[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.

[15] Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975.

[16] International Tables for Crystallography. A, IUC, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1984.

Математические модели расчета цены опциона американского типа

А.Н. Моисеев

1. Введение

Динамический переход России к рыночной экономике предопределил создание и развитие рынка ценных бумаг, как одной из составляющих финансового рынка. Рынок ценных бумаг характеризуется большим количеством инвестиционных возможностей, значительным объемом информации о потенциальных вариантах выбора, что делает актуальной задачу выбора оптимального портфеля ценных бумаг из бесконечного числа возможных.

Анализ и прогноз поведения рынка ценных бумаг остается достаточно сложной задачей. Рынок подвержен значительным колебаниям курсовых стоимостей, которые во многом определяются спекулятивным настроением участников торгов. В связи с этим возросла роль рынка производных ценных бумаг (опционов, фьючерсов и др.) и увеличилась потребность в моделировании поведения инвестора в различного рода опционных и фьючерсных контрактах, так как перед инвесторами возникает необходимость защиты своих инвестиций от возможных потерь из-за неопределенности будущих стоимостей ценных бумаг. Опционом называется контракт, заключенный между двумя лицами, в соответствии с которым одно лицо предоставляет другому лицу право купить определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени (опцион call) или продать определенный (базовый) актив по определенной цене в рамках определенного периода времени (опцион put). Лицо, которое получило опцион и таким образом приняло решение, называется покупателем опциона, который должен платить за это право. Лицо, которое продало опцион, и отвечающее на решение покупателя, называется продавцом опциона. Таким образом, продавец опциона берет на себя обязательства по исполнению опциона, то есть обязательства по продаже в будущем некоторого актива по фиксированной (на момент продажи опциона) цене. В этом заключается риск продавца опциона, так как цена на базовый актив в будущем может оказаться больше той, которая указана в опционном контракте и, следовательно, продавец несет потери. За то, чтобы продавец взял на себя риск, покупатель уплачивает ему некоторую сумму, называемую ценой опциона. Предполагается также, что продавец опциона для обеспечения обязательств имеет возможность покупать и продавать акции на рынке согласно некоторой стратегии. Определение такой стратегии, а также определение рациональной (рекомендуемой) стоимости опциона – основные задачи теории расчетов опционов.

Как показывают исследования отечественных и зарубежных ученых, ни одна устойчивая стратегия торговли ценными бумагами не дает постоянной прибыли, поэтому участникам рынка необходимо иметь в своем арсенале целый набор правил принятия решений, из которого следует выбирать наиболее соответствующие той или иной конкретной ситуации. Следовательно, актуальными являются задачи построения математического аппарата, позволяющего рассчитывать рациональные стоимости производных ценных бумаг и динамические стратегии инвестирования полученных средств.

В статье решаются следующие задачи:

– Разработка правил принятия решений инвестором при формировании портфеля ценных бумаг, обеспечивающих максимум вероятности исполнения или минимум риска неисполнения опциона.

– Сравнение предложенных методов с точки зрения вычислительной сложности используемых расчетных схем.

– Определение рациональной стоимости опциона американского типа и оптимальной инвестиционной стратегии при использовании моделей динамики стоимостей акций с дискретным временем.

– Снижение риска неисполнения обязательств по опционам путем выпуска опционов на различные акции.

Определение. Будем считать, что опцион (call, американского типа) – это контракт, выпускаемый некоторым финансовым институтом (продавцом, эмитентом), дающий покупателю право купить определенную ценность (например, акции) в любой момент времени (момент исполнения) в течение некоторого периода времени по заранее оговоренной цене (цене исполнения) и других, заранее оговоренных, условиях.

Пусть

$t = 0, \ldots, T$ – моменты времени, в которые объявляется новая цена акции на рынке. Предполагается, что продавец и покупатель опциона могут совершать какие-либо действия (исполнять опцион, покупать или продавать акции на рынке) только в эти моменты времени. T – дата истечения действия опциона.

S_t – цена акции в момент времени t (и в период $(t, t+1)$ соответственно), на которую выпускается опцион. Динамика цены описывается некоторой стохастической моделью (например, $(S_t)_{t=0,\ldots,T}$ – независимые случайные величины, принимающие на каждом шаге конечное число значений с некоторыми вероятностями и др., см. [1, 5, 6]).

