того чтобы убедиться в справедливости данного факта, достаточно положить в первом случае $x_1 = 1$, а во втором $x_2 = 0$ и применить аналогичную процедуру доказательства).

Заметим, что функция $f_{\&}(x_1, f_m(x_2, x_3, x_4))$ удовлетворяет свойству A^∞, а также является α-функцией, а функция $f_\vee(x_1, f_m(x_2, x_3, x_4))$ удовлетворяет свойству a^∞, а также является монотонной. Тогда, пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получим, что оценка $S^K_{max}(n) > n$ справедлива для классов F_2^∞, F_5^∞, а соответственно и для всех классов $F_i^\infty, F_i^\mu, i = 1, ..., 8, \mu = 3, 4, ...$

Для классов же $S_i, P_i, i = 1, 3, 5, 6; L_j, j = 1, ..., 4; O_k, k = 1, ..., 8$ величина $S^K_{max}(n)$ очевидно равняется 1 (ввиду того, что в данном случае автоматы должны проверять условия наличия в записи формулы 0, 1, четности 0 или 1, четности вхождений функции отрицания соответственно, для чего требуется константное число состояний, не зависящее от длины формулы).

Список литературы

[1] Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Андреев А.Е., Часовских А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения формул // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. 1996. №4.

[4] Кудрин А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения функций, заданных в префиксном виде // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. 1998. №1.

[5] Кудрин А.А. Сложность автоматов, вычисляющих значения формул над базисом, состоящим из одной булевской функции (записанной в операторном виде) // Интеллектуальные системы. М., 1999. Т. 4. Вып. 1–2. С. 285–298.

Сложность резолюций на 3-ДНФ

В.Н. Лебедев, М.И. Тарасов

Задача определения тождественной истинности заданной ДНФ дополнительна к NP-полной задаче: существует ли хотя бы один набор значений переменных, обращающий заданную ДНФ в ноль. Поэтому для нее не существует полиномиального (детерминированного или недетерминированного) алгоритма, если $NP \neq co\text{-}NP$. С другой стороны экспоненциальность некоторых известных алгоритмов, решающих эту задачу, до сих пор не доказана.

Метод резолюций заключается в последовательном применении соотношения $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2$, где K_1, K_2 – некоторые элементарные конъюнкции (конъюнкты). Очевидно, что конъюнкт K_1K_2 выполняется только на тех наборах, на которых выполнен хотя бы один из конъюнктов xK_1 или $\overline{x}K_2$. Тогда из заданной ДНФ можно вывести пустой конъюнкт, если и только если ДНФ является тавтологией.

Неполиномиальность регулярной резолюции, то есть резолюции с некоторыми ограничениями, была доказана Цейтиным [1]. Позднее Хакен в [2] показал экспоненциальность резолюций в общем случае. Им была рассмотрена последовательность тавтологий, описывающих принцип Дирихле: если n предметов разместить в $(n+1)$ ящике, то по крайней мере один из ящиков будет пуст. Формально это можно описать следующим образом:

$$PF_n \overset{\text{def}}{=} \left(\bigvee_{j=1}^{n+1}\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x}_{ij}\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j_1 \neq j_2} x_{ij_1}x_{ij_2}\right).$$

Нетрудно видеть, что PF_n является тавтологией. В самом деле, представим набор значений переменных PF_n в виде булевой матрицы размерности $n \times (n+1)$. Если в какой либо строке этой матрицы стоит две или более единицы, то найдется конъюнкт вида $x_{ij_1}x_{ij_2}$, который будет выполнен на этом наборе. В противном случае во всей матрице не более n единиц. Тогда, по принципу Дирихле, хотя бы один из $n+1$ столбцов будет содержать только нули. Но в таком случае на этом наборе будет выполнен один из конъюнктов вида $\overline{x}_{1j} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_{nj}$. Таким образом PF_n тождественно равна единице.

В данной работе, используя метод Хакена, мы исследуем сложность резолюций при уменьшении ранга конъюнкций в заданной ДНФ. Основным результатом работы является построение минимального примера ДНФ, на которых метод резолюций экспоненциален. А именно, представлена последовательность 3-ДНФ (число литералов в каждом конъюнкте не более трех), на которой метод резолюций экспоненциален. Заметим, что на 2-ДНФ резолюции полиномиальны в силу замкнутости множества конъюнкций ранга не более два относительно резолюционных преобразований. Поэтому для 2-ДНФ число промежуточных конъюнктов можно оценить полиномом второй степени от числа переменных.

