правильности заданного семейства f мультиаффинных функций.

а) Строим граф вхождения переменных G_f.

б) Порождаем список простых элементарных циклов графа G_f.

в) Для каждого такого контура C проверяем условие (19).

Замечания: 1. Проверка условия (19) для мультиаффинных функций по сложности совпадает со сложностью проверки совместности системы линейных уравнений над F_2. Для многих классов функций установлена NP-трудность проверки выполнимости условия (19) [2].

2. Известно, что каждый элементарный цикл графа представляется через так называемые фундаментальные циклы (см. [8]). Список фундаментальных циклов для графа с m дугами и n вершинами может быть порожден за $O(mn)$ действий [8].

Список литературы

[1] Носов В.А. Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом // Интеллектуальные Системы. М., 1998. Т. 3. Вып. 3–4. С. 269–280.

[2] Алексеев В.Б., Носов В.А. NP-полные задачи и их полиномиальные варианты. Обзор // Обозрение промышленной и прикладной математики. 1997. Т. 4. Вып. 2. С. 165–193.

[3] Белоусов В.Д., Белявская Г.Б. Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения. Кишинев, 1989.

[4] Шеннон К. Теория связи в секретных системах // Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963. С. 333–369.

[5] Denes J., Keedwell A.D. Latin squares and their applications. Budapest, 1974.

[6] Huffman D.A. Canonical forms for information lossless finite-state logical machines // IRE Trans. Circ. Theory. 1959. V. 6. P. 41–59.

[7] Клосс Б.М., Мальцев В.А. Определение регулярности автомата по его каноническим уравнениям // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172. №3. С. 543–546.

[8] Липский В. Комбинаторика для программистов. Москва, 1988.

О свойствах графа гиперболического произведения групп

А.Е. Панкратьев

1. Введение

Гиперболические пространства были введены М. Громовым в работе [1] следующим образом. Пусть x, y, t – точки метрического пространства X. Обозначим $(x \cdot y)_t = \frac{1}{2}(|x-t| + |y-t| - |x-y|)$.

Определение 1. Метрическое пространство X называется *δ-гиперболическим* ($\delta \geqslant 0$) если для любых четырех точек $x, y, z, t \in X$ выполнено неравенство

$$(x \cdot y)_t \geqslant \min((x \cdot z)_t, (y \cdot z)_t) - \delta.$$

Пространство называется *гиперболическим*, если оно δ-гиперболическое для некоторого $\delta \geqslant 0$.

Рассмотрим свободное произведение $F = \underset{i \in I}{*} G_i$ конечного числа групп G_i [3]. Наложим на F конечное множество R дополнительных соотношений и обозначим полученную группу через $H = \langle F | R \rangle$. Над группой H с системой образующих $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} G_i$ построим граф Кэли $\Gamma(H)$: вершины графа соответствуют элементам группы H, причем две вершины, соответствующие элементам u и v, соединены ориентированным ребром с меткой $h = u^{-1}v$ в том и только том случае, когда $u^{-1}v \in \mathcal{B}$. Каждое ребро снабдим метрикой отрезка $[0,1]$ и примем за расстояние $|t_1 - t_2|$ между двумя точками t_1, t_2 графа $\Gamma(H)$ минимум длин путей, их соединяющих.

Замечание 1. Пространство $\Gamma(H)$, очевидно, является геодезическим.

Пусть слово W (в алфавите B) представляет единицу в группе H. Тогда его можно представить в виде [3]:

$$W \equiv \prod_{i=1}^{n} U_i R_i^{\varepsilon_i} U_i^{-1}, \quad U_i \in H,\ R_i \in R,\ \varepsilon_i = \pm 1. \qquad (1)$$

Определим $L(W)$ как наименьшее $n \geqslant 0$ по всем возможным представлениям (1) и введем функцию $l(x) = l_H(x) = \max\limits_{\|W\|=x} L(W)$ (под $\|W\|$ мы понимаем длину слова в метрике свободного произведения, то есть число слогов в слове W, в то время как $|W|$ обозначает длину кратчайшего слова, представляющего тот же самый элемент группы).