H_t – сумма случайного размера, являющаяся в общем случае функцией от $S_1, \ldots, S_t$, которую должен уплатить эмитент опциона владельцу, в случае предъявления опциона к исполнению в момент времени t.

Обычно $H_t = (S_t - K)^+ = \max(S_t - K, 0)$, то есть, если $S_t > K$, эмитент покупает акции по цене S_t на рынке и продает их владельцу опциона по цене K или просто выплачивает владельцу опциона сумму $S_t - K$.

Эмитент опциона получает от покупателя сумму, равную цене опциона, являющуюся его начальным капиталом X_0 и использует эту сумму для инвестиции в акции (при этом X_0 не является ограничением, как это принято в инвестиционной теории, а лишь «помогает» выполнить обязательства по опциону). Капитал эмитента в момент времени t определяется соотношением

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i \Delta S_i,$$

где $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ – стратегия эмитента, представляющая собой количество акций, которыми он владеет, в моменты времени $1, \dots, T$ (то есть в момент времени 0 эмитент покупает γ_1 акций по цене S_0 и в момент времени 1 продает все γ_1 акций по цене S_1, далее покупает γ_2 акций по цене S_1 и т.д.). Задача эмитента – определить $(X_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T)$ исходя из некоторого критерия.

Одной из основных задач теории расчета опционов американского типа является задача определения рационального момента предъявления опциона к исполнению. Методы определения такого момента описаны, например, в [1]. Тем не менее, знание рационального момента остановки вовсе не гарантирует того, что опцион будет исполнен именно в этот момент (тем более, что опцион американского типа получил широкое распространение именно благодаря свободе выбора момента исполнения), поэтому целесообразно для каждого момента времени от 1 до T ввести вероятность p_t того, что опцион будет исполнен в этот момент. Такая вероятность может определяться продавцом опциона эмпирически, при заданных T, K, S_0, типе опциона и других условиях.

2. Максимизация вероятности выполнения обязательств

Рассмотрим задачу максимизации вероятности исполнения опциона американского типа:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t P(X_t > H_t) \to \max_{\gamma} \text{ при заданном начальном капитале } X_0, \quad (2.i)$$

где p_t – вероятность того, что опцион будет предъявлен к исполнению в момент времени t. $P(X_t > H_t)$ – вероятность того, что капитал продавца опциона больше суммы, необходимой для выплаты предъявителю опциона.

При рассмотрении американского опциона задача максимизации вероятности исполнения опциона может также выглядеть следующим образом:

$$\min_t p_t P(X_t - H_t > 0) \to \max_{\gamma}. \quad (2.ii)$$

При решении задач (2.i), (2.ii) в случае, если S_t принимает конечное число значений, естественно применение метода динамического программирования.

Для задачи (2.i) рекуррентные соотношения в случае, если цены на акции образуют марковскую цепь, выглядят следующим образом:

$$F_1(X_{T-1}, S_{T-1}) = \max_{\gamma_T} E_\chi(X_T(X_{T-1}, S_{T-1}, \gamma_T) > H_T)$$

$$F_{k+1}(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}) = \max_{\gamma_{T-k}}(p_2' E(F_k(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}, \gamma_{T-k})) + \quad (2.1)$$
$$+ p_1' E_\chi(X_{T-k}(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}, \gamma_{T-k}) > H_{T-k})),$$

где $p_1' = \frac{p_{T-k}}{p_{T-k}+\dots+p_T}$, $p_2' = \frac{p_{T-k+1}+\dots+p_T}{p_{T-k}+\dots+p_T}$, $\chi()$ – индикатор, $k = 1, \dots, T-1$.

Если цены на акции описываются процессами, в которых имеется зависимость S_t от $S_{t-1}, \dots, S_{t-p}$, (см., например, [1, 5, 6]), то в этих соотношениях S_i необходимо заменить на вектор $(S_i, S_{i-1}, \dots, S_{i-1+p})$.