В дальнейшем сложностью резолюционного доказательства будем считать минимальное число промежуточных конъюнктов, порожденных в процессе вывода, то есть полагаем выбор конъюнктов, к которым применяется метод, оптимальным.

Будем считать, что конъюнкты порождаются последовательно один за другим. Сам резолюционный вывод будем представлять в виде бинарного дерева, вершины которого помечены конъюнктами таким образом, чтобы обоим непосредственным потомкам производной вершины были приписаны те конъюнкты, из которых получен данный. Корню приписывается пустой конъюнкт, а листья – исходные конъюнкты. Отметим, что многие вершины могут быть помечены одинаковыми конъюнктами. Конъюнкт α будем называть потомком конъюнкта β, если в дереве вывода существует путь из корня до α, проходящий через β.

Знаком $\exists!$ в дальнейшем будем обозначать существование и единственность некоторого объекта.

Переменные $(x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n+1}}}$, от которых зависит PF_n, будем в дальнейшем называть *основными*. Используя сведение произвольной ДНФ к 3-ДНФ, не меняющее статуса формулы как тавтологии или нетавтологии (смотри [3]), получим следующую последовательность 3-ДНФ:

Определение 1. PF_n^3 есть 3-ДНФ, полученная из PF_n введением дополнительных переменных $(y_{ij})_{\substack{i=\overline{3,n-1}\\ j=\overline{1,n+1}}}$ следующим образом:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x}_{ij} \longrightarrow \overline{x}_{1j}\overline{x}_{2j}y_{3j} \vee \overline{y}_{3j}\overline{x}_{3j}y_{4j} \vee \ldots \vee \overline{y}_{n-1,j}\overline{x}_{n-1,j}\overline{x}_{nj}, \forall j = \overline{1, n+1}.$$

Покажем, что сложность резолюционного доказательства PF_n^3 можно оценить снизу некоторой экспонентой от n (в PF_n^3 входит всего $(n+1)(n-2) + nC_{n+1}^2 = O(n^3)$ конъюнктов).

Так как PF_n^3 зависит от $n(n+1)$ основных переменных и от $(n-3)(n+1)$ дополнительных, то любой набор значений переменных PF_n^3 можно представить в виде $V = (V', V'')$, где $V' = (v'_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n+1}}}$ – булева матрица значений основных переменных, $V'' = (v''_{ij})_{\substack{i=\overline{3,n-1}\\ j=\overline{1,n+1}}}$ – булева матрица значений дополнительных переменных.

Пусть далее всюду $k \stackrel{\text{def}}{=} [n/8]\,, m \stackrel{\text{def}}{=}\,]n/2[$. n предполагаем достаточно большим, более точно $n \geqslant 200$.

Определим *критические наборы (critical truth assignments)*

Определение 2. $CTA \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ V = (V', V'')$:

$\exists! p \forall i \colon v'_{ip} = 0;$

$\forall j \neq p \exists! i_j \colon v'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};$

$\forall i \exists! j_i \colon v'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};$

$$v''_{ip} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leqslant m \\ 1, & \text{иначе} \end{cases};$$

$$\forall j \neq p\colon v''_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leqslant i_j (i_j\colon v'_{i_j j} = 1) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\}$$

Заметим, что в матрице V' в каждой строке (столбце, кроме столбца p) находится ровно одна единица. Столбец p будем называть 0-столбцом V. Очевидно, что $|CTA| = (n+1)!$ – столько, сколько существует различных матриц V' (V'' достраивается по V' единственным способом). Также легко видеть, что в PF_n^3 есть только один конъюнкт, который выполнен на наборе $V \in CTA$ с 0-столбцом p: $\overline{y}_{mp} \cdot \overline{x}_{mp} \cdot y_{m+1,p}$.