Определение 2. Группа $H = \langle \underset{i \in I}{*} G_i | R \rangle$ называется *гиперболическим произведением групп* G_i, если во введенных выше обозначениях $l_H(x) \leqslant ax + b$ для некоторых a и b.

В настоящей работе доказаны следующие три утверждения.

Теорема 1. *Если во введенных выше обозначениях $l_H(x)/x^2 \to 0$ при $x \to \infty$ (в частности, если H является гиперболическим произведением), то пространство $\Gamma(H)$ является гиперболическим.*

Теорема 2. *Каждый класс сопряженных элементов конечного порядка гиперболического произведения H содержит элемент длины не больше 180δ, где $\delta = \delta(H)$ - константа из определения гиперболичности для пространства $\Gamma(H)$.*

Для того чтобы сформулировать третий результат, нам потребуется определить *периодические* слова и наложить на гиперболическое произведение H некоторые условия.

Напомним, что слово A называется *циклически минимальным* в группе $H = \langle F|R \rangle$, если из равенства $A = XBX^{-1}$ в H следует $|A| \leqslant |B|$. Слово V назовем *периодическим* с циклически минимальным периодом A, $|A| \geqslant 2$, если для некоторых слов U_1, U_2 и числа n имеет место $A^n \equiv U_1 V U_2$ (то есть V является подсловом некоторой степени слова A в свободном произведении F); при этом разложение $A^n \equiv U_1 V U_2$ полуприведено, то есть между U_1 и V, V и U_2 нет сокращений [3].

Элемент гиперболического произведения $H = \langle F|R \rangle$, имеющий бесконечный порядок и не сопряженный с элементами множества B, будем называть *свободным*.

Рассмотрим последовательность степеней произвольного свободного элемента x и обозначим через $\bar{x}_n$ кратчайший элемент в классе сопряженности $(x^n)^H$ (под длиной элемента мы понимаем длину кратчайшего слова, которое его представляет). Будем говорить, что гиперболическое произведение H *невырождено*, если в нем имеется по крайней мере один свободный элемент, и для любого свободного элемента $x \in H$ дли́ны элементов $\bar{x}_n$ не ограничены сверху при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть гиперболическое произведение H невырождено. Тогда для любого $\theta > 0$ и любого циклически минимального слова B, представляющего в H свободный элемент, существуют числа k_B и n_B такие, что для всякого B-периодического слова V имеют место неравенства*

$$k_B((1-\theta)\|V\| - n_B) < |V| < k_B(\|V\| + n_B). \qquad (2)$$

Приведем наглядную геометрическую интерпретацию последней теоремы.

Путь p в метрическом пространстве назовем (λ, c)-*квазигеодезическим*, если для любого подпути $q \subseteq p$ выполнено

$$\frac{1}{\lambda}\|q\| - c \leqslant |q| \leqslant \lambda\|q\| + c,$$

где $\|q\|$ обозначает длину пути q (в аналитическом смысле), а $|q|$ – расстояние между его концами.

Следствие 1. *Пусть гиперболическое произведение H невырождено. Тогда для любого свободного элемента g, представляемого кратчайшим словом B, существуют числа λ_B и c_B такие,* *что для любого $m > 0$ путь с меткой B^m является (λ_B, c_B)-квазигеодезическим в графе $\Gamma(H)$ для любого m.*

2. Доказательство теоремы 1

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Многоугольником в геодезическом пространстве называется любая замкнутая ломаная, все звенья которой являются геодезическими. *Толщина* многоугольника $P = p_1 \cdots p_n$ – это минимальное t такое, что для произвольной точки O на любой стороне p_i найдется другая сторона p_j, $j \neq i$, расстояние от точки O до которой $\mu(O, p_j)$ не превосходит t.

В силу непрерывности функции расстояния в геодезическом пространстве, в любом треугольнике ABC на стороне BC найдется точка D (вообще говоря, не единственная), равноудаленная от сторон AB и AC. Обозначим $b(D) = \mu(D, AB) = \mu(D, AC)$ и назовем величину $\max\limits_{D \in ABC} b(D)$ *биразмером* [4] треугольника ABC.