Рекуррентные соотношения для (2.ii):

$$F_1(X_{T-1}, S_{T-1}) = \max_{\gamma_T} E_\chi(X_T(X_{T-1}, S_{T-1}, \gamma_T) > H_T)$$

$$F_{k+1}(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}) = \max_{\gamma_{T-k}}(\min(p_2' E(F_k(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}, \gamma_{T-k})), \quad (2.2)$$
$$p_1' E_\chi(X_{T-k}(X_{T-k-1}, S_{T-k-1}, \gamma_{T-k}) > H_{T-k}))).$$

Оптимальное управление в T-шаговом процессе, начинающемся в общем случае с $S_0, S_{-1}, \dots, S_{-p}, X_0$ строится следующим образом. По рекуррентным соотношениям вычисляются последовательности $\gamma_T(S_{T-1}, \dots, S_{T-p}, X_{T-1}), \dots, \gamma_1(S_0, S_{-1}, \dots, S_{-p+1}, X_0)$ для всех возможных значений $S_{T-1}, \dots, S_{T-p}, X_{T-1}, S_0, S_{-1}, \dots, S_{-p+1}, X_0$. На первом шаге используется управление γ_1. После объявления цены акции S_1 состояние процесса есть $(X_1, S_1, S_0, \dots, S_{-p+2})$, где $X_1 = X_0 + \gamma_1(S_1 - S_0)$. На следующем шаге используется управление $\gamma_2(X_1, S_1, S_0, \dots, S_{-p+2})$ и т.д.

Таким образом, для построения оптимального управления в задаче максимизации вероятности выполнения обязательств необходимы таблицы для $\gamma_n(X, \bar{S})$, F_n, $n = 1, \dots, T$, где $(X, \bar{S})$ принимают значения на решетке.

Основным недостатком применения метода динамического программирования в данном случае является его неприемлемо высокая вычислительная сложность. Из-за экспоненциального по T роста числа вычислительных операций реальные расчеты практически не осуществимы. Например, в [5] применение метода рекурсий динамического программирования для опциона европейского типа при простейших моделях описания эволюции цен оказалось расчетно осуществимым для T не больше 10, в то время как реальные значения T от 20 до 200. При расчетах по соотношениям (2.1), (2.2) и тех же, что и в [5] моделях описания эволюции цен, вычислений примерно вдвое больше. Если модели описания эволюции цен имеют зависимость от p предыдущих значений, то объем вычислений зависит от p экспоненциально, что сокращает расчетный горизонт T в p раз. В связи с этим предпочтительнее использовать следующий метод хеджирования опционов американского типа, основанный на среднеквадратичном критерии оптимизации.

3. Расчет цены опциона американского типа при среднеквадратичном критерии

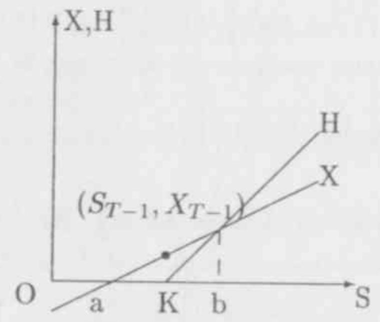
Рассмотрим следующую задачу. Необходимо найти стратегию $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ и стоимость опциона c, такие, что

$$\sum_{t=0}^{T} p_t E(H_t - X_t)^2 \to \min_{\gamma, c} \qquad (2.3)$$

p_t – вероятность того, что опцион будет исполнен в момент времени t. Оптимальное хеджирование понимается здесь как возможность с наибольшей точностью (в среднеквадратичном смысле) воспроизвести H_t для всех t.

Возможна следующая графическая интерпретация задач (2.i) и (2.3) для момента времени $T-1$:

В задаче (2.i) требуется провести через заданную точку (S_{T-1}, X_{T-1}) прямую $X = X_{T-1} + \gamma_T(S - S_{T-1})$ так, чтобы отрезок $[a, b]$, взвешенный по распределению $S = S_T$, был максимальным. Линия ОКН – функция выплат.