Определим множество $FS1$ – *фиксированных единиц (fixed sets 1)* следующим образом:

$$FS1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{i_1 j_1} \cdot x_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k j_k} : i_s \neq i_l, j_s \neq j_l, \text{ если } s \neq l\}.$$

Тогда мощность множества $FS1$

$$h(n) \stackrel{\text{def}}{=} |FS1| = C_{n+1}^k A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} d_i, \text{ где } d_i \stackrel{\text{def}}{=} C_{k+1}^i C_{n-k}^{k-i}.$$

Для произвольного конъюнкта α введем следующие величины:

$$\overline{Y}^j_{\max}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\{1\} \cup \{i : \overline{y}_{ij} \in \alpha\}\},$$

$$Y^j_{\min}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\{n+1\} \cup \{i : y_{ij} \in \alpha\}\}.$$

Определение 3. Будем говорить, что α «свободен» от литерала $\overline{x}_{ij}$ (определение не применяется к литералам $x_{ij}, y_{ij}, \overline{y}_{ij}$), если

1) $\alpha \not\ni \overline{x}_{ij}$;
2) $\overline{Y}^j_{\max}(\alpha) \leqslant i < Y^j_{\min}(\alpha)$.

Лемма 1. *$\forall \alpha$ – конъюнкта, $\forall V \in CTA$ с 0-столбцом p: $\alpha(V) = 1$ тогда и только тогда, когда:*

1) $v'_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} \notin \alpha \quad (\forall i, j)$;

2) $v'_{ij} = 1 \Rightarrow \alpha$ свободен от $\overline{x}_{ij} \quad (\forall i, j)$;

3) $\overline{Y}^p_{\max}(\alpha) \leqslant m < Y^p_{\min}(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha(V) = 1$. Тогда, если $v'_{ij} = 0$, то $x_{ij} \notin \alpha$, так как в противном случае $\alpha(V) = 0$.

Также, если $v'_{ij} = 1$, то $\overline{x}_{ij} \notin \alpha$. Если $\overline{Y}^j_{\max}(\alpha) > i$, то $\exists i' > i\colon \overline{y}_{i'j} \in \alpha$, но в таком случае $\alpha(V) = 0$ (по определению $CTA\colon v'_{ij} = 1 \Rightarrow \forall i' > i\colon v''_{i'j} = 1$). Значит $\overline{Y}^j_{\max}(\alpha) \leqslant i$. Аналогично $Y^j_{\min}(\alpha) > i$. Тогда по определению α свободен от $\overline{x}_{ij}$.

Если $\overline{Y}^p_{\max}(\alpha) > m$, то $\exists i > m\colon \overline{y}_{ip} \in \alpha$. Но так как p – 0-столбец $V \in CTA$, то $\forall i > m\colon v''_{ip} = 1 \Rightarrow \alpha(V) = 0$, что невозможно. Значит $\overline{Y}^p_{\max}(\alpha) \leqslant m$. Аналогично $Y^p_{\min}(\alpha) > m$.

Для доказательства обратного утверждения проверим, что все литералы, входящие в α выполнены на V. Действительно, из (1) следует, что если $x_{ij} \in \alpha$, то $v'_{ij} = 1$. Также если $\overline{x}_{ij} \in \alpha$, то $v'_{ij} = 0$, так как в противном случае по (2) α должен быть свободен от $\overline{x}_{ij}$, а значит и не содержать этот литерал.

Рассмотрим теперь литералы $y_{ij}, \overline{y}_{ij}$. Возьмем произвольное $j \neq p$. Тогда по определению $CTA\ \exists! i\colon v'_{ij} = 1$. Так как по предположению (2) α свободен от $\overline{x}_{ij}$, то $\overline{Y}^j_{\max}(\alpha) \leqslant i < Y^j_{\min}(\alpha)$. Таким образом, если для некоторого t $\alpha \ni y_{tj}$, то $t \geqslant Y^j_{\min}(\alpha) > i$, а значит по определению CTA $v''_{tj} = 1$. Аналогично $\overline{y}_{tj} \in \alpha \Rightarrow v''_{tj} = 0$.

Осталось рассмотреть литералы $y_{ip}, \overline{y}_{ip}$. Если $y_{ip} \in \alpha$, то по (3) $i \geqslant Y^p_{\min}(\alpha) > m$. Тогда по определению CTA $v''_{ip} = 1$. Также $\overline{y}_{ip} \in \alpha \Rightarrow i \leqslant \overline{Y}^j_{\max}(\alpha) \leqslant m \Rightarrow v''_{ip} = 0$.

Таким образом все литералы, входящие в конъюнкт α, выполняются на наборе V. Значит $\alpha(V) = 1$.

