приобретенных/проданных $(\Delta q_i^2)$, а формула (4) есть запоминание в состояние $q_{i+1}^3$ рыночной цены продажи выпускаемого товара на следующем шаге, которая есть, как мы условились, убывающая функция $p$ от количества произведеной продукции на данном шаге $u_i$.



Введем естественные условия на входы автомата, то есть условия, без которых наш автомат не являлся моделью фирмы, а представлял бы из себя просто некий автомат с функцией переходов, заданной формулами (2)–(4) и не имеющий выходов.

На входы $u_i$ и $\Delta q_i^2$ существуют естественные ограничения, накладываемые моделью:

1) Изменение количества средств производства естественно ограничено снизу их общим количеством, а сверху – количеством оборотного капитала:

$$-q_i^2 \leqslant \Delta q_i^2 \leqslant \left[\frac{q_i^1}{M}\right], \qquad (5)$$

где $[\cdot]$ – целая часть

2) Произвести продукции за шаг можно не больше, чем позволяет количество средств производства и количество оборотного капитала, необходимое для процесса выпуска. Это выражается неравенством

$$0 \leqslant u_i \leqslant \min(\left[\frac{\bar{q}_i^1}{a}\right], N\bar{q}_i^2), \qquad (6)$$

где $\bar{q}_i^1$ и $\bar{q}_i^2$ – оборотный капитал и средства производства после покупки/продажи фирмой дополнительных «станков».

Таким образом, мы имеем фунцию переходов (2)–(4), ограничения на входы (5)–(6), и хотим максимизировать функционал прибыли (1). Делая это, мы будем максимизировать количество средств, пришедших «извне», а переходы денежных потоков из оборотного капитала в средства производства и обратно внутри фирмы мы должны учитывать лишь в плане их влияния на прибыль.

## 2. Максимизация функционала прибыли

Итак, мы задались вопросом максимизации функционала (1), который выражает прибыль некоторой фирмы, моделируемой автоматом $\mathfrak{A}$, не имеющим выходов, с функцией переходов (2)–(4), начальным состоянием $\overline{q_0}$ и ограничениями на входы, заданными формулами (5)–(6).

Другими словами мы ищем:

$$J_0 = \max_{\substack{\Delta q_0^{(2)},\dots,\Delta q_{T-1}^{(2)} \\ u_0,\dots,u_{T-1}}} \sum_{i=1}^{T} \Delta S_i^{(1)} \tag{7}$$

с ограничениями: $u_i \in [0, N_i]$, $\Delta q_i^{(2)} \in [-q_i^{(2)}, Q_i]$,

где за $Q_i$ обозначено $\left[\frac{q_i^{(1)}}{M}\right]$, а $N_i := \min\left(\left[\frac{\tilde{q}_i^{(1)}}{a}\right], N\tilde{q}_i^{(2)}\right) = N_i(\overline{q_i}, \Delta q_i^{(2)})$.

### 2.1. Некоторое упрощение задачи максимизации

Задача максимизации (7), как она сформулирована, представляется достаточно неприятной и труднорешаемой, поэтому было бы неплохо несколько упростить ее. Дело в том, что от поиска максимума по $\Delta q_i^{(2)}$ можно избавиться, выбирая их таким образом чтобы максимизировать величины $N_i$ и тем самым искать максимум по $u_i$ на большем множестве.



**Теорема 1.** *Пусть мы имеем задачу максимизации (7). Тогда*

$$J_0 = \max_{u_1,\dots,u_T} \sum_{i=1}^{T} \Delta S_i, \quad u_i \in [0, N_i], \ \Delta q_i^{(2)} = \hat{w}_i, \tag{8}$$

*где $\hat{w}_i$ таково, что* $N_i(\overline{q_i}, \hat{w}_i) = \max\limits_{\Delta q_i^{(2)}} N_i(\overline{q_i}, \Delta q_i^{(2)})$, (9)

*то есть $\hat{w}_i = w(\overline{q_i})$ – точка, где $N_i$ достигает максимума по $\Delta q_i^{(2)}$.*

**Доказательство.** Итак, нужно доказать, что

$$\max_{\substack{u_0,\dots,u_{T-1} \\ \Delta q_0^{(2)},\dots,\Delta q_{T-1}^{(2)} \\ \Delta q_i^{(2)} \in [-q_i^{(2)}, Q_i]}} \sum_{i=1}^{T} \Delta S_i = \max_{\substack{u_0,\dots,u_{T-1} \\ \Delta q_0^{(2)},\dots,\Delta q_{T-1}^{(2)} \\ \Delta q_i^{(2)} = \hat{w}_i}} \sum_{i=1}^{T} \Delta S_i,$$

где $\hat{w}_i$ заданы формулой (9), $u_i$ удовлетворяют (6).