В задаче (2.3) требуется провести прямую $X = X_{T-1} + \gamma_T(S - S_{T-1})$ так, чтобы аппроксимировать функцию выплат методом наименьших квадратов. При этом определяется X_{T-1}, то есть среднеквадратичный метод позволяет определить рациональную для эмитента цену опциона, в отличие от метода (2.i).

$$0 = \sum_{l=k}^{T} p_l E[(H_l - X_l)\Delta S_k] =$$

$$= \sum_{l=k}^{T} p_l E\left[\Delta S_k \left(H_l - \sum_{j=k+1}^{l} \sigma_j \Delta S_j \prod_{i=j+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right)\right] -$$

$$- \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k X_k \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) =$$

$$= \sum_{l=k}^{T} p_l E(H_l \Delta S_k) - \sum_{l=k}^{T} p_l \left(\sum_{j=k+1}^{l} E\left(\Delta S_k \sigma_j \Delta S_j \prod_{i=j+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right)\right) -$$

$$-\gamma_k \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k^2 \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) - X_{k-1} \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) =$$

$$= \sum_{l=k}^{T} p_l E\left((H_l \Delta S_k \left(1 - \sum_{j=k+1}^{l} \beta_j \Delta S_j \prod_{i=j+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right)\right) -$$

$$-\gamma_k \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k^2 \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) - X_{k-1} \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) =$$

$$= \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(H_l \Delta S_k \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) -$$

$$-\gamma_k \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k^2 \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right) - X_{k-1} \sum_{l=k}^{T} p_l E\left(\Delta S_k \prod_{i=k+1}^{l}(1-\beta_i \Delta S_i)\right)$$

Отсюда получается искомый вид γ_k. Следовательно $X_k = X_{k-1} + \gamma_k \Delta S_k = \sigma_k \Delta S_k + X_{k-1}(1 - \beta_k \Delta S_k)$ и

$$H_t - X_t = H_t - \sum_{j=k+1}^{t} \sigma_j \Delta S_j \prod_{l=j+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l) - X_k \prod_{l=k+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l) =$$

$$= H_t - \sum_{j=k}^{t} \sigma_j \Delta S_j \prod_{l=j+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l) - X_{k-1} \prod_{l=k}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l). \quad (2.6)$$

Следствие 1. Значение целевой функции при оптимальной стратегии и заданном начальном капитале X_0 имеет вид:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t E(H_t - X_t)^2 = X_0^2 \sum_{t=1}^{T} p_t E\left(\prod_{j=1}^{t}(1-\beta_j \Delta S_j)^2\right) -$$

$$-2X_0 \sum_{t=1}^{T} p_t E\left(H_t \prod_{j=1}^{t}(1-\beta_j \Delta S_j)\right) + \sum_{t=1}^{T} p_t E\left(H_t - \sum_{j=1}^{t} \sigma_j \Delta S_j \prod_{l=j+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l)\right)^2$$

Доказательство. При $k = 1$ с учетом (2.4), (2.5), (2.6):

$$H_t - X_t = H_t - \sum_{j=1}^{t} \sigma_j \Delta S_j \prod_{l=j+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l) - X_0 \prod_{l=1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l) =$$

$$= H_t \left(1 - \sum_{j=1}^{t} \beta_j \Delta S_j \prod_{l=j+1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l)\right) - X_0 \prod_{l=1}^{t}(1-\beta_l \Delta S_l),$$

после возведения в квадрат, перестановки членов и суммирования получаем утверждение.

Следствие 2. Оптимальная цена опциона равна:

$$c = X_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T} p_t E\left(H_t \prod_{j=1}^{t}(1-\beta_j \Delta S_j)\right)}{\sum_{t=1}^{T} p_t E\left(\prod_{j=1}^{t}(1-\beta_j \Delta S_j)^2\right)}.$$

Комментарий. В случае, если $E(\Delta S_t | S_{t-1}) = 0$, то $\beta_j = 0$ и, следовательно, $c = \sum_{t=1}^{T} p_t E H_t$. Это означает, что цена опциона равна средней выплате, что согласуется с понятием «справедливой» цены и известными положениями теории страхования о том, что премия равна

Точка A является искомым портфелем с минимальной дисперсией. Эта точка определяет необходимый эмитенту набор α_i, $i = 1, \dots, d$ и суммарную рациональную стоимость опционов.