Лемма 1 ([4]). *Если биразмеры треугольников в геодезическом метрическом пространстве ограничены в совокупности, то это пространство является гиперболическим.*

Лемма 2 ([4]). *Пусть биразмеры треугольников в геодезическом пространстве X не ограничены в совокупности. Тогда для любого $t_0 > 0$ в пространстве X найдется шестиугольник P такой, что его толщина $t > t_0$, а его периметр не превосходит $46t$.*

Под *диаграммами* над группой $H = \langle F | R \rangle$ будем понимать диаграммы над свободным произведением [3]. Все диаграммы предполагаются дисковыми, то есть связными и односвязными. Диаграмму назовем *минимальной*, если она имеет наименьшее число клеток среди всех диаграмм с тем же контуром.

Рассмотрим произвольную диаграмму Δ над H. Каждый полусегмент диаграммы Δ снабдим метрикой отрезка $[0, \frac{1}{2}]$, и продолжим эту метрику естественным образом на все пути в диаграмме. В

построенной метрике ν расстояние между любыми двумя первичными вершинами диаграммы Δ есть слоговая длина слова, читаемого вдоль кратчайшего пути, который их соединяет. В этом смысле, она согласована со слоговой метрикой свободного произведения, поэтому расстояние в диаграмме будем обозначать тем же символом $|\cdot|$, что и в графе $\Gamma(H)$.

Диаграмму назовем n-угольной, если ее границу можно разбить на n геодезических отрезков. Для n-угольной диаграммы Δ с границей $\partial\Delta = p_1 \cdots p_n$ определим ее *толщину* $t = t(\Delta)$ как минимальное число, удовлетворяющее следующему условию: для любой первичной вершины O на любой стороне p_i найдется первичная вершина O' на другой стороне p_j $(j \neq i)$ такая, что расстояние $\nu(O, O') = |O - O'|$ в Δ не превосходит t.

Наконец, выделим в диаграмме Δ некоторую первичную граничную вершину v (начало граничного пути) и введем отображение $\alpha = \alpha_v : \Delta \to \Gamma(G)$. Это отображение переводит v в единичную вершину графа $\Gamma(H)$. Любая другая вершина $v_i \in \Delta$ переводится отображением α в вершину графа $\Gamma(H)$ помеченную элементом g_i, где элемент g_i равен метке некоторого пути $v - v_i$, соединяющего в Δ вершины v и v_i. Отображение α естественным образом задается и на полусегментах.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что отображение α «растягивает» каждый полусегмент в два раза. Тем не менее, оно не увеличивает расстояния между первичными вершинами.

Лемма 3. *Пусть биразмеры треугольников в $\Gamma(H)$ не ограничены в совокупности. Тогда для любого $t_0 > 92$ существует минимальная многоугольная диаграмма над H толщины $t > t_0$ и периметра не больше $47t$.*

Доказательство. В силу леммы 2, в графе $\Gamma(H)$ найдется шестиугольник $P = p_1 \ldots p_6$, толщина которого $t(P) > t_0 + 2$ и периметр $\sum_{i=1}^{6} |p_i| \leqslant 46t(P)$.

Заметим, что на сторонах этого шестиугольника P можно выбрать новые вершины $v_1, \ldots, v_n$, являющиеся вершинами графа $\Gamma(H)$, так чтобы полученный многоугольник $Q = q_1 \dots q_n$ удовлетворял условиям $Q \subseteq P$, $\sum_{j=1}^{n} |q_j| \leqslant \sum_{i=1}^{6} |p_i|$ и $t(Q) \geqslant t(P) - 1$. В самом деле, достаточно вместо каждой вершины o_i шестиугольника P, не являющейся вершиной графа $\Gamma(H)$ и лежащей на ребре e_i, выбрать одну или две ближайших вершины графа $\Gamma(H)$ в зависимости от того, целиком ли ребро e_i принадлежит шестиугольнику P. При этом, очевидно, сумма длин сторон не увеличится и сами стороны q_j будут геодезическими, так как они являются либо подпутями геодезических путей p_i, либо путями длины 1.

Построим минимальную диаграмму Δ над H с контуром $\partial\Delta = q'_1 \dots q'_n$, где метки путей q'_i равны меткам q_i. Она является многоугольной, поскольку пути q'_i являются геодезическими.

В силу замечания 2 и с учетом того факта, что расстояние от любой точки $\partial\Delta$ до ближайшей первичной вершины не превосходит 1, получаем $t = t(\Delta) \geqslant t(Q) - 1 > t_0$.

Для периметра диаграммы Δ имеем оценку

$$|\partial\Delta| = \sum_{j=1}^{n} |q'_j| = \sum_{j=1}^{n} |q_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{6} |p_i| \leqslant 46t(P) \leqslant 46(t(Q)+1) \leqslant 46(t(\Delta)+2) < 47t.$$

Последнее неравенство верно в силу того, что $t \geqslant t_0 > 92$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть n-угольная диаграмма Δ с граничной меткой $p = p_1 \cdots p_n$ над группой $H = \langle F|R \rangle$ имеет толщину $t > 0$. Тогда число клеток в диаграмме Δ больше $4t^2/\rho^3$, где $\rho = \max\{\|R_i\|\}$, $R_i \in R$.*

Доказательство. По определению толщины диаграммы на некоторой стороне $p = p_i \subset \partial\Delta$ найдется первичная вершина O такая, что $|OA| \geqslant t$ для любой вершины $A \in p_j$, $j \neq i$.

Диаграмму Δ разобьем на *слои*. *Клеткой первого слоя* (она единственна) назовем клетку, граница которой содержит вершину O. Далее, пусть для некоторого $i > 1$ определены клетки $(i-1)$-го слоя, и объединение S_{i-1} всех замкнутых клеток слоев $\leqslant i-1$ связно. Определим поддиаграмму $\Delta_{i-1} \subset \Delta$ следующим образом:

(i) Δ_{i-1} содержит S_{i-1};

(ii) граница z_{i-1} диаграммы Δ_{i-1} содержится в ∂S_{i-1};

(iii) z_{i-1} имеет минимальную длину среди путей, удовлетворяющих (i) и (ii).

Выделим в границе z_{i-1} максимальный подпуть x_{i-1}, содержащий вершину O, и такой, что его начало и конец лежат на стороне p: $z_{i-1} = x_{i-1}y_{i-1}$. Через p_{i-1} обозначим подпуть стороны p, имеющий общее начало и конец с x_{i-1}. По индукции считаем, что $|p_{i-1}| \geqslant 2(i-1) - 1$ при $i - 1 < 2t/\rho$.

Определим *i-й слой* как множество клеток Π, не принадлежащих Δ_{i-1} и таких, что $\partial\Pi \cap y_{i-1} \neq \emptyset$. Заметим, что при этом множество S_i связно.

Очевидно, что для любой вершины $A \in y_{i-1}$ расстояние $\nu(A, y_{i-2})$ не превосходит половины периметра некоторой клетки. Таким образом, $\nu(A, y_{i-2}) \leqslant \rho/2$, и по индукции $|A - O| \leqslant (i-1)\rho/2 < t$. Отсюда следует, что путь y_{i-1} не содержит ребер $\partial\Delta$ в силу выбора вершины O.

Заметим, что если $p = up_{i-1}v$, где $|u|, |v| \geqslant 1$, то путь p_i содержит, по меньшей мере, по два ребра (полусегмента) из u и v, поскольку $t > (i-1)\rho/2$. Поэтому $|p_i| \geqslant |p_{i-1}| + 2 \geqslant 2i - 1$. По определению i-го слоя путь y_i не может иметь общих ребер с y_{i-1}, если $i - 1 < 2t/\rho$. Это значит, что путь y_i состоит из ребер клеток i-го слоя. Поскольку множество S_i связно, путь y_i не содержит петель по свойству (iii). Таким образом, число m_i клеток i-го слоя не меньше $|y_i|/\rho$.

Путь p_i является геодезическим, поэтому $|y_i| \geqslant |p_i| \geqslant 2i - 1$. Отсюда $m_i \geqslant (2i-1)/\rho$ и для числа m клеток диаграммы имеем оценку

$$m \geqslant \sum_{1 \leqslant i < [2t/\rho]+1} m_i \geqslant \sum_{1 \leqslant i < [2t/\rho]+1} \frac{2i-1}{\rho} \geqslant \frac{1}{\rho}\left((2t/\rho)^2 + (2t/\rho) - \frac{1}{2}[2t/\rho]\right) > 4t^2/\rho^3.$$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что биразмеры треугольников в геодезическом пространстве X не ограничены сверху. По лемме 3 для любого $t_0 > 92$ найдется $t > t_0$ и минимальная многоугольная диаграмма Δ над H такие, что $t = t(\Delta)$ и $|\partial\Delta| \leqslant 47t$. По лемме 4 число клеток $m = m(\Delta)$ в диаграмме Δ больше чем $4t^2/\rho^3$. Но $m(\Delta) = L(W)$, где W – слово, читаемое вдоль границы диаграммы Δ. Таким образом,

$$L(W) = m(\Delta) > 4t^2/\rho^3 \geqslant \frac{4}{\rho^3}\left(\frac{|\partial\Delta|}{47}\right)^2 = 4|W|^2/47^2\rho^3.$$

Поскольку $|W| > t > t_0 > 92$, отсюда следует неравенство

$$\varlimsup_{x\to\infty} l(x)/x^2 > 4/47^2\rho^3 > c > 0$$

для $c = 1/600\rho^3$. Получили противоречие с условием теоремы. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 5 ([5]). *Пусть $c \geqslant 14\delta$ и $c_1 > 12(c+\delta)$, а ломаная $p = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ удовлетворяет условиям $|x_{i-1} - x_i| > c_1$ для $i = 1, \ldots, n$ и $(x_{i-1} \cdot x_{i+1})_{x_i} < c$ для $i = 1, \ldots, n-1$ (если $n \geqslant 2$). Тогда ломаная p содержится в $2c$-окрестности отрезка $[x_0, x_n]$, а отрезок $[x_0, x_n]$ – в 14δ-окрестности ломаной p.*

Лемма 6. *В условиях леммы 5 имеет место неравенство $|x_0 - x_n| \geqslant |x_0 - x_{n-1}| + 10(c+\delta) > 10nc$.*

Доказательство. Рассуждая по индукции, считаем $|x_0 - x_{n-2}| \leqslant |x_0 - x_{n-1}|$. Тогда

$$(x_0 \cdot x_{n-2})_{x_{n-1}} \geqslant \frac{1}{2}(|x_0 - x_{n-1}| + |x_{n-2} - x_{n-1}| - |x_0 - x_{n-2}|) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}c_1 > c + \delta. \quad (3)$$

Отсюда $(x_0 \cdot x_n)_{x_{n-1}} \leqslant c + \delta$, так как в противном случае по определению гиперболического пространства имеем $(x_{n-2} \cdot x_n)_{x_{n-1}} > c$ вопреки условию леммы.

В итоге имеем

$$|x_0 - x_n| = |x_0 - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_n| - 2(x_0 \cdot x_n)_{x_{n-1}} \geqslant \\ \geqslant |x_0 - x_{n-1}| + c_1 - 2(c+\delta) > |x_0 - x_{n-1}| + 10(c+\delta).$$

Лемма доказана.

Лемма 7 ([2]). *Для любого треугольника $x_1x_2x_3$ в δ-гиперболическом пространстве и любых точек $x_2' \in [x_1, x_2]$ и $x_3' \in [x_1, x_3]$ таких, что $|x_1 - x_2'| = |x_1 - x_3'| \leqslant (x_2 \cdot x_3)_{x_1}$ выполнено $|x_2' - x_3'| \leqslant 4\delta$.*

Доказательство теоремы 2. По теореме 1 граф $\Gamma(H)$ является δ-гиперболическим пространством для некоторого $\delta \geqslant 0$.

Зафиксируем некоторый класс сопряженных элементов конечного порядка. Выберем в нем кратчайший элемент g, представляемый в H самым коротким словом W. Очевидно, слово W циклически минимально, и любой путь в $\Gamma(H)$, помеченный словом W или какой-либо его циклической перестановкой, является геодезическим.

Допустим, что $\|W\| \geqslant 180\delta$. Рассмотрим в $\Gamma(H)$ ломаную $l = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$, каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ которой имеет метку W.

Пусть $(x_{i-1} \cdot x_{i+1})_{x_i} \geqslant 4\delta$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда по лемме 7 для точек $u \in [x_{i-1}, x_i]$ и $v \in [x_i, x_{i+1}]$ таких, что $|x_i - u| = |x_i - v| = 4\delta$, имеем $|u - v| \leqslant 4\delta$. Это означает, что подпуть $t = [u, x_i, v]$ не является геодезическим.

С другой стороны, в силу ограничений на длины, метка пути t является не просто подсловом слова W^2, но подсловом некоторой циклической перестановки слова W. По выбору слова W путь t должен быть геодезическим. Полученное противоречие означает, что $(x_{i-1} \cdot x_{i+1})_{x_i} < 4\delta$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

В этих условиях применима лемма 6 с константами $c = 14\delta$ и $c_1 = 180\delta$, согласно которой $|x_0 - x_n| > 140\delta$ при $n > 0$. Отсюда $x_0 \neq x_n$ и, следовательно, $W^n \neq 1$ в H ни для какого $n > 0$, то есть элемент g имеет бесконечный порядок в группе H, что противоречит его выбору. Таким образом, $\|W\| < 180\delta$. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Оказывается, для достаточно длинных циклически минимальных периодов можно получить требуемую оценку, не накладывая условия невырожденности на произведение H. Более того, эта оценка получается универсальной для всех больших периодов.

Лемма 8. *Для любого $\theta > 0$ и любого гиперболического произведения H найдется число $K = K(\theta, H)$ такое, что для всякого периодического слова V с циклически минимальным периодом A длины больше K выполнено*

$$|V| + 4 \geqslant (1-\theta)\|V\|. \tag{4}$$

Доказательство. По теореме 1 граф $\Gamma(H)$ гиперболического произведения H является δ-гиперболическим пространством для некоторого $\delta \geqslant 0$. Будем сразу считать, что $K > 4 + 4\delta$. Отметим также, что если $\|V\| \leqslant \|A\|$, то $|V| + 2 \geqslant \|V\|$ в силу циклической минимальности слова A, и в этом случае неравенство (4) выполнено.

Сначала выведем более сильное неравенство

$$|V| \geqslant (1-\theta)\|V\| \tag{5}$$

для слов V, таких что разложение $A^n \equiv U_1 V U_2$ приведено.

Пусть $\bar{A}$ – произвольный циклически минимальный сдвиг слова A и A' – любое начало слова $\bar{A}$. Рассмотрим в графе $\Gamma(H)$ геодезический треугольник с вершинами a, b, c, отвечающими элементам $1, \bar{A}^{-1}, A'$. Тогда $(b \cdot c)_a \leqslant 2\delta + 1$. В самом деле, в противном случае можно записать $\bar{A} \equiv BC$, $A' \equiv DE$, где $2\delta + 1 < |C| = |D| \leqslant 2\delta + 2 < \frac{1}{2}\|A\|$, и в силу леммы 7 имеем $|CD| \leqslant 4\delta < \|CD\|$ вопреки циклический минимальности слова A.

Представим слово V в виде $V \equiv A_1 \bar{A}^s A_2$, где $\bar{A}$ – некоторый циклический сдвиг слова A и $\frac{1}{2}|A| \leqslant |A_1|, |A_2| \leqslant |A|$. Выберем некоторое кратчайшее (длины́ $|V|$) слово W равное в группе H слову V, и рассмотрим в графе $\Gamma(H)$ геодезический $(s+3)$-угольник $P = [x_0, \ldots, x_{s+2}]$, стороны $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{s+1}, x_{s+2}], [x_0, x_{s+2}]$ которого имеют, соответственно, метки $A_1, \bar{A}, \ldots, \bar{A}, A_2, W$ (рис. 1).

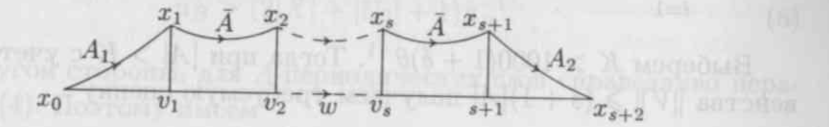

Рис. 1.

По доказанному выше $(x_{i-1} \cdot x_{i+1})_{x_i} \leqslant 2\delta + 1$ для $i = 1, \ldots, s+1$. Значит, при $K > 1000(1+\delta)$ применима лемма 5, в силу которой стороны $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{s+1}, x_{s+2}]$ многоугольника P лежат в $100(1+\delta)$-окрестности стороны $[x_0, x_{s+2}]$. Соединим точки $x_0, x_1, \ldots, x_{s+1}, x_{s+2}$ с некоторыми точками $x_0 = v_0, v_1, \ldots, v_{s+1}, v_{s+2} = x_{s+2}$ на стороне $[x_0, x_{s+2}]$ путями длины́ не больше $100(1+\delta)$. Тогда $|v_i - v_j| \geqslant |x_i - x_j| - 200(1+\delta)$ при $1 \leqslant i, j \leqslant s+2$.

Отметим также, что для любого $i = 1, \ldots, s+1$ точка v_i расположена на стороне $[x_0, x_{s+2}]$ между точками v_{i-1} и v_{i+1}. В самом деле, по доказанному выше и по построению многоугольника P имеем

$$|x_{i+1} - x_{i-1}| \geqslant |x_i - x_{i-1}| + |x_{i+1} - x_i| - 4\delta - 2, \quad |x_{i+1} - x_i| \geqslant \frac{1}{2}K,$$

откуда

$$\begin{aligned}|v_i - v_{i-1}| &\leqslant |x_i - x_{i-1}| + 200(1+\delta) \leqslant \\ &\leqslant |x_{i+1} - x_{i-1}| - |x_{i+1} - x_i| + 4\delta + 2 + 200(1+\delta) \leqslant \\ &\leqslant |v_{i+1} - v_{i-1}| - |x_{i+1} - x_i| + 4\delta + 2 + 400(1+\delta) < |v_{i+1} - v_{i-1}|.\end{aligned}$$

Оценим длину стороны $[x_0, x_{s+2}]$:

$$|x_{s+2} - x_0| = \sum_{i=1}^{s+2} |v_i - v_{i-1}| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{s+2} |x_i - x_{i-1}| - 200(1+\delta)(s+2) = \|V\| - 200(s+2)(1+\delta).$$

Выберем $K > 1000(1+\delta)\theta^{-1}$. Тогда при $|A| > K$ с учетом неравенства $\|V\| \geqslant (s+1)|A|$ получаем требуемую оценку

$$|V|/\|V\| \geqslant 1 - 200(1+\delta)(s+2)\|V\|^{-1} \geqslant 1 - \frac{200(1+\delta)(s+2)}{(s+1)|A|} \geqslant 1 - \theta.$$

Рассматривая произвольное A-периодическое слово V, заметим, что можно указать такое полуприведенное разложение $V \equiv U_1\overline{V}U_2$, что U_1 и U_2 являются слогами (элементами множителей G_{i_1}, G_{i_2}), и имеет место приведенное разложение $A^n \equiv U_1'\overline{V}U_2'$. С учетом выведенного выше неравенства (5), примененного к слову $\overline{V}$, имеем

$$(1-\theta)\|V\| = (1-\theta)\|U_1\overline{V}U_2\| \leqslant (1-\theta)(\|U_1\| + \|\overline{V}\| + \|U_2\|) \leqslant$$
$$\leqslant (1-\theta)(\|\overline{V}\| + 2) \leqslant |\overline{V}| + 2(1-\theta) \leqslant |V| + 2 + 2(1-\theta) \leqslant |V| + 4.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. По лемме 8 неравенство (2) выполнено для любого $n_B > 4$ и $k_B = 1$, если $|B| > K = K(\theta, H)$.

Зафиксируем теперь некоторое неединичное циклически минимальное слово B, представляющее свободный элемент в H и такое, что $|B| \leqslant K$, и рассмотрим слова B^k, $k \geqslant 1$. Для каждого слова B^k выберем циклически минимальное слово A_k, сопряженное с ним в H. В силу невырожденности произведения H найдется слово $A \equiv A_k = XB^kX^{-1}$ длины больше K. (Здесь X и k зависят от B.) Положим $k_B = |A|/k|B|$.

Любое B-периодическое слово V можно представить в виде $V \equiv U_1\bar{B}^{kt}U_2$, где $|U_1| = 1$ (то есть U_1 является слогом), $|U_2| \leqslant k|B|$, а $\bar{B}$ — циклически минимальный циклический сдвиг слова B. Тогда

$$|V| = |U_1X^{-1}A^tXU_2| \leqslant 1 + 2|X| + |A^t| + |U_2| \leqslant$$
$$\leqslant k_B\|\bar{B}^{kt}\| + 1 + 2|X| + |U_2| < k_B(\|V\| + n_B)$$

при

$$n_B > (2|X| + |U_2| + 1)k_B^{-1}. \tag{6}$$

С другой стороны, для A-периодических слов справедливо неравенство (4). Поэтому имеем

$$|V| \geqslant |A^t| - |U_1| - 2|X| - |U_2| \geqslant (1-\theta)|A^t| - 4 - 1 - 2|X| - |U_2| \geqslant$$
$$\geqslant (1-\theta)k_B\|B^{kt}\| - 5 - 2|X| - |U_2| \geqslant$$
$$\geqslant (1-\theta)k_B(\|V\| - \|U_1\| - \|U_2\|) - 5 - 2|X| - |U_2| =$$
$$= (1-\theta)k_B(\|V\| - 1 - \|U_2\|) - 5 - 2|X| - |U_2| > k_B((1-\theta)\|V\| - n_B),$$

если только

$$n_B > (5 + 2|X| + |U_2| + (1-\theta)k_B(1 + \|U_2\|))k_B^{-1}. \tag{7}$$

Выбирая n_B так, чтобы выполнялись неравенства (6) и (7), получаем требуемые оценки. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.Ю. Ольшанскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Gromov M. Hyperbolic groups // Essays in Group Theory / ed. S.M. Gersten. M.S.R.I. Pub. 8. Springer, 1987. 75–263.

[2] Ghys E., de la Harpe P. Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Birkhäuser, 1991. / Русский перевод: Гиперболические группы по Михаилу Громову / ред. Гис Э., де ля Арп П. М.: Мир, 1992.

[3] Lyndon R., Schupp P. Combinatorial group theory. Springer-Verlag, 1977. / Русский перевод: Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[4] Ol'shanskii A.Yu. Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality // Int. J. Alg. and Comp. 1993. V. 1. № 3. P. 281–289.

[5] Ольшанский А.Ю. Периодические фактор-группы гиперболических групп // Мат. сборник. 1991. Т. 182. № 4. С. 543–567.

Переходные системы с максимальной вариативностью относительно кодирований состояний

С.Б. Родин

Введение

В статье изучаются переходные системы, обладающие тем свойством, что все операторы, задаваемые всевозможными кодированиями данной переходной системы, различны. Данное свойство называется свойством максимальности.

Прежде всего для каждого натурального n приведен пример переходной системы с n состояниями, обладающей этим свойством.

Затем сформулирован критерий свойства максимальности в терминах порождающих полугруппы преобразований множества состояний Q, индуцированных входными последовательностями переходной системы. А именно, переходная система обладает свойством максимальности тогда и только тогда, когда для образующих переходной системы найдется только тривиальная перестановка, коммутирующая с ними.

В последней части статьи приведены две асимптотические оценки (верхняя и нижняя) количества переходных систем с n состояниями, не обладающих свойством максимальности (где n – произвольное натуральное число).