Пусть мы, запустив автомат $\mathfrak{A}$ из состояния $\overline{q_0}$ и *каким-то* образом подавая ему на вход $u_i = u_{i,0}$ и $\Delta q_i^{(2)} = \Delta q_{i,0}^{(2)}$ с учетом ограничений (5)–(6), пришли в состояние $\overline{q_{T-1}}$. Рассмотрим

$$J_{T-1}(u_{0,0}, \dots, u_{T-2,0}) := \max_{\substack{\Delta q_{T-1}^{(2)} \in [-q_{T-1}^{(2)}, Q_{T-1}] \\ u_{T-1} \in [0, N_{T-1}(\Delta q_{T-1}^{(2)})]}} J(u_{0,0}, \dots, u_{T-2,0}, u_{T-1}),$$

считая $u_{0,0}, \dots, u_{T-2,0}$ фиксированными. И так как в (1) нет явной зависимости от $\Delta q_i^{(2)}$, то

$$J_{T-1} = \max_{u_T \in [0, \max\limits_{\Delta q_{T-1}^{(2)}} N_{T-1}]} J, \tag{10}$$

то есть максимум ищется по максимально возможному множеству при данных $u_{0,0}, \dots, u_{T-2,0}$. Переформулировав последнее равенство в терминах $\hat{w}_i$, получим:

$$J_{T-1} = \max_{\substack{\Delta q_{T-1}^{(2)} = \hat{w}_{T-1} \\ u_{T-1} \in [0, N_{T-1}(\hat{w}_{T-1})]}} J.$$

Теперь введем обозначение

$$J_i(u_{0,0},\ldots,u_{i-1,0}) := \max_{\substack{\Delta q_i^{(2)},\ldots,\Delta q_{T-1}^{(2)}\\ u_i,\ldots,u_{T-1}}} J(u_{0,0},\ldots,u_{i-1,0},u_i,\ldots,u_{T-1}).$$

Переменные $\Delta q_i^{(2)}$ и $u_i$ варьируются на множествах (5) и (6) соответственно.

Пусть мы имеем на $(T-k)$-м шаге равенство аналогичное (10):

$$J_{T-k} = \max_{u_{T-k},\ldots,u_{T-1}} J(u_{0,0},\ldots,u_{T-k-1,0},u_{T-k},\ldots,u_{T-1}), \tag{11}$$

где $u_i$ варьируются на множестве $[0, N_i(\hat{w}_i)]$.

Докажем его для $J_{T-k-1}$:

$$J_{T-k-1} = \max_{\substack{\Delta q_{T-k-1}^{(2)},\ldots,\Delta q_{T-1}^{(2)}\\ u_{T-k-1},\ldots,u_{T-1}}} J \overset{(*)}{=} \max_{u_{T-k-1},\Delta q_{T-k-1}^{(2)}} \Big( \max_{\substack{\Delta q_{T-k}^{(2)},\ldots,\Delta q_{T-1}^{(2)}\\ u_{T-k},\ldots,u_{T-1}}} J\Big) \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \max_{u_{T-k-1}\in[0,N_{T-k-1}(\hat{w}_{T-k-1})]} \Big( \max_{\substack{\Delta q_{T-k}^{(2)},\ldots,\Delta q_{T-1}^{(2)}\\ u_{T-k},\ldots,u_{T-1}}} J\Big) \overset{(***)}{=}$$

$$\overset{(***)}{=} \max_{u_{T-k-1}\in[0,N_{T-k-1}(\hat{w}_{T-k-1})]} J_{T-k}(u_{0,0},\ldots,u_{T-k-2,0},u_{T-k-1}) =$$

$$= \max_{u_{T-k-1}} \Big( \max_{u_{T-k},\ldots,u_{T-1}} J(u_{0,0},\ldots,u_{T-k-2,0},u_{T-k-1},u_{T-k},\ldots,u_{T-1})\Big).$$

$(*)$ очевидно ввиду конечности множеств, на которых ищется максимум;

$(**)$ – в силу того, что $N_{T-k-1}$ зависит только от $\Delta q_{T-k-1}^{(2)}$ ($u_{0,0},\ldots,u_{T-k-2}$ фиксированы) и поэтому, не имея явной зависимости $J$ от $\Delta q_{T-k-1}^{(2)}$, $\Delta q_{T-k-1}^{(2)}$ можно брать таким, чтобы максимизировать отрезок, на котором варьируется $u_{T-k-1}$ (а $\hat{w}_{T-k-1}$ как раз и доставляет этот максимум);

$(***)$ по предположению (11).



Получили что,

$$J_{T-k-1}(u_{0,0},\ldots,u_{T-k-2,0}) =$$
$$= \max_{u_{T-k-1},\ldots,u_{T-1}} J(u_{0,0},\ldots,u_{T-k-2,0},u_{T-k-1},\ldots,u_{T-1}). \tag{12}$$

Таким образом, мы провели индукцию с базой (10) и шагом (11)–(12), которая и доказывает нашу теорему.

## 2.2. Пересмотр модели

Итак, напомним, что мы решаем следующую задачу: находим такие последовательности входных значений $\Delta q_i^{(2)}$ и $u_i$ с соответствующими ограничениями (5)–(6), чтобы функционал прибыли (1) на этих последовательностях был максимальным. Но, как выяснилось в предыдущем пункте, вместо исследования последовательностей управляющих команд $u_0, \Delta q_0^{(2)}, u_1, \Delta q_1^{(2)}, \ldots, u_{T-1}, \Delta q_{T-1}^{(2)}$ на предмет максимума функционала $J$ можно исследовать последовательности в два раза меньшей длины $u_0,\ldots,u_{T-1}$, определив $\Delta q_i^{(2)}$ как некоторую функцию от $\overline{q_i}$. Следовательно, имеет смысл для дальнейшего решения задачи перейти от автомата $\mathfrak{A}$ с двумя входами $u_i$ и $\Delta q_i^{(2)}$ к автомату $\mathfrak{B}$ с одним входом $u_i$ и следующей функцией переходов:

$$q_{i+1}^{(1)} = \overline{\varphi^{(1)}}(\overline{q_i}, u_i) = q_i^{(1)} + (q_i^{(3)} - a)u_i - M\hat{w}_i, \tag{13}$$

$$q_{i+1}^{(2)} = \overline{\varphi^{(2)}}(\overline{q_i}, u_i) = q_i^{(2)} + \hat{w}_i, \tag{14}$$

$$q_{i+1}^{(3)} = \overline{\varphi^{(3)}}(\overline{q_i}, u_i) = p(u_i), \tag{15}$$

где $\hat{w}_i$ – количество средств производства покупаемых/продаваемых фирмой такое, что $\hat{w}_i$ является точкой максимума $N_i$ по переменной $\Delta q_i^{(2)}$.

Итак, автомат $\mathfrak{B}$ полностью определен, но чтобы он являлся моделью фирмы, нужно наложить условия, диктуемые постановкой задачи, на его входы. Исходя из (5)–(6) и теоремы предыдущего пункта, ограничения на входы $\mathfrak{B}$ будут выглядеть следующим образом:

$$0 \leqslant u_i \leqslant N_i(\hat{w}_i). \tag{16}$$

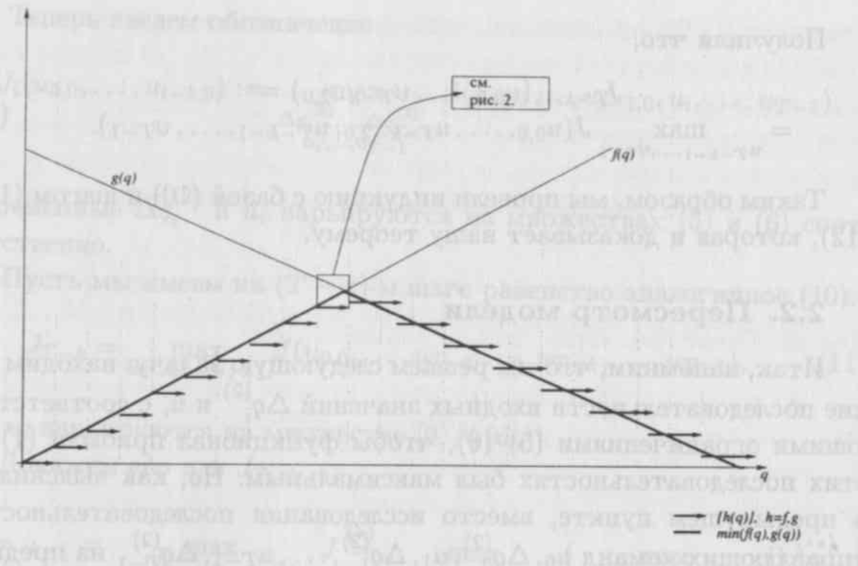


Рис. 1.

Таким образом, осталось лишь найти $J_0 = \max\limits_{u_0,\ldots,u_{T-1}} J$ с ограничениями (16) на переменные $u_0, \ldots, u_{T-1}$.

## 2.3. Нахождение величин $\hat{w}_i$

Найдем в явном виде величины $\hat{w}_i$. Пусть $\hat{q}_i^{(1)}$ и $\hat{q}_i^{(2)}$ – состояния автомата, обеспечивающие оптимальное соотношение между средствами производства и капиталом, то есть доставляющие максимум функции $N_i(\tilde{q}_i^{(1)}, \tilde{q}_i^{(2)})$, тогда $\hat{w}_i = \hat{q}_i^{(2)} - q_i^{(2)}$. Поэтому нам лишь осталось найти $\hat{q}_i^{(2)}$.

Считая $S_i$ фиксированным (мы ищем оптимальное соотношение при фиксированной стоимости фирмы), имеем

$$N_i(\tilde{q}_i^{(1)}, \tilde{q}_i^{(2)}) = N_i(\tilde{q}_i^{(1)}(\tilde{q}_i^{(2)}, S_i), \tilde{q}_i^{(2)}) = N_i(\tilde{q}_i^{(2)}) = \min\left(\left[\frac{S - M\tilde{q}_i^{(2)}}{a}\right], N\tilde{q}_i^{(2)}\right).$$

Позволим (на время) принимать переменной $\tilde{q}_i^{(2)}$ вещественные значения. Чтобы не путаться, назовем ее просто $q$. Рассмотрим точку $\hat{q}$ – точку пересечения прямых $f(q) = Nq$ и $g(q) = (S - Mq)/a$ и две ближайшие к ней целые точки (см. рисунки). Тогда понятно, что точкой максимума функции $N_i(\tilde{q}_i^{(2)})$ будет



$$\hat{q}^{(2)} = \begin{cases} [\hat{q}], & \text{если } N[\hat{q}] \geqslant \frac{S - M([\hat{q}]+1)}{a} \quad (*) \\ [\hat{q}] + 1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{17}$$

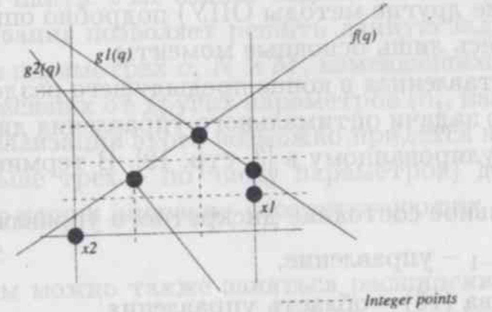


Рис. 2.

На рисунке 2 прямая $g_1(q)$ отвечает случаю $N[\hat{q}] \geqslant \frac{S - M([\hat{q}]+1)}{a}$, а $g_2(q)$ – противоположному случаю.

Таким образом, теперь мы знаем оптимальное соотношение между средствами производства и капиталом фирмы.

Это также нам позволяет найти значение максимума функции $N_i$. В случае $(*)$ это будет $[g(\hat{q}^{(2)})]$ ($x1$ на рис. 2), а иначе – $N\hat{q}$ ($x2$ на рис. 2).

Поэтому для автомата $\mathfrak{B}$ имеем

$$q_{i+1}^{(1)} = \overline{\varphi^{(1)}}(\overline{q_i}, u_i) = q_i^{(1)} + (q_i^{(3)} - a)u_i - M\hat{w}_i, \tag{18}$$

$$q_{i+1}^{(2)} = \overline{\varphi^{(2)}}(\overline{q_i}, u_i) = \hat{q}_i^{(2)}, \tag{19}$$

$$q_{i+1}^{(3)} = \overline{\varphi^{(3)}}(\overline{q_i}, u_i) = p(u_i). \tag{20}$$

## 3. Метод динамического программирования

Итак, мы имеем автомат $\mathfrak{B}$ с функцией переходов (18)–(20) и некоторым начальным состоянием $\overline{q_0}$. Осталось лишь найти последовательность входных величин $u_0, \ldots, u_{T-1}$, отвечающую максимуму функционала прибыли (1).

Решать задачу максимизации функционала прибыли с ограничениями (16) можно методом динамического программирования. Этот метод (и многие другие методы ОПУ) подробно описан в [3], поэтому изложим здесь лишь основные моменты.

Задача, поставленная в конце предыдущего раздела соответствует определению задачи оптимального управления дискретными объектами, сформулированному в [3, стр. 19]. В терминах [3]

$\overline{q_0}$ – начальное состояние дискретного управляемого объекта,

$u_0, \ldots, u_{T-1}$ – управление,

неравенства (16) – область управления,

функция переходов (18)–(20) – закон движения управляемого объекта.

А задача заключается в том, чтобы, зная начальное состояние, найти такое допустимое управление, то есть принадлежащее области управления, чтобы заданный функционал принял свое максимальное значение.

Введем некоторые обозначения.

$$f_{T-k} = \max_{u_{T-k}, \ldots, u_{T-1}} \sum_{i=T-k}^{T-1} \tilde{p}(u_i) u_{i+1},$$

где $\tilde{p}(u_i) = p(u_i) - a$.

В [3] доказано так называемое уравнение Беллмана

$$f_{T-k} = \max_{u_{T-k}} (\tilde{p}(u_{T-k-1}) u_{T-k} + f_{T-k+1}),$$



позволяющее решить поставленную задачу для любых значений рассматриваемых параметров (при наличии соответствующих вычислительных ресурсов).

## 4. Заключение

Итак, для поставленной задачи мы ввели математическую модель и получили решение в полученной модели. Но данную модель можно несколько улучшить. Уже сейчас видно, что метод динамического программирования позволяет решить данную задачу при любой функции $p$ и при параметрах $a$, $N$ и $M$, изменяющихся со временем, и, возможно, зависящих от других параметров ($n_i$, например) и друг от друга. Для реализации этого возможно придется ввести лишь несколько (не больше трех – по числу параметров) дополнительных состояний, содержащих значения соответствующих параметров на следующем шаге.

В дальнейшем можно также заняться расширением модели. Например, выделить из одного параметра себестоимости продукции $a$ факторы, влияющие на ее формирование (зарплата, аренда и т.п.) и/или ввести параметры, моделирующие такие факторы как налоги, банковский капитал и т.д.

## Список литературы


[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Higgins R.C. Analysis for Financial Management.

[3] Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.

[4] Семь нот менеджмента / Сер. Библиотека эксперта.

[5] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[6] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: изд-во МГУ, 1989.

[7] Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интелекта. М.: Мир, 1991.

# Фундаментальное множество циклов ориентированного мультиграфа

В.Л. Ческис

В работе описано фундаментальное множество циклов ориентированного мультиграфа, приведен асимптотически оптимальный алгоритм его построения.

## Введение

В ряде задач возникает необходимость проанализировать все простые циклы ориентированного мультиграфа (в дальнейшем для краткости будем использовать термин орграф), количество которых, вообще говоря, растет экспоненциально с ростом числа вершин, однако в ряде случаев достаточно проанализировать лишь фундаментальное множество циклов (ФМЦ) этого графа [2, с. 143–147], содержащее не более $m - n + p$ циклов ($p$ – число компонент связности, $n$ – количество вершин, $m$ – ребер).

Для неориентированного графа ФМЦ строится достаточно просто [1, с. 382–385], однако в силу накладываемых ориентацией ограничений на циклы орграфа, подобный подход не дает для него желаемого результата.

В данной работе приведен алгоритм, который позволяет строить ФМЦ орграфа за время, эквивалентное соответствующему алгоритму для неориентированных графов (раздел 2). Разделы 3 и 4 содержат доказательства фундаментальности и независимости полученного множества циклов соответственно.