Таким образом, теория Марковица выбора оптимального инвестиционного портфеля, в рамках которой решается не только задача выбора портфеля с минимальный дисперсией, но и ряд других задач (минимизация дисперсии при заданной ожидаемой доходности, выбор портфеля на основании кривых безразличия и др., см., например, [3]), может быть использована при выборе портфеля опционов. Для этого необходимо заменить понятие «доходности ценной бумаги» на «стоимость опциона» (при этом продавец опциона стремится уменьшить стоимость опциона, в то время как инвестор стремится увеличить доходность). Необходимо также ввести некоторые ограничения на количество продаваемых опционов. В теории Марковица такое ограничение вполне естественно – инвестор хочет инвестировать весь имеющийся капитал X_0 и не более того, но при выборе портфеля опционов такого ограничения нет. Вводимые ограничения могут изменить не только структуру допустимого множества (как, например, в настоящей статье), но и схему выбора оптимального портфеля.

Методы, рассмотренные в настоящей статье, позволяют оптимизировать инвестиционные стратегии, обеспечивающие выполнение обязательств по опциону, и снизить стоимость опциона.

Проведенные исследования позволяют сформулировать следующие основные выводы:

1. Объем вычислений при среднеквадратичном методе хеджирования существенно меньше, чем при использовании динамического программирования, что позволяет вдвое увеличить временной горизонт T при расчетах, кроме того, объем вычислений в первом методе почти не зависит от длины зависимости от предыдущих значений в моделях динамики стоимостей, в отличие от второго метода, где такая зависимость экспоненциальная, что сокращает T пропорционально этой длине.

2. Использование среднеквадратичного критерия при хеджировании опционов позволяет делать расчеты для любых функций выплат, и следовательно, для опционов всех типов, подпадающих под определение опциона call американского типа:

a) использовать широкий класс процессов описания динамики цен на акции;

b) снизить стоимость опциона, что дает продавцу опциона преимущество при торговле на рынке ценных бумаг;

c) использовать дополнительный метод снижения риска невыполнения обязательств путем выбора портфеля опционов (аналог метода Марковица в теории выбора портфеля акций), при этом снижение риска может быть существенным, в зависимости от коррелированности стоимостей различных акций, вплоть до нуля.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М., 1998.

[2] Шведов А.С. Лекции о математических методах, используемых при работе с опционами // Экономический журнал высшей школы экономики. 1998. Т. 2. №3. С. 385-409.

[3] Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Д.В. Инвестиции. М., 1997.

[4] Селезнева Т.В., Тутубалин В.Н., Угер Е.Г. Имитация практического применения некоторых мартингальных стратегий хеджирования и спекуляции // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1997. Т. 4. Вып. 1.

[5] Афанасьев Г.А. Сравнение стохастических моделей динамики стоимостей акций на примере расчета опционов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1997. Т. 4. Вып. 4.

[6] Taylor S. Modelling financial time series. J. Willey & Sons, 1986.

[7] Боровков А.А. Математическая статистика: Оценка параметров. Проверка гипотез. М., 1984.

[8] Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации (задачи и методы стохастического программирования). М., 1974.

Двухэтапный метод оценки адекватности локальной полиномиальной сплайн-интерполяции битового трафика служб широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания

А.Н. Назаров

1. Введение

Широкий диапазон скоростей передачи – от нескольких сот бит/с до сотен Мбит/с, существенный статистический характер информационных потоков, большое разнообразие сетевых конфигураций – все эти факторы значительно усложняют описание трафика в современных информационных системах по сравнению с классическими сетями связи [1, 2].

Важным требованием, возникшим из-за необходимости экономически эффективного построения широкополосных цифровых сетей интегрального обслуживания (ШЦСИО), является требование гибкого изменения ширины полосы пропускания канала между пунктами передачи и приема информации. Пакетная коммутация АТМ технологии с предварительным выбором виртуальных путей и каналов обеспечивает плавное изменение ширины полосы пропускания канала практически на любую величину [3] вплоть до использования всей сети для передачи информации между двумя заданными пунктами. По мере необходимости увеличения ширины полосы пропускания канала между определенными пунктами передачи информации в сети виртуальные пути передачи захватывают все большую и большую