Определение 4. $F_j(\alpha)$ есть число различных литералов $\overline{x}_{ij}$, от которых α свободен:

$$F_j(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left|\{i : \alpha \text{ свободен от } \overline{x}_{ij}\}\right|.$$

Заметим, что $0 \leqslant F_j(\alpha) \leqslant \max\{0, Y^j_{\min}(\alpha) - \overline{Y}^j_{\max}(\alpha)\} \leqslant n$.

Введем множество *наполовину нулевых конъюнктов (half zero clause)*

$$HZC \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha : \exists p\colon \left[\frac{n}{4}\right] \leqslant F_p(\alpha) < \left[\frac{3n}{4}\right]\right\}.$$

Определение 5. Будем говорить, что $\alpha \in HZC$ «представляет» $V \in CTA$ с 0-столбцом p, если $\alpha(V) = 1$ и $[n/4] \leqslant F_p(\alpha) < [3n/4]$.

Лемма 2. *В любом резолюционном доказательстве PF^3_n: $\forall V \in CTA$ с 0-столбцом p $\exists \alpha \in HZC$: α представляет V.*

Доказательство. Найдем в дереве вывода путь $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ от листа $\alpha_1 = \overline{y}_{mp} \cdot \overline{x}_{mp} \cdot y_{m+1,p}$ $(F_p(\alpha_1) = 0)$ до корня $\alpha_N = \emptyset$ $(F_p(\alpha_N) = n)$, все вершины которого выполняются на V. Но по лемме 1 из $\alpha_t(V) = 1$ следует, что $\overline{Y}^p_{\max}(\alpha_t) \leqslant m < Y^p_{\min}(\alpha_t)$.

Тогда $\forall t = \overline{1, N-1}$: если $F_p(\alpha_{t+1}) > F_p(\alpha_t)$, то

1) Либо правило резолюции применялось к α_t по литералу $\overline{x}_{ip}$ ($i \in \overline{1, n}$). Тогда $F_p(\alpha_{t+1}) - F_p(\alpha_t) = 1$;
2) Либо по литералу $\overline{y}_{ip}$, $i \leqslant m$. Тогда $F_p(\alpha_{t+1}) - F_p(\alpha_t) \leqslant \overline{Y}^p_{\max}(\alpha_t) - \overline{Y}^p_{\max}(\alpha_{t+1}) \leqslant m - 1 \leqslant [n/2]$;
3) Либо по литералу y_{ip}, $i > m$. Тогда $F_p(\alpha_{t+1}) - F_p(\alpha_t) \leqslant Y^p_{\min}(\alpha_{t+1}) - Y^p_{\min}(\alpha_t) \leqslant (n+1) - (m+1) = [n/2]$.

Таким образом на каждом шаге $F_p(\alpha_t)$ увеличивается не более, чем на $[n/2]$. Но, так как $[n/4] - 1 + [n/2] \leqslant [3n/4] - 1 < [3n/4]$, то $\exists t$: $[n/4] \leqslant F_p(\alpha_t) < [3n/4]$. Значит $\alpha_t \in HZC$ – искомый конъюнкт.

Лемма 3. $V \in CTA$ с 0-столбцом p. $\alpha\colon \alpha(V) = 1$. *Тогда, либо $F_p(\alpha) < [3n/4]$, либо у α в дереве вывода есть потомок $\beta \in HZC$: β представляет V.*

Доказательство. Аналогично лемме 2, надо рассмотреть путь от листа $\overline{y}_{mp} \cdot \overline{x}_{mp} \cdot y_{m+1,p}$ до α.

Пусть $V, W \in CTA$. p – 0-столбец V, q – 0-столбец W. Назовем W *q-соседом* V, если W получается из V перестановкой p и q основных и дополнительных столбцов.

Лемма 4. *$\alpha \in HZC$ представляет $V \in CTA$ с 0-столбцом p; $q \neq p$; $r\colon v_{rq} = 1$; $x_{rq} \notin \alpha$; α свободен от $\overline{x}_{rp}$; $F_q(\alpha) > m$; W – q-сосед V. Тогда $\alpha(W) = 1$.*

Доказательство. Так как V и W совпадают всюду, за исключением столбцов p и q, то достаточно проверить переменные x и y только из этих столбцов.

$\forall i$: $x_{ip} \notin \alpha$, потому что p – 0-столбец V, а $\alpha(V) = 1$. Кроме того, α свободен от $\overline{x}_{rp}$, а $v'_{rq} = 1$ – единственная единица в основном столбце q. Значит условия леммы 1 выполнены для переменных из столбцов p.

По условию $x_{rq} \notin \alpha \Rightarrow \forall i\colon x_{iq} \notin \alpha$ (так как $V \in CTA, \alpha(V) = 1$). Так как $F_q(\alpha) > m$, то $\overline{Y}^q_{\max}(\alpha) \leqslant m < Y^q_{\min}(\alpha)$. Значит условия леммы 1 выполнены и для переменных из столбцов q.

Значит по лемме 1: $\alpha(W) = 1$.

Для произвольной конъюнкции $S \in FS1$ определим следующие множества:

$$CTA_S \stackrel{\text{def}}{=} \{V \in CTA : S(V) = 1\}.$$

$$HZC_S \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in HZC : \exists V \in CTA_S\ \alpha \text{ представляет } V\}.$$

$$HCC \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_S : \alpha_S \in HZC_S - \text{первый конъюнкт из } HZC_S \text{ в резолюционном выводе}\}.$$

Заметим, что по лемме 2 $HZC_S \neq \emptyset$, а значит множество HCC *очень сложных конъюнктов (highly complex clause)* определено корректно.

Лемма 5. $\forall \alpha_S \in HCC\ \exists\{j_1, \dots, j_{k+1}\}\colon \forall t = \overline{1, k+1}$ *либо* $\exists x_{ij_t} \in \alpha_S$, *либо* $F_{j_t}(\alpha_S) < [3n/4]$.

Доказательство. Пусть $S \in FS1$, $V \in CTA_S$ с 0-столбцом p, которую представляет α_S.

Поскольку $\alpha_S \in HZC_S$, то $F_p(\alpha_S) \geqslant [n/4]$.

Так как $[n/4] - k \geqslant k$, то существует по крайней мере k строк $\{i_1, \ldots, i_k\}$, не содержащих переменных из S ($\forall t = \overline{1,k}\colon \forall j\colon x_{i_t j} \notin S$), и таких, что $\forall t = \overline{1,k} : \alpha_S$ свободен от $\overline{x}_{i_t p}$).

Тогда по определению CTA: $\forall i_t \exists! j_t\colon v'_{i_t j_t} = 1$. Значит найдено множество столбцов $\{j_1, \ldots, j_k\}$.

$\forall q \in \{j_1, \ldots, j_k\}$ если $\exists x_{iq} \in \alpha_S$ или $F_q(\alpha_S) < [3n/4]$, то q удовлетворяет условиям леммы. В противном случае рассмотрим $r\colon v'_{rq} = 1$. Так как $F_q(\alpha_S) \geqslant [3n/4] > m$; $x_{rq} \notin \alpha_S$; α_S свободен от $\overline{x}_{rp}$, то по лемме 4: α_S(q-сосед V) $= 1$. Но тогда по лемме 3 $\exists \beta \in HZC_S$ – потомок α_S, который представляет q-соседа V. Однако, легко видеть, что q-сосед V также принадлежит CTA_S. Значит получено противоречие ($\alpha_S \in HCC$ – по определению первый конъюнкт, который представляет какой-нибудь $V \in CTA_S$).

Таким образом найдено k столбцов, удовлетворяющих условиям леммы. Учитывая, что $F_p(\alpha_S) < [3n/4]$ (по определению HZC_S), получим $k+1$ искомых столбцов: $\{j_1, \ldots, j_k, p\}$.

Оценим количество различных конъюнкций $S \in FS1$, которым может соответствовать один и тот же конъюнкт $\alpha_S \in HCC$, функцией от n. Сначала найдем $(k+1)$ столбец из леммы 5. Потом по лемме 1 заметим, что если $\alpha_S(V) = 1$, то из $x_{iq} \in \alpha_S$ следует, что $v'_{iq} = 1$, а из $v'_{iq} = 1$, что α_S свободно от $\overline{x}_{iq}$. Таким образом, в каждом из $(k+1)$ столбцов или ровно одно, или не более $[3n/4]$ мест для размещения единицы. Если в $(k+1)$ «хорошем» столбце матрицы V' размещается i единиц, то в оставшихся $(n-k)$ столбцах $(k-i)$ единиц. Поскольку матрица V'' определяется по V' однозначно, то всего у нас есть не более $C^i_{k+1}[3n/4]^i C^{k-i}_{n-k} A^{k-i}_{n-i}$ способов. Суммируя по i получаем:

$$g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k} d_i \left[\frac{3n}{4}\right]^i \frac{(n-i)!}{(n-k)!}$$

(напомним, что $d_i = C^i_{k+1} C^{k-i}_{n-k}$).

Оценим мощность множества HCC:

$$|HCC| \geqslant \frac{h(n)}{g(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{k} d_i}{\sum_{i=0}^{k} d_i [3n/4]^i \frac{(n-i)!}{n!}} \geqslant \frac{\sum_{i=0}^{k} d_i}{\sum_{i=0}^{k} d_i\, (6/7)^i}$$

(так как $[3n/4]/(n-i) \leqslant \frac{3n}{4}/(n-k) \leqslant \frac{3n}{4}/\frac{7n}{8} = 6/7$).

При $n \geqslant 200$, $i+1 \leqslant n/100$ получим

$$\frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{(k+1-i)(k-i)}{(i+1)(n-2k+i+1)} > \frac{((k+1)-(i+1))^2}{(i+1)(n-2(k+1)+5(i+1))} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(n/8 - n/100)^2}{(n/100)(n - n/4 + n/20)} > \frac{(n/10)^2}{(n/100)(4n/5)} = \frac{5}{4} > \frac{7}{6}.$$

Таким образом, последовательность $d_i\,(6/7)^i$ монотонно возрастает при $i+1 \leqslant n/100$.

Положим $t = [n/200]$. Тогда

$$\frac{h(n)}{g(n)} \geqslant \frac{\sum_{i=t}^{k} d_i}{2\sum_{i=t}^{k} d_i\,(6/7)^i} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right)^t \geqslant \frac{3}{7}\left(\frac{7}{6}\right)^{n/200}.$$

Итого, при $n \geqslant 200$, сложность любого резолюционного доказательства PF^3_n можно оценить снизу величиной

$$\frac{3}{7}\left(\frac{7}{6}\right)^{n/200}.$$

Авторы благодарят Кудрявцева В.Б. за постоянное внимание к работе. Результаты получены при поддержке гранта РФФИ 98-01-00846.

Список литературы

[1] Цейтин Г.С. О сложности вывода в исчислении высказываний // Зам. научн. семинаров ЛАМИ АН СССР. 1968. Т. 8. С. 234–259.

[2] Haken A. The interactability of resolutions // Theoretical Computer Science. 1985. V. 39. P. 297–308. / рус. перевод: Хакен А. Труднорешаемость резолюций // Кибернетический сборник. №28. 1991. С. 179–194.

[3] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Оценки мощности некоторых итеративных множеств

А.В. Матвеев

Устанавливаются точные значения числа элементов множеств, построенных с помощью начальных данных и булевых функций из конкретных замкнутых классов.

1. Введение

В работе исследуются мощности множеств, полученных итеративной процедурой из некоторого булевского вектора $\overline{x}$. В качестве компонент итеративного отображения рассматриваются булевы функции из некоторых замкнутых классов в множестве всех булевых операторов $\mathbf{P}_2^n = \underbrace{\mathbf{P}_2 \times \cdots \times \mathbf{P}_2}_{n \text{ штук}}$, где $n \in \mathbb{N}$. В одномерном случае $(n = 1)$ – это классы $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ [1].

2. Основные понятия

Пусть $f(\overline{x})$ – булева функция от n переменных, то есть $f : \mathbf{E}_2^n \to \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_2 = \{0,1\}$. Известно, что каждая функция $f(\overline{x})$ из класса $\mathbf{P}_2$ может быть однозначно представлена при помощи полиномов Жегалкина: $f(\overline{x}) = c_1 \oplus c_2x_1 \oplus \cdots \oplus c_{n+1}x_n \oplus c_px_1x_2\cdots x_n$, где $p = 2^n, \overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – вектор булевских переменных, $c_1, c_2, \cdots, c_p$ – набор булевских коэффициентов, а сумма понимается как сумма по модулю